

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874;537.876;621.372

### ОТРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ МОДЫ ОТ ОБРЫВА ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛА

© 2013 г. А. Б. Маненков

*Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН,  
Российская Федерация, 119334, Москва, ул. Косыгина, 2*

*E-mail: manenkov@kapitza.ras.ru*

Поступила в редакцию 31.05.2013 г.

Вариационным методом исследована задача об отражении поверхностных мод от обрыва плоского диэлектрического волновода, изготовленного из метаматериала. Теория проиллюстрирована на примерах задач об обрыве трехслойных симметричных волноводов с кусочно-постоянными профилями проницаемостей.

DOI: 10.7868/S0033849413120140

#### ВВЕДЕНИЕ

Проблемы рассеяния мод на нерегулярностях диэлектрических волноводов часто возникают при анализе различных СВЧ и оптических систем. Подобные проблемы достаточно подробно рассмотрены для структур, изготовленных из “обычных” сред (см., например, [1–3]). В настоящее время интенсивно исследуются системы, изготовленные из метаматериалов. Такие материалы также называют левыми материалами<sup>1</sup> или средами с отрицательными коэффициентами преломления. Их диэлектрические  $\epsilon$  и магнитные  $\mu$  проницаемости могут быть одновременно отрицательными [4, 5]. Как правило, метаматериалы являются искусственными магнитодиэлектриками (композитами). Они имеют ряд уникальных свойств (например, отрицательную рефракцию), в них возможен “обратный” эффект Черенкова.

Моды регулярных планарных волноводов из метаматериалов описаны в работах [6–9]. В то же время задачи рассеяния для таких структур слабо изучены. В данной работе рассматриваем задачу об отражении поверхностной моды от обрыва планарного диэлектрического волновода (ПДВ), центральный слой которого изготовлен из среды с отрицательными значениями проницаемостей  $\epsilon$  и  $\mu$  (рис. 1). Задача решена вариационным методом [10–12]. Заметим, что ранее подобную проблему рассматривали в работе [12], где, однако, рассчитывали отражения мод дру-

гого типа, так называемых осциллирующих мод волноводов.

К классу метаматериалов иногда относят также фотонные кристаллы [13] и различные слоистые диэлектрические структуры. Некоторые свойства указанных систем отличаются от свойств большинства композитов, тем не менее многие явления во всех подобных средах весьма похожи. Ниже ограничимся анализом только того класса структур (композитов), которые можно в данном диапазоне частот считать однородными средами, т.е. предполагаем, что размеры всех включений в средах, которые используют для изготовления метаматериалов, существенно меньше длины волны. Анализ этого предположения будет дан ниже.

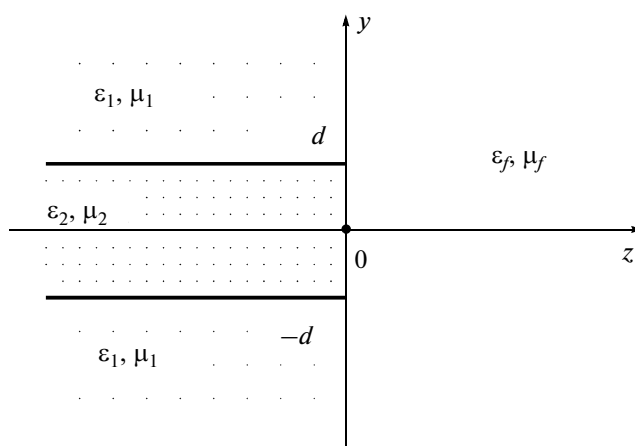


Рис. 1. Геометрия задачи.

<sup>1</sup> В англоязычной литературе для обозначения таких сред обычно используют термины “left handed medium” (LHM).

## 1. ПОВЕРХНОСТНЫЕ МОДЫ

Геометрия задачи и система координат изображены на рис. 1; толщина центрального слоя ПДВ обозначена через  $2d$ . Предполагаем, что структура симметрична, т.е. функции  $\varepsilon(y)$  и  $\mu(y)$  являются четными функциями поперечной координаты  $y$ . Ниже считаем, что профили проницаемостей кусочно-постоянны: в подложке и в покрытии (при  $|y| > d$ ) они равны  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$ , а внутри центрального слоя (при  $|y| < d$ ) равны соответственно  $\varepsilon_2$  и  $\mu_2$ . Первая пара проницаемостей положительная, а вторая – отрицательная. Заметим, что методика с небольшими изменениями применима и к ПДВ, у которых проницаемости являются кусочно-непрерывными функциями координаты  $y$ . Как обычно, временной множитель, который имеет вид  $\exp(-i\omega t)$ , где  $\omega = kc$ ,  $k$  – волновое число,  $c$  – скорость света в вакууме, будем часто опускать. Далее считаем, что диэлектрические и магнитные потери малы, поэтому ими можно пренебречь. В то же время для выделения единственного решения будем предполагать, что волновое число  $k$  имеет малую мнимую часть  $\text{Im } k \rightarrow +0$ . Ниже исследуем  $TE$ -случай, когда все волны имеют только одну отличную от нуля компоненту  $E_x$ .

Прежде чем решать задачу отражения, опишем кратко характеристики собственных мод рассматриваемого ПДВ. Множество собственных мод содержит моды дискретного спектра (направляемые) и моды непрерывного спектра (радиационные). Достаточно подробный анализ свойств направляемых мод разного типа представлен в работах [7–9]; здесь приведем только те результаты, которые будут необходимы при решении задачи дифракции. В дальнейшем предполагаем, что выполнены условия

$$\Delta_{21} = \varepsilon_2\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1 < 0, \quad |\mu_2| > \mu_1. \quad (1)$$

При таких условиях в системе могут распространяться поверхностные моды (ПМ). Электрическое поле всех мод имеет вид

$$E_x = \Phi(y) \exp[i(\beta z - \omega t)]. \quad (2)$$

Функция  $\Phi(y)$  описывает распределение поля в поперечной плоскости  $z = \text{const}$ ; она является решением уравнения [14]

$$\mu(y) \frac{d}{dy} \left[ \frac{1}{\mu(y)} \frac{d\Phi}{dy} \right] + [k^2 \varepsilon(y) \mu(y) - \beta^2] \Phi = 0. \quad (3)$$

Это уравнение может быть выведено из уравнений Максвелла, если искать их решение в виде (2). Для мод дискретного спектра, в том числе и для ПМ, должно быть выполнено условие на бесконечности:  $\Phi(\pm\infty) = 0$ .

Далее будем рассматривать симметричную моду низшего типа, которую обозначим через  $TE_{0f}$ . Смысл индекса “ $f$ ” объяснен ниже. Из приведенных соотношений следует, что для симметричных ПМ поле равно

$$\Phi_0(y) = \begin{cases} A \text{ch}(p_2 y) & \text{при } |y| < d, \\ B \exp[-p_1(|y| - d)] & \text{при } |y| > d, \end{cases} \quad (4)$$

где  $A$  и  $B$  – амплитудные множители. Волновые числа ПМ связаны соотношением

$$\beta^2 = k^2 \varepsilon_2 \mu_2 + p_2^2 = k^2 \varepsilon_1 \mu_1 + p_1^2, \quad (5)$$

где  $p_1$  – внешнее поперечное волновое число.

Вывод дисперсионного уравнения (ДУ) для рассматриваемой ПМ, распространяющейся в такой структуре, проводится по стандартной схеме с учетом граничных условий на плоскостях  $y = \pm d$ . В частности, условия при  $y = d$  имеют вид

$$E_x|_{d+0} = E_x|_{d-0}, \quad \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_x}{\partial y} \Big|_{d+0} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial E_x}{\partial y} \Big|_{d-0}. \quad (6)$$

Заметим, что условия на бесконечности уже учтены в (4). Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательное ДУ:

$$p_1 d = -\frac{\mu_1}{\mu_2} (p_2 d) \text{th}(p_2 d). \quad (7)$$

При решении (7) следует учитывать соотношение между волновыми числами (5), которое можно записать в виде  $p_1^2 = p_2^2 + k^2 \Delta_{21}$ .

Для иллюстрации приведем типичные дисперсионные кривые и структуру полей для ПМ типа  $TE_{0f}$  в таком волноводе. На рис. 2 изображена зависимость  $p_1/k$  от безразмерной толщины центрального (волноводящего) слоя  $2d/\lambda$  ( $\lambda$  – длина волны). Кривая 1 построена для ПДВ с параметрами  $\varepsilon_1 = 10$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = -4$  и  $\mu_2 = -2$ .

Отметим, что указанные параметры удовлетворяют неравенствам (2), причем в этом случае  $\Delta_{21} = -2$ . Смысл кривой 2 будет пояснен ниже.

Важно отметить, что при условиях (2) мода низшего типа  $TE_{0f}$  является прямой [15, 16]; дополнительный нижний индекс “ $f$ ” указывает на это свойство моды. Для такой моды знаки  $\text{Re } \beta$  и  $\text{Im } \beta$  одинаковы, при этом фазовая и групповая скорости направлены в одну сторону. При этих параметрах она не имеет отсечки, т.е. существует при сколь угодно низких частотах. Поведение кривой 1 на рис. 2 нетрудно понять, если анализировать решения ДУ стандартным графическим методом, как это делается для обычного ПДВ [16].

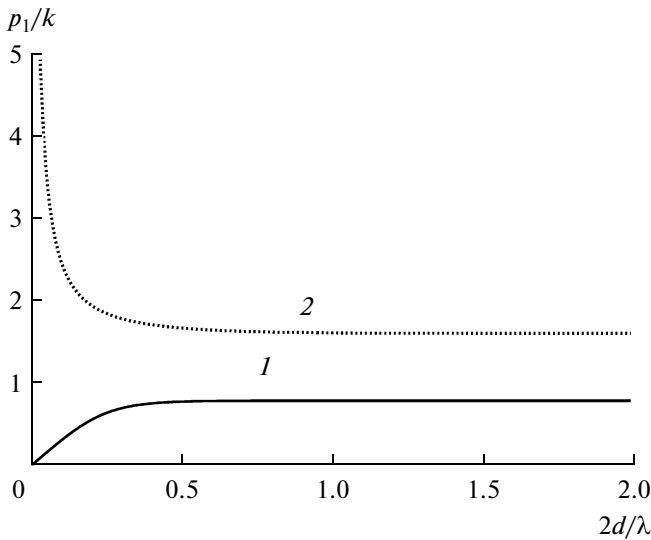


Рис. 2. Зависимость безразмерного поперечного волнового числа мод  $TE_{0f}$  и  $TE_{0b}$  от толщины волноведущего слоя.

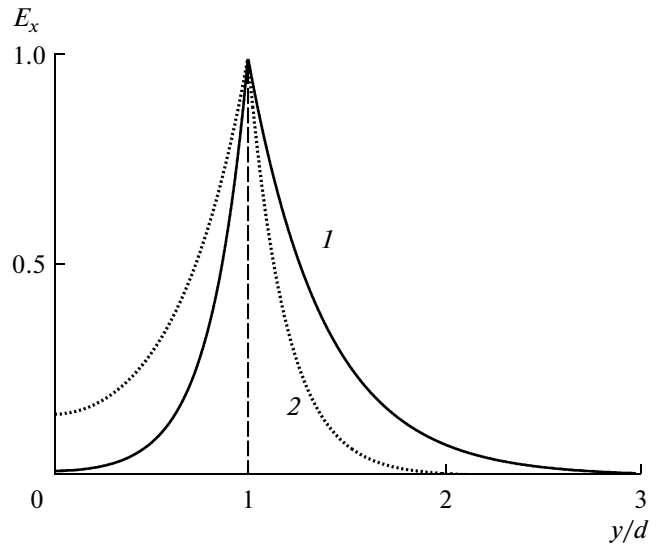


Рис. 3. Распределение электрических полей для мод  $TE_{0f}$  и  $TE_{0b}$ .

При условии  $kd \ll 1$  из (7) нетрудно получить приближенные выражения для поперечных волновых чисел моды  $TE_{0f}$ :

$$p_1 = -(\mu_1/\mu_2)k^2 d |\Delta_{21}|, \quad p_2 = k\sqrt{|\Delta_{21}|}. \quad (8)$$

Заметим, что при малой толщине ПДВ рассматриваемая мода является слабозамедленной, т.е.  $\beta \approx kn_1$ , где  $n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$  – показатель преломления подложки и покрытия. В другом предельном случае, когда  $kd \gg 1$ , имеем

$$p_1 = -(\mu_1/\mu_2)p_2, \quad p_2 = k\sqrt{|\Delta_{21}|/[1 - (\mu_1/\mu_2)^2]}. \quad (9)$$

Исследуемая мода  $TE_{0f}$  является поверхностной; ее направляют границы раздела сред, к которым “прижаты” поля. Поэтому ясно, что при большой толщине волновода  $2d$  указанные значения  $p_1$  и  $p_2$  будут близки к значениям поперечных чисел мод, направляемых отдельно каждой из границ раздела левой и правой сред [6].

На рис. 3 изображено распределение электрического поля  $E_x(y/d)$  исследуемой моды для рассматриваемого волновода (кривая 1). Смысл кривой 2 будет пояснен ниже. Параметры волновода те же, что и для рис. 2, а его толщина удовлетворяла соотношению  $2d/\lambda = 1$ . На рисунке вертикальная штриховая линия показывает расположение границы раздела сред. Согласно (4) внутри центрального слоя электрическое поле пропорционально гиперболическому косинусу, а снаружи спадает по экспоненциальному закону.

Для анализа задачи отражения используем также радиационные моды (РМ) волновода и правого полупространства. Эти моды можно построить при помощи общего подхода, описанного в работах [17, 18]. Отметим, что для волновода с кусочно-постоянными параметрами поля РМ можно представить в виде сумм экспоненциальных функций. Коэффициенты при этих функциях определяются из условий непрерывности на границах  $y = \pm d$  и из условий на бесконечности, которые выведены при помощи метода S-оператора [18]. Для планарной геометрии РМ попарно вырождены и введение этого оператора позволяет разделить множество РМ (т.е. идентифицировать каждую моду)<sup>2</sup>. Поля РМ волновода можно представить в виде

$$E_x = U_{mk}(y) \exp[i(\beta_k z - \omega t)], \quad (10)$$

где  $\kappa$  и  $\beta_k = (k^2 \epsilon_1 \mu_1 - \kappa^2)^{1/2}$  – поперечное и продольное волновые числа РМ (непрерывные параметры),  $m$  – дискретный индекс. Для симметричного ПДВ индексом  $m$  отмечена четность моды:  $m = 0$  для четных мод и  $m = 1$  для нечетных. Для прямых РМ в выражении для  $\beta_k$  выбирают ту ветвь корня, у которой  $\text{Im} \beta_k > 0$  при  $\text{Im} k > 0$ .

<sup>2</sup> Указанный подход во многом схож с хорошо известным и изученным подходом, который используется в квантовой механике для построения волновых функций непрерывного спектра [19].

Система функций  $\Phi_0$  и  $U_{m\kappa}$  является ортогональной системой с весом  $1/\mu(y)$ . Условия ортогональности имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | \Phi_0 / \mu(y) \rangle &= N_0, \\ \langle U_{m\kappa} | U_{m'\kappa'} / \mu(y) \rangle &= D_{m\kappa} \delta_{mm'} \delta(\kappa - \kappa'), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $N_0$  – скалярная норма ПМ,  $D_{m\kappa}$  – нормирующий множитель РМ волновода,  $\delta_{mm'}$  – единичный тензор,  $\delta(\kappa - \kappa')$  – дельта-функция. Здесь и ниже используется следующее обозначение для интеграла в плоскости  $z = 0$  от произведения произвольных функций  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$ :

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(y) dy. \quad (12)$$

Отметим, что в формулах (11) весовая функция  $1/\mu(y)$  знакопеременная, поэтому введенные выше выражения не являются обычными скалярными произведениями.

Радиационные моды правого полупространства можно построить в явном виде. Поля четных РМ ( $m = 0$ ) имеют вид

$$E_x = V_{0\kappa}(y) \exp[i(\gamma_{\kappa} z - \omega t)], \quad V_{0\kappa}(y) = F_{0\kappa} \cos(\kappa y). \quad (13)$$

Здесь  $\kappa$  – поперечное волновое число, которое пробегает все значения  $\kappa > 0$ , а  $F_{0\kappa}$  – амплитудный коэффициент. Для этих мод продольное волновое число равно  $\gamma_{\kappa} = (k^2 \epsilon_f \mu_f - \kappa^2)^{1/2}$ . Система функций  $\{V_{m\kappa}\}$  ортогональная с весом  $1/\mu_f$ . Нормирующий множитель для мод правого полупространства равен

$$D_{m\kappa}^{(f)} = \pi F_{m\kappa}^2 / \mu_f. \quad (14)$$

В этих формулах проницаемости правого полупространства обозначены через  $\epsilon_f$  и  $\mu_f$ .

## 2. ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ

Перейдем теперь к решению задачи отражения ПМ от обрыва ПДВ. Предполагаем, что по волноводу распространяется мода низшего типа  $TE_{0f}$ ; в дальнейшем ПДВ считаем одномодовым. Для вывода интегрального уравнения (ИУ) для неизвестной функции  $\mathcal{E} = E_x$  в плоскости обрыва  $z = 0$  разложим ее по собственным модам волновода и свободного полупространства [11, 12]. Для

планарной геометрии слева от обрыва (при  $z < 0$ ) электрическое поле равно

$$\begin{aligned} E_x &= [\exp(i\beta z) + R \exp(-i\beta z)] \Phi_0(y) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \rho_{m\kappa} U_{m\kappa}(y) \exp(-i\beta_{\kappa} z) d\kappa, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $R$  – коэффициент отражения основной ПМ типа  $TE_0$ ,  $\rho_{m\kappa}$  – неизвестные амплитуды полей РМ. Разложение для поля в правом полупространстве (при  $z > 0$ ) имеет вид

$$E_x = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \tau_{m\kappa} V_{m\kappa}(y) \exp(i\gamma_{\kappa} z) d\kappa, \quad (16)$$

где  $\tau_{m\kappa}$  – неизвестные коэффициенты (амплитуды РМ). Поскольку рассматривается случай, когда падающая мода четная, то во всех приведенных выше формулах следует в суммах оставить только слагаемые с индексом  $m = 0$ .

Далее приравниваем в плоскости  $z = 0$  касательные компоненты полей  $E_x$  и  $H_y$ . В результате приходим к ИУ 1-го рода [3, 10, 11], которое имеет вид

$$\hat{\Xi}[\mathcal{E}] = \frac{2\beta}{\mu(y)} \Phi_0(y), \quad (17)$$

где  $\mathcal{E}$  – неизвестная функция (см. выше),  $\hat{\Xi}[\mathcal{E}]$  – интегральный оператор. Этот оператор определен соотношением

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}[\mathcal{E}] &= \frac{\beta \Phi_0}{N_0 \mu(y)} \langle \mathcal{E} | \Phi_0 / \mu(y) \rangle + \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{\beta_{\kappa} U_{0\kappa}}{D_{0\kappa} \mu(y)} \langle \mathcal{E} | U_{0\kappa} / \mu(y) \rangle d\kappa + \int_0^{\infty} \frac{\gamma_{\kappa} V_{0\kappa}}{D_{0\kappa}^{(f)} \mu_f} \langle \mathcal{E} | V_{0\kappa} / \mu_f \rangle d\kappa. \end{aligned} \quad (18)$$

Из полученного уравнения стандартными способами [10, 11] можно получить стационарные функционалы для основных характеристик задачи. В частности, стационарный функционал для коэффициента отражения  $R$  моды  $TE_{0f}$  имеет вид

$$\frac{1-R}{1+R} = \frac{N_0 \langle \mathcal{E} | \hat{\Xi}_r[\mathcal{E}] \rangle}{\beta \langle \mathcal{E} | \Phi_0 / \mu(y) \rangle^2}, \quad (19)$$

где новый оператор  $\hat{\Xi}_r[\mathcal{E}]$  равен

$$\hat{\Xi}_r[\mathcal{E}] = \hat{\Xi}[\mathcal{E}] - \frac{\beta \Phi_0}{N_0 \mu(y)} \langle \mathcal{E} | \Phi_0 / \mu(y) \rangle. \quad (20)$$

При выводе (19) учитывали следующее выражение для коэффициента отражения ПМ через поле в плоскости обрыва:

$$N_0(1 + R) = \langle \mathcal{E} | \Phi_0 / \mu(y) \rangle. \quad (21)$$

Благодаря свойству стационарности формула (19) дает результаты с погрешностью следующего порядка малости по отношению к погрешности “пробного” (приближенного) поля  $\mathcal{E}$ , которое в нее подставляют. В качестве распределения  $\mathcal{E}$  будем использовать функцию, пропорциональную полю падающей на обрыв моды:  $\mathcal{E} = C_e \Phi_0(y)$ , где  $C_e$  – некоторая постоянная. Отметим, что в правой части функционала (19) константа  $C_e$  сокращается, поэтому значения  $R$ , вычисленные при его помощи, не зависят от амплитуды поля  $\mathcal{E}$ , а определяются лишь формой его распределения. Таким образом, при вычислении коэффициента отражения считаем, что на обрыве поле приближенно равно сумме падающей и отраженной<sup>3</sup> мод  $TE_{0f}$ ; при этом пренебрегали полями РМ волновода. Напомним, что при выводе вышеприведенных формул также предполагали, что волновод одноимодовый. С учетом ортогональности полей ПМ и РМ волновода, получим окончательное выражение

$$\frac{1 - R}{1 + R} = \frac{1}{\beta N_0} \int_0^{\infty} \frac{\gamma_{\kappa}}{D_{0\kappa}^{(f)2} \mu_f} \langle \Phi_0 | V_{0\kappa} \rangle^2 d\kappa. \quad (22)$$

В силу симметрии задачи в этом выражении учтены лишь четные моды (с индексом  $m = 0$ ). Отметим еще раз, что в последнее соотношение вошли только РМ волновода.

При помощи вариационного соотношения (22) в предельных случаях можно получить ряд аналитических оценок. В частности, при малой толщине волновода, когда  $kd \rightarrow 0$ , предельное значение коэффициента отражения (по амплитуде) равно

$$R|_{d=0} = \frac{\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} - \sqrt{\mu_f/\varepsilon_f}}{\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} + \sqrt{\mu_f/\varepsilon_f}}. \quad (23)$$

При выводе этой формулы учли соотношения (8). Отметим, что эту формулу можно получить также из соображений геометрической оптики.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Во всех рассмотренных ниже примерах считали, что параметры правого полупространства со-

<sup>3</sup> Заметим, что термины “падающая и отраженная моды” в случае, когда рассматриваемая мода является обратной (см. ниже), условны.

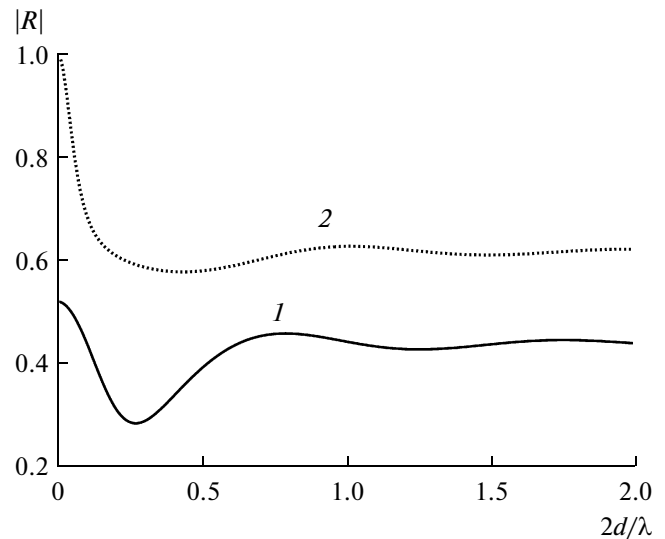
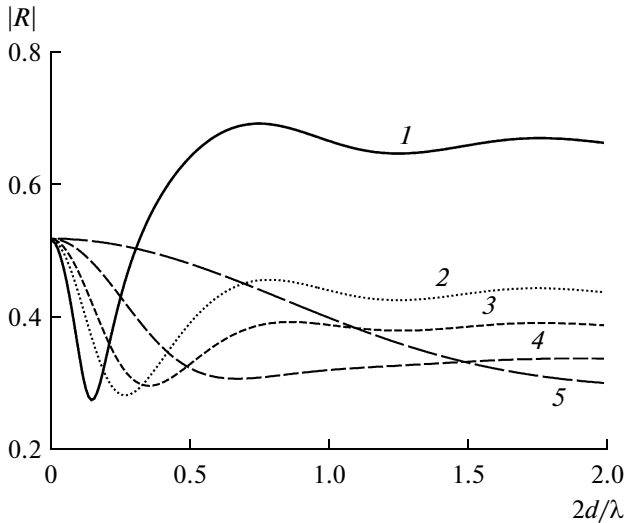


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения мод  $TE_{0f}$  и  $TE_{0b}$  от безразмерной толщины волноведущего слоя.

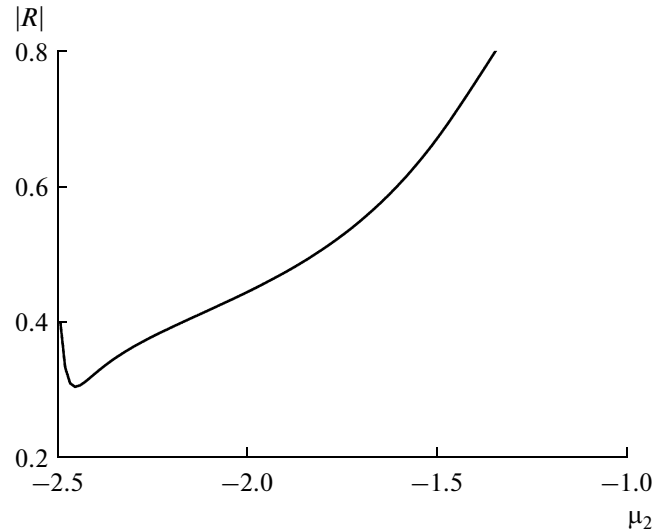
ответствуют параметрам вакуума:  $\varepsilon_f = \mu_f = 1$  (т.е. показатель преломления правого полупространства  $n_f = 1$ ). На рис. 4 (кривая 1) приведены значения модуля коэффициента отражения  $|R|$  моды  $TE_{0f}$  в зависимости от безразмерной толщины волновода  $2d/\lambda$ . Предполагали, что проницаемости среднего слоя равны  $\varepsilon_2 = -4$  и  $\mu_2 = -2$ , а снаружи слоя  $\varepsilon_1 = 10$  и  $\mu_1 = 1$ . Заметим, что зависимость, представленная на рис. 4, напоминает зависимость  $|R(2d/\lambda)|$  для основной моды в задаче об обрыве волновода, изготовленного из обычных диэлектриков [1–3], хотя структура мод в этих системах существенно различная.

Вариационный метод можно использовать также для расчета диаграммы направленности (ДН) излучения в дальней зоне. Однако обычно для расчета ДН проще использовать приближение физической оптики, которое дает достаточно точные результаты. В этом приближении поле в плоскости обрыва представляем в виде суммы полей падающей и отраженной НМ. При таком подходе пренебрегаем полями краевых волн, которые возбуждаются на ребрах (т.е. в точках с координатами  $z = 0, y = \pm d$ ).

В настоящее время созданы композиты (метаматериалы), у которых параметры могут изменяться в результате варьирования внешних статических полей: например, изменения внешнего магнитного поля [5]. В волноводах с такими средами можно перестраивать характеристики распространяющихся мод, а также характеристики



**Рис. 5.** Зависимость коэффициента отражения мод  $TE_{0f}$  от безразмерной толщины волноведущего слоя при различных значениях проницаемости  $\mu_2$  центрального слоя.



**Рис. 6.** Зависимость коэффициента отражения мод  $TE_{0f}$  от проницаемости  $\mu_2$  волноведущего слоя при постоянной его толщине.

рассеяния в случае, когда моды распространяются вдоль нерегулярных систем.

Рассмотрим, как влияет изменение магнитной проницаемости волноведущего слоя на коэффициент отражения в системе, изображенной на рис. 1. На рис. 5 приведены значения  $|R|$  в зависимости от безразмерной толщины волновода  $2d/\lambda$  для моды  $TE_{0f}$ . Предполагали, что диэлектрическая проницаемость среднего слоя не изменялась и равна  $\varepsilon_2 = -4$ ; снаружи слоя  $\varepsilon_1 = 10$  и  $\mu_1 = 1$ . Кривая 1 построена для случая, когда  $\mu_2 = -1.5$ , кривая 2 — для  $\mu_2 = -2.0$ , кривая 3 — для  $\mu_2 = -2.2$ , кривая 4 — для  $\mu_2 = -2.4$  и кривая 5 — для  $\mu_2 = -2.49$ . На рис. 6 изображена зависимость  $|R|$  от значения  $\mu_2$  в центральном слое при постоянной толщине волновода  $2d/\lambda = 1$  для моды  $TE_{0f}$ .

Параметры <sup>4</sup> сред те же, что и для рис. 4. Отметим, что эффекты влияния магнитной проницаемости на характеристики отражения волн, которые описаны выше, могут быть использованы, например, в оптических датчиках.

#### 4. ОТРАЖЕНИЕ ОБРАТНЫХ МОД

В волноводах из метаматериалов могут существовать не только рассмотренные ранее ПМ типа  $TE_{0f}$ , но и дискретные моды других типов [7,

14]. Ниже исследуем рассеяние на обрыве волновода симметричных ПМ низшего типа, но не прямых, а обратных, которые будем обозначать  $TE_{0b}$ . Решение этой задачи проводили по той же схеме, что и задачи о рассеянии прямой моды (см. выше), поэтому ниже приведем только окончательные результаты.

Мода  $TE_{0b}$  является обратной при условиях

$$\Delta_{21} = \varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1 > 0, \quad -\mu_1 < \mu_2 < 0. \quad (24)$$

Напомним, что для обратных мод фазовая и групповая скорости направлены в разные стороны [15]. Указанное свойство обусловлено тем фактом, что показатель преломления метаматериала отрицателен и у распространяющихся в метаматериале парциальных плоских волн вещественные и мнимые части волновых векторов антипараллельны. В подобных системах структура потоков мощности ПМ существенно отличается от потоков мощности в обычных ПДВ.

На рис. 2 (см. выше) кривая 2 представляет зависимость  $p_1/k$  от безразмерной толщины центрального (волноведущего) слоя  $2d/\lambda$ . Эта кривая построена для ПДВ с параметрами:  $\varepsilon_1 = 5$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = -14$  и  $\mu_2 = -0.5$ ; при таких значениях проницаемостей параметр  $\Delta_{21} = +2$ . При больших толщинах центрального слоя ( $kd \gg 1$ ) предельные значения поперечных волновых чисел обратной моды  $TE_{0b}$  определяются при помощи тех же формул (9), что и волновые числа прямой моды. Как и для прямых мод, при больших  $kd$  значения  $p_1, p_2$

<sup>4</sup> Заметим, что интервал изменения  $\mu_2 \in (-2.5, -1.0)$  для этого рисунка является максимально возможным при условиях, которые следуют из неравенств (1).

близки к значениям волновых чисел мод, направляемых одной границей раздела [6].

Следует подчеркнуть, что величины отношения  $p_2/p_1$  существенно различаются для прямых и обратных мод. Нетрудно показать, что для прямых мод  $p_2/p_1 > 1$ ; таким образом, для них значительная часть мощности распространяется в подложке и покрытии. Для обратных мод  $p_2/p_1 < 1$  и поле преимущественно локализовано в центральном слое. Отмеченное свойство объясняет также тот факт, что при малых толщинах волновода ( $kd \ll 1$ ) для обратных мод их поперечные волновые числа возрастают при уменьшении толщины  $2d$ , поэтому  $p_1d \approx p_2d \sim 1$ . Заметим, что формально мода  $TE_{0b}$  не имеет отсечки, однако как будет пояснено ниже, вывод ДУ для этой моды может быть не совсем корректен и ее анализ при малых  $d$  должны проводить на другой модели.

На рис. 3 (кривая 2) изображено распределение электрического поля  $E_x(y/d)$  обратной моды для волновода из метаматериала. Параметры волновода такие же, как и при построении кривой 2 на рис. 2, а безразмерная толщина  $2d/\lambda = 1$ . Как и для системы с прямой модой (см. кривую 1), внутри центрального слоя электрическое поле пропорционально гиперболическому косинусу, а снаружи спадает по экспоненциальному закону. Различие кривых связано в основном с разными значениями отношений  $p_2/p_1$  (см. выше).

На рис. 4 (кривая 2) приведены значения модуля коэффициента отражения  $|R|$  в зависимости от безразмерной толщины волновода  $2d/\lambda$  для обратной моды. Предполагали, что проницаемости среднего слоя равны  $\epsilon_2 = -14$  и  $\mu_2 = -0.5$ , а снаружи слоя  $\epsilon_1 = 5$  и  $\mu_1 = 1$ . Из приведенного рисунка видно, что значения  $R$  для мод  $TE_{0f}$  и  $TE_{0b}$  существенно различаются.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Использованный в работе вариационный метод (ВМ) является приближенным. В частности, приближенность указанного подхода связана с тем, что при расчетах не учитывали краевые волны, которые возбуждаются в реберных точках. В принципе влияние этих волн можно учесть, модифицируя метод. Для этого следует, например, разложить неизвестное поле  $\mathcal{E}(y)$  по какой-либо полной системе функций, а затем искать коэффициенты разложения вариационным методом или методом, основанным на методе Галеркина. К сожалению, эти методики достаточно громоздки, в первую очередь из-за сингулярности задачи. Кроме того, в общем случае при их ре-

ализации обычно трудно добиться быстрой сходимости. Следует также учесть, что исходное уравнение (17) является уравнением 1-го рода, при решении которого обычно возникают трудности, связанные с неустойчивостью его решения. Часть проблем, которые возникают на этом пути, описаны в работе [1].

Отметим, что точность расчета коэффициента отражения простым вариантом ВМ, который описан выше, обычно достаточна для большинства приложений. Расчеты, выполненные для похожих задач дифракции волн в ПДВ из обычных сред [3], показывают, что ВМ обеспечивает точность порядка нескольких процентов. Эту оценку подтверждают также результаты решения различных задач дифракции волн на нерегулярностях металлических волноводов (рассеяние на диафрагмах, на обрыве волновода с фланцем и др.) [10, 20, 21].

В связи со сказанным выше следует подчеркнуть, что во многих случаях возникает вопрос, имеет ли смысл уточнять решение рассмотренной задачи, поскольку сама модель, которая была проанализирована в работе, является приближенной. Благодаря этому факту задачи распространения и рассеяния волн в структурах из метаматериалов существенно отличаются от подобных задач для обычных диэлектрических волноводов. Обсудим этот вопрос подробнее.

Как отмечено выше, в области малых толщин ПДВ поперечные волновые числа обратных ПМ типа  $TE_{0b}$  растут при уменьшении  $2d$ . Особенно сильно возрастают значения  $p_2$ , а значит, и  $\beta$  при условии  $\mu_2 \approx -\mu_1$ . В этой области параметров поля будут быстро меняться при изменении координат. Очевидно, что для метаматериалов, изготовленных при помощи имплантации микрочастиц, при указанных больших значениях  $p_2$  и  $\beta$  может потребоваться учет пространственной дисперсии [14], а в пределе малых толщин ПДВ может существенно нарушаться условие однородности “левой” среды (см. Введение).

Таким образом, для метаматериалов область малых толщин  $2d$  должны исследовать по модифицированной схеме. Конечно, какие-то подобные эффекты в принципе могут быть и в обычных диэлектриках, однако они возникнут лишь в случае, когда некоторые характерные размеры задачи сравнимы с межатомными размерами. В метаматериалах роль межатомных размеров играют расстояния между внедренными частицами (между метатомами); как правило, эти расстояния существенно превышают межатомные, так что проблемы возникают намного раньше, чем в структурах из обычных сред. По-видимому, можно создать более

однородные метаматериалы, потому указанные эффекты станут несущественными. В то же время в ряде случаев, например при создании структур с сильными частотными зависимостями (фильтры и т.д.), подобные эффекты могут представлять определенный практический интерес.

Для рассматриваемой структуры дополнительные трудности могут возникнуть и при анализе поведения полей вблизи реберных точек в плоскости обрыва. Из-за большого контраста проницаемостей в окрестности этих точек поля меняются очень быстро, поэтому в указанных областях дискретная структура метаматериалов может проявиться достаточно заметно и их нельзя считать сплошными средами. Далее, как показано в [14], структура мод в волноводах существенно меняется в том случае, когда проницаемости непрерывно изменяются на границе ПДВ. Как правило, эти изменения намного значительнее, чем для обычных ПДВ. Указанный факт обусловлен тем, что в переходных слоях проницаемости метаматериалов могут обращаться в ноль.

Для прямых ПМ типа  $TE_{0f}$  ограничения на величины  $2d$  менее жесткие, поскольку для этих мод при всех толщинах волновые числа  $p_2$  и  $\beta$  ограничены. Тем не менее и для таких мод при малой толщине ПДВ может потребоваться модификация всей теории. Вероятно, в общем случае следует рассматривать подобные структуры как открытые периодические волноводы, образованные системой микрочастиц (мета-атомов), внедренных в диэлектрическую среду [13, 22]. Иными словами, в такой ситуации не следует применять операцию усреднения полей в левых средах; необходимо рассматривать их как фотонные кристаллы, образованные цепочками периодически расположенных резонансных микрочастиц (в данном случае двумерных).

Заметим также, что характеристики метаматериалов весьма сильно зависят от длины волны электромагнитного поля [6]. Поэтому при перестройке частоты коэффициент отражения может изменяться в значительных пределах; этот факт следует учитывать при расчете конкретных систем.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вариационным методом рассчитаны коэффициенты отражения прямых и обратных поверхностных мод  $TE_{0f}$  и  $TE_{0b}$  от обрыва плоского диэлектрического волновода, изготовленного из метаматериала. Расчеты показали, что дифракционные характеристики рассматриваемой системы отличаются от характеристик подобной

же структуры, в которой использованы обычные среды (с положительными показателями преломления).

Важно отметить, что во многих случаях ВМ намного универсальнее других методов решения подобных задач. Выше отмечалось, что в окончательное выражение (22) не вошли РМ волновода. Поскольку РМ свободного пространства строятся в явном виде, то это выражение можно достаточно просто использовать при расчете  $R$  для весьма сложных систем, так как расчет распределения поля направляемой моды  $\Phi_0(y)$  может быть проведен при весьма общих предположениях о виде функций  $\epsilon(y)$  и  $\mu(y)$  [14]. В частности, ВМ легко обобщается на случай задачи об обрыве волновода с переменным профилем показателей преломления, в том числе на волновод, у которого переход от одной среды к другой происходит плавно. Такое обобщение является достаточно важным, поскольку, как правило, в реальных системах функции  $\epsilon(y)$  и  $\mu(y)$  являются часто непрерывными (они не имеют скачков, как в рассмотренных выше примерах). Переменный профиль может, например, возникать из-за технологических особенностей при изготовлении волноводов. Описанную методику можно обобщить на случай другой поляризации направляемых мод, т.е. для ТМ-задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-02-01280 и 13-02-00732).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vassallo Ch.* // J. Opt. Soc. Amer. A. 1988. V. 5. № 6. P. 1918.
2. *Kendall P.C., Roberts D.A., Robson P.N. et al.* // IEEE Proc., pt. J. Optoelectronics. 1993. V. 140. № 1. P. 49.
3. *Маненков А.Б., Тугелус И.Г.* // РЭ. 2001. Т. 46. № 11. С. 1337.
4. *Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. № 18. P. 4184.
5. *Zhao H., Zhou J., Zhao Q. et al.* // Appl. Phys. Lett. 2007. V. 91. № 13. P. 131107.
6. *Ruppin R.* // Phys. Lett. A. 2000. V. 277. № 1. P. 61.
7. *Shadrivov I.V., Sukhorukov A.A., Kivshar Yu.S.* // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. № 5. P. 057602.
8. *He Y., Cao Z., Shen Q.* // Opt. Commun. 2005. V. 245. № 1–6. P. 125.
9. *Wang Z.H., Xiao Z.Y., Luo W.Y.* // J. Opt. A (Pure Appl. Opt.). 2009. V. 11. № 1. P. 015101.
10. *Lewin L.* Theory of Waveguides. L.: Newness-Butterworths, 1975.
11. *Маненков А.Б.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 12. С. 1484.



12. Маненков А.Б., Тигелис И.Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53. № 3. С. 210.
13. Joannopoulos J.D., Johnson S.G., Winn J.N., Meade R.D. Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008.
14. Маненков А.Б. // РЭ. 2012. Т. 57. № 9. С. 983.
15. Шевченко В.В. // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177. № 3. С. 301.
16. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1982.
17. Маненков А.Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 5. С. 739.
18. Маненков А.Б., Тигелис И.Г. // РЭ. 2005. Т. 50. № 11. С. 1335.
19. Базь А.И., Зельдович Б.Я., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1966.
20. Дмитриева И.В. // Математические модели прикладной электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 182.
21. Комаров С.А., Баранчугов Ю.А., Зацепин П.М. // РЭ. 2009. Т. 54. № 7. С. 806.
22. Basharin A.A., Mavidis C., Kafesaki M. et al. // Phys. Rev. B. 2013. V. 87. № 15. P. 155130.