

# ПРИКЛАДНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Г.Д. Богомолов

2014

## Аннотация

Учебное пособие является введением в электродинамику СВЧ и предназначено для студентов старших курсов тех физических специальностей, в которые техника СВЧ входит как существенная часть современных экспериментальных методов исследования. Изложение материала в пособии начинается с уравнений Максвелла и затем последовательно рассматриваются основные методы расчета параметров наиболее часто используемых СВЧ устройств: волноводов, коаксиальных линий, объемных и открытых резонаторов. Рассмотрены вопросы передачи энергии поверхностными волнами и диэлектрическими волноводами. Наиболее сложные математические выкладки в расчетах опущены, а многие из окончательных формул доведены до вида, годного для практического использования. В пособии рассмотрены примеры практического использования СВЧ устройств, а также вопросы связи отдельных устройств между собой. Материал, изложенный в пособии, основан на лекциях, читаемых автором в течении ряда лет студентам 4-го курса ФОПФ МФТИ. Пособие состоит из Введения, 5-ти глав, разбитых на разделы и подразделы, и иллюстрировано рисунками. Имеется список рекомендованной литературы.

## Введение

Электродинамикой называют раздел физики, в котором изучаются свойства электромагнитных (э.-м.) полей, переменных во времени. Э.-м. поля изучаются также в курсах общей и теоретической физики, поэтому в данном курсе будет подразумеваться, что основные законы электродинамики известны.

Хотя в настоящее время трудно представить отсутствие устройств в технике и быту, использующих э.-м. волны, открытие и пионерские исследования электромагнетизма произошли относительно недавно - только в 19-м веке. К наиболее важным этапам этого процесса можно отнести следующие. В 1800 году А. Вольта создает первый химический источник тока. В 1820 году Х.К. Эрстед открывает магнитное действие электрического тока. В 1828 году М.А. Ампер обобщает известные в то время законы электродинамики и закрепляет ряд важных терминов (в том числе "ток" и "напряжение"). В том же году Г.С. Ом формулирует закон электрического тока, носящий с тех пор его имя, и вводит понятие сопротивления. В 1831 году М. Фарадей открывает индуцированные токи, а в 1832 году Дж. Генри открывает самоиндукцию. В 1833 году Э.Х. Ленц формулирует закон направления индуцированного электрического тока. В 1841 году Дж.П. Джоуль изучает тепловое действие электрического тока. И, наконец, в 1866 году Дж.К. Максвелл выдвигает электромагнитную теорию, объединяющую электрические, магнитные и световые явления. В 1888 году Г. Герц подтверждает электромагнитную теорию Максвелла, экспериментальным путем обнаружив электромагнитные волны. В 1890-х годах во многих странах проводится интенсивная (для того времени) работа как по созданию элементов для приема и передачи электромагнитных волн, так и опыты по беспроводной связи с их помощью (А.С. Попов -1893 год). В 1896 году Г. Маркони берет патент на систему связи с помощью электромагнитных волн и передающих антенн и эту дату удобно принять за начало практического освоения электромагнитной энергии.

Как видно, понимание существования электромагнитного излучения на основе научного описания его свойств пришло к человечеству довольно поздно - по сравнению со временем существования цивилизации. Однако, трудно переоценить значение самого факта существования электромагнитного поля для жизни на Земле. Прежде всего, практически вся энергия, поступающая на поверхность Земли, приходит к нам от нашей звезды - Солнца в виде электромагнитного (светового и теплового) излучения мощностью около  $10^{16}$  Вт. Кроме того, свет и тепло являются основными средствами ориентации как животных, так и растений в пространстве, а для зеленых растений - еще и фактором самого их ежедневного существования.

Электромагнитные явления по своим проявлениям очень разнообразны. Это постоянный ток, радиоволны, инфракрасное, видимое и ультрафиолетовое излучение, рентгеновские лучи, гамма-лучи. Однако, несмотря на разнообразие их внешних проявлений, они отличаются друг от друга только частотой изменения поля со временем и классифицируют электромагнитные поля именно по этому параметру. Частоту ( $f$ ) измеряют в герцах (Гц) - числе периодов в секунду, а в расчетах часто пользуются угловой частотой ( $\omega$ ), которая есть число радианов в секунду и  $\omega = 2\pi f$ .

Как известно, э.-м. поле, переменное во времени, распространяется от источника в виде излучения - электромагнитной волны. Длина плоской монохроматической э.-м. волны в вакууме связана с частотой соотношением  $\lambda = c/f$ , где  $c$  - скорость света, которая, согласно специальной теории относительности, одинакова в любой системе ко-

ординат. Заметим, что в настоящее время скорость света в вакууме принята за эталон:  $c = 299792458$  м/с (точно)  $\approx 3 \cdot 10^{10}$  см/с. Независимость скорости света от скорости системы координат, в которой проводятся наблюдения, является определяющим преимуществом этого выбора.

Электромагнитное излучение разделяют по частотам (или длинам волн) на ряд областей.

1. Радиоволны. Частота от постоянного тока (0 Гц) до  $3 \cdot 10^{11}$  Гц, длина волны – от  $\infty$  до 1 мм.
2. Инфракрасное (ИК) излучение. Частота – от  $3 \cdot 10^{11}$  Гц до  $3 \cdot 10^{14}$  Гц, длина волны – от 1 мм до  $10^{-2}$  мм = 1 мкм = 10000 Å.
3. Видимый свет (оптический диапазон). Длина волны – от  $\sim 10000$  Å до  $\sim 4000$  Å.
4. Ультрафиолетовое (УФ) излучение. Длина волны – от 4000 Å до  $\sim 100$  Å. Диапазон длин волн от 1000 Å до  $\sim 100$  Å иногда выделяют как вакуумно-ультрафиолетовую область (ВУФ), поскольку в этой области почти все вещества являются практически непрозрачными.
5. Рентгеновские лучи. Длина волны – от  $\sim 100$  Å до  $\sim 0,01$  Å.
6. Гамма-лучи или жесткое рентгеновское излучение. Длина волны – меньше 0,01 Å.

Такое разбиение э.-м. волн на области существует по историческим и отчасти практическим причинам. Границы между этими областями являются, естественно, не совсем четкими. Достаточно четко выделен видимый диапазон, поскольку он определяется спектральной чувствительностью человеческого глаза и в этой области человек не только может заметить присутствие света и оценить его интенсивность, но по цвету судить о его спектральном составе. Инфракрасное излучение, которое было зарегистрировано в 1800 году У. Гершелем, человек может обнаружить кожным покровом (например, ладонью) по теплу, распространяющемуся от достаточно сильно нагретых тел, но спектральный состав таким образом он выяснить не в состоянии.

С появлением и развитием квантовой механики в начале 20-го столетия стало ясно, что электромагнитному полю, кроме волновой, следует приписать и квантовую природу, причем энергия кванта электромагнитного поля – фотона – пропорциональна частоте. В диапазоне радиоволн квантовыми свойствами излучения во многих случаях можно пренебречь, поскольку энергия кванта мала по сравнению с энергией, характерной для связи частиц в веществе. Заметным образом квантовый характер э.-м. поля начинает проявляться при переходе от инфракрасного к более коротковолновому излучению. В световой и ультрафиолетовой областях квантовые явления становятся существенными – например, фотоэффект наблюдается у большинства веществ. В области же рентгеновских и гамма-лучей квантовые свойства э.-м. поля нужно учитывать в подавляющем числе явлений. Заметим, что после открытия в 1895 году проникающего излучения В.К. Рентгеном исторически сложилось так, что рентгеновским излучением называют излучение, получаемое при бомбардировке металлической мишени высоковольтным электронным пучком, а термин "гамма-лучи" чаще используют в ядерной физике и физике элементарных частиц, например, для излучения, испускаемого при

ядерных процессах, космического излучения, излучения, получаемого с помощью ускорителей частиц высокой энергии. Однако такое терминологическое разбиение по происхождению излучения не является слишком строгим, хотя при энергиях фотонов около МэВ и выше привычней термин "гамма-излучение".

Заметим, что в рентгеновском и более коротковолновом диапазонах вместо частоты  $F$  или длины волны  $\lambda$  излучение удобно характеризовать энергией фотона согласно известному соотношению  $E_{ph} = h F$  (где  $h = 6,626 \cdot 10^{-27}$  эрг·с - постоянная Планка), поскольку в актах взаимодействия фотон ведет себя как частица. Энергию фотона обычно предпочитают выражать в электрон-вольтах (эВ), где  $1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Дж - энергия, которую набирает электрон при ускорении при разности потенциалов 1 В. Энергией фотона вместо длины волны часто пользуются в спектроскопии видимого, инфракрасного и более длинноволновых диапазонов, поскольку уровни энергий в веществе также измеряют в энергетических единицах. Полезно помнить, что энергии фотона 1 эВ соответствует длина волны излучения 1,24 мкм.

В этом курсе электродинамики мы будем изучать свойства э.-м. волн в области радиочастот и рассматривать только волновые свойства э.-м. поля.

Поскольку радиоволны занимают очень широкий спектр частот, то эта область, в свою очередь, разбита на ряд диапазонов.

1. Сверхдлинные волны (СДВ):  $\lambda \geq 10$  км.
2. Длинные волны (ДВ):  $\lambda = 10$  км – 1 км.
3. Средние волны (СВ):  $\lambda = 1$  км – 100 м.
4. Короткие волны (КВ):  $\lambda = 100$  м – 10 м.
5. Ультракороткие волны (УКВ):  $\lambda = 10$  м – 1 м.

Эти пять диапазонов э.-м. волн обычно называют радиочастотными. На радиочастотах большинство устройств, создающих, воспринимающих и преобразующих э.-м. колебания, имеют характерные размеры, много меньшие длины волны колебания. Во всех точках таких устройств фаза э.-м. волны имеет практически одно и то же значение, поскольку время, затрачиваемое волной на прохождение устройства, мало по сравнению с периодом колебания. Поля такого типа называют квазистационарными. В большинстве случаев при расчете устройств и цепей на радиочастотах можно пользоваться не прямыми характеристиками э.-м. поля – напряженностью электрического ( $\vec{E}$ ) и магнитного ( $\vec{H}$ ) полей, а связанными с ними величинами – током ( $I$ ) и напряжением ( $U$ ) в цепи. Такие расчеты - область обычной радиотехники.

Диапазон радиоволн с длиной волны меньше 1 м называется диапазоном сверхвысоких частот (СВЧ). Размеры многих устройств и цепей в СВЧ диапазоне сравнимы с длиной волны колебаний. Фазы э.-м. волн при их распространении в таких устройствах могут существенно изменяться от точки к точке, а наложение волн (интерференция) приводит к тому, что результирующее э.-м. поле имеет, вообще говоря, достаточно сложную структуру, в значительной мере определяемую геометрией устройства или цепи. Задача электродинамики СВЧ состоит в расчете э.-м. полей в СВЧ устройствах и цепях, причем, в отличие от обычной радиотехники, в этих расчетах существенным образом

учитывается волновой характер поля, в частности, изменение фазы распространяющихся волн. Для описания э.-м. поля в СВЧ диапазоне обычно пользуются векторами напряженности электрического и магнитного полей.

Диапазон СВЧ разделяется на ряд поддиапазонов, которые несколько отличаются друг от друга как методами расчета, так и конструкцией используемых устройств.

Эти поддиапазоны следующие:

1. Дециметровый (ДВ):  $\lambda = 1 \text{ м} - 10 \text{ см}$ .
2. Сантиметровый (СМ):  $\lambda = 10 \text{ см} - 1 \text{ см}$ .
3. Миллиметровый (ММ):  $\lambda = 1 \text{ см} - 1 \text{ мм}$ .
4. Субмиллиметровый (СММ):  $\lambda \leq 1 \text{ мм}$ .

Последний, субмиллиметровый поддиапазон является граничным между СВЧ диапазоном и инфракрасными волнами и он был освоен в последнюю очередь. Те исследователи, которые продвигались в этот диапазон со стороны СВЧ волн, предпочитали называть его субмиллиметровым (СММ), а при освоении со стороны инфракрасного диапазона - его часто называли далекими инфракрасными (ДИК) волнами. За границу между обычными инфракрасными (ИК) и ДИК волнами можно условно принять  $\lambda \simeq 30 \text{ мкм}$ . В последние 20 лет этот диапазон продолжает интенсивно осваиваться и его часто называют терагерцовым (ТГц) диапазоном.

Поскольку частоты в диапазоне СВЧ велики, то их измеряют в производных единицах: 1 МГц (мегагерц) =  $10^6$  Гц, 1 ГГц (гигагерц) =  $10^9$  Гц, 1 ТГц (терагерц) =  $10^{12}$  Гц.

Для полноты картины в следующих двух таблицах приведены "приставки" для производных единиц, принятые для упрощения записи больших и малых величин.

#### "Приставки" к большим величинам

Множитель	Приставка	Символ лат.	Символ рус.	Комментарии
10	дека	da	дк	от дека – "10"по-гречески
$10^2$	гекто	h	г	от гекатон – "100"по-гречески
$10^3$	кило	k	к	от хилиои – "1000"по-гречески
$10^6$	мега	M	М	от мегас – "огромный"по-гречески
$10^9$	гига	G	Г	от гигас – "гигантский"по-гречески
$10^{12}$	тера	T	Т	от терас – "исполин"по-гречески
$10^{15}$	пета	P	П	от пента – "5"по-гречески
$10^{18}$	экза	E	Е	от хекс – "6"по-гречески
$10^{21}$	зетта	Z	З	от sette – "7"по-итальянски
$10^{24}$	йотта	Y		от otto – "8"по-итальянски

## "Приставки" к малым величинам

Множитель	Приставка	Символ лат.	Символ рус.	Комментарии
$10^{-1}$	деци	d	д	от decimus – "10" по-латыни
$10^{-2}$	санци	c	с	от centum – "100" по-латыни
$10^{-3}$	милли	m	м	от mille – "1000" по-латыни
$10^{-6}$	микро	$\mu$	мк	от микрос – "малый" по-гречески
$10^{-9}$	нано	n	н	от нанос – "карлик" по-гречески
$10^{-12}$	пико	p	п	от picos – "немного" по-испански
$10^{-15}$	фемто	f	фм	от femten – "15" по-датски
$10^{-18}$	атто	a	ат	от atten – "18" по-датски
$10^{-21}$	зепто	z		от sept – "7" по-гречески
$10^{-24}$	йокто	y		от окто – "8" по-гречески

Наиболее широко СВЧ в диапазонах от дециметрового до миллиметрового используют в радиолокации и, вообще говоря, своим развитием и освоением новых частотных диапазонов техника СВЧ обязана прежде всего и оборонным и гражданским применениям этой области техники. С радиолокацией тесно связана техника связи на СВЧ. Специфика связи на СВЧ заключается в том, что СВЧ волны могут распространяться практически только в пределах прямой видимости, поэтому для дальней передачи сигналов СВЧ приходится использовать радиорелейные станции и дополнительные передающие антенны. Однако, с другой стороны, СВЧ волны могут проникать через ионосферу Земли, и поэтому на СВЧ осуществляется связь с космическими объектами. Как гражданская, так и военная авиация сейчас немыслимы без наземных и бортовых радиолокационных систем. Радиолокатор стал также необходимой частью судовых и портовых систем. Все чаще радиолокационные системы используются и на наземном транспорте, существенно повышая удобство вождения и безопасность.

В последние двадцать лет СВЧ техника широко вошла и в повседневную деятельность людей. Связь, в том числе и через системы искусственных спутников Земли, мобильные телефоны, компьютеры с тактовой частотой до нескольких ГГц, спутниковая навигация, системы идентификации, устройства для СВЧ нагрева, спутниковый мониторинг поверхности земли и многое другое основано на тех СВЧ исследованиях и разработках, которые проводились во всем мире, начиная с 30-х годов прошлого столетия.

Кроме чисто технических приложений, СВЧ широко применяются при научных исследованиях.

Прежде всего, методики с использованием сверхвысоких частот являются мощным инструментом исследований в фундаментальной физике исследования вещества. Атомы, ионы, молекулы имеют, как известно, разнообразные собственные частоты колебаний, определяемые как свойствами самих этих частиц, так и наличием связи между ними в веществе. Значительная, а во многих случаях и наиболее информативная часть этих частот лежит в СВЧ диапазоне и особенно это касается сложных молекул (в частности, биологических). При исследованиях в СВЧ полях получают информацию как о параметрах отдельных молекул и атомов, так и о коллективных свойствах веществ в конденсированном состоянии. В многих случаях полезную информацию о свойствах вещества можно существенно избавиться от посторонних факторов, если охладить это веще-

ство до гелиевых (около 4 К) или более низких температур. Частоты вблизи максимума теплового излучения при гелиевых температурах лежат в СВЧ диапазоне. Поэтому без внешнего воздействия в веществе остаются практически только СВЧ уровни возбуждения и исследования в этой области частот дают чрезвычайно ценную информацию о физике вещества.

Одним из интенсивно развивающихся разделов науки и техники является физика плазмы, что связано, в частности, с проблемой получения управляемой термоядерной реакции. В физике плазмы СВЧ используются как для определения параметров плазмы - ее диагностики, так и непосредственно для нагрева плазмы. В частности, измерения плотности плазмы наиболее эффективно проводятся вблизи плазменной частоты, которая для плазмы с параметрами, наиболее важными для применений, лежит в диапазоне от сантиметровых до субмиллиметровых волн. Для нагрева плазмы, удерживаемой магнитными полями, до термоядерных температур, эффективно используются мощные источники миллиметрового излучения.

Техника СВЧ во многом определила успешное развитие методов ускорения элементарных частиц до высоких энергий, используемых как основной инструмент исследования в ядерной физике и физике элементарных частиц. Для получения больших напряженностей полей (до 1 МВ/см), требуемых для эффективного ускорения элементарных частиц (обычно электронов или протонов) до энергий вплоть до сотен ГэВ используют мощные - до 100 и более МВт в импульсе - генераторы или усилители сантиметрового, дециметрового или метрового диапазонов.

В последнее время бурно развивается новая область физики - радиоастрономия, существенно расширившая возможности изучения процессов во Вселенной. Эта область науки с технической стороны тесно связана с радиолокацией и, естественно, в радиоастрономии методы и техника СВЧ используются очень широко. Развитие радиоастрономических методов исследования позволило "заглянуть" в недоступные для наземной оптической астрономии области пространства, изучить далекие и во многих случаях экзотические объекты - звезды, туманности, галактики, скрытые от оптики пылевыми образованиями. Для повышения углового разрешения наблюдения деталей далеких объектов используются связанные через сеть точного единого времени комплексы радиотелескопов, удаленные друг от друга на тысячи и десятки тысяч километров. Компактные радиотелескопы выводятся на околоземные орбиты, что позволяет полностью избавиться от влияния земной атмосферы на результаты наблюдения. В последнее время радиоастрономические наблюдения позволили не только получить новую информацию о звездных объектах, но и существенно продвинуться в понимании общей космологической картины — динамики образования и развития Вселенной. Одним из впечатляющих шагов радиоастрономии явилось открытие в 1965 году (А. Пензиас и Р. Вильсон) реликтового излучения Вселенной в коротковолновой части миллиметрового диапазона. Это излучение — тепловое с измеренной температурой 2,725 К — заполняет все доступное наблюдениям пространство Вселенной и является тем электромагнитным излучением, которое возникло через некоторое время после образования Вселенной после "Большого взрыва", но из-за доплеровского сдвига частоты при расширении Вселенной его спектр переместился в терагерцовый диапазон. Тщательные исследования свойств реликтового излучения, проводимые радиотелескопами, в том числе и со спутников, позволяют получать уникальную космологическую информацию — о возрасте Вселенной, динамике ее расширения, о видах материи во Вселенной и многое другое.



Курс "Прикладная электродинамика" включает в себя методы расчета линий передач СВЧ, колебательных систем и некоторые вопросы измерения сверхвысокочастотных полей и параметров СВЧ цепей. Курс ориентирован в основном на студентов тех физических специальностей, в которых техника СВЧ является одним из инструментов экспериментальных исследований. Математический аппарат, который используется для теоретического рассмотрения и расчетов, подразумевает знание студентами основ высшей математики - дифференциального и интегрального исчисления, векторного анализа, методов решения дифференциальных уравнений и т.п.

# Глава 1

## Основные соотношения в электродинамике

### 1.1 Уравнения Максвелла в вакууме и материальных средах

Электромагнитное (э.-м.) поле описывается линейными уравнениями, выведенными в середине 19-го века Дж. К. Максвеллом обобщением экспериментальных данных. Если э.-м. поле рассматривается в вакууме, то в уравнения Максвелла входят следующие величины:  $\vec{h}$  — вектор напряженности магнитного поля,  $\vec{e}$  — вектор напряженности электрического поля,  $\rho = de/dV$  — плотность электрических зарядов,  $\vec{j} = \rho\vec{v}$  — плотность электрического тока, где  $\vec{v}$  — скорость движения зарядов.

Выпишем уравнения Максвелла для вакуума, или, как их иногда называют, микроскопические уравнения Максвелла.

1. Первое уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{h} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (1.1)$$

можно трактовать как дифференциальную формулировку закона полного тока: магнитное поле появляется в том случае, когда есть электрический ток (обусловленный движением зарядов), а также, если электрическое поле изменяется во времени.

Второе уравнение:

$$\operatorname{rot} \vec{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

как дифференциальную формулировку закона электромагнитной индукции Фарадея: при изменении магнитного поля во времени появляется вихревое электрическое поле.

Третье уравнение:

$$\operatorname{div} \vec{e} = 4\pi \rho \quad (1.3)$$

выражает тот факт, что электрические заряды также являются источником электрического поля.

Четвертое уравнение:

$$\operatorname{div} \vec{h} = 0 \quad (1.4)$$

говорит, в частности, о том, что магнитных зарядов в природе не наблюдается.

Из уравнений Максвелла (1.1) и (1.3) можно получить уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad , \quad (1.5)$$

выражающее тот факт, что заряды, движение которых приводит к появлению тока, подчиняются закону сохранения электрического заряда.

Система уравнений (1.1–1.5) линейна как по отношению к пространственным координатам, так и ко времени, что во многих случаях существенно упрощает их решения.

Уравнения Максвелла позволяют определить возбуждение поля неподвижными или движущимися зарядами. Влияние же поля на движение зарядов определяется независимым уравнением. А именно, сила, действующая на заряд  $e$ , определяется уравнением Лоренца:

$$\vec{F} = e\vec{e} + \frac{e}{c} \cdot [\vec{v} \vec{h}] \quad . \quad (1.6)$$

Основным физически измеримым свойством поля является его способность воздействовать на заряды и токи. Измерив, как движется заряд в поле, можно, в принципе, определить и величину и направление поля. Дополнительно отметим, что согласно (1.6) электрические силы, действующие на заряды, в большинстве случаев значительно превышают магнитные, которые существенны только для частиц, движущихся с релятивистскими скоростями.

Если рассматривается э.-м. поле в среде, а не в вакууме, то необходимо учитывать, что поле влияет на движение зарядов, имеющих в среде, как свободных, так и связанных - например, в атомах и молекулах. Таким образом, для точного описания поля в среде уравнения Максвелла (1.1–1.4) необходимо совместно решать с уравнением движения (1.6), т.е. в уравнении (1.1) плотность тока  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{e}, \vec{h})$ , а в уравнении (1.3) –  $\rho = \rho(\vec{e}, \vec{h})$ . В результате, полное поле в среде является суперпозицией полей, внешних по отношению к среде, и полей, вызванных наличием имеющих в полном поле зарядов.

Однако, такой подход в рамках классической физики дает правильные результаты только для некоторых случаев рассмотрения э.-м. поля в среде, например, если среда является полностью ионизированной. Однако, как известно, поведение заряженных частиц как в атомах и молекулах, так и в твердых телах и жидкостях определяется, строго говоря, законами квантовой механики.

Основываясь на экспериментальных фактах, среди веществ выделяют диэлектрики, в которых мало свободных зарядов, а основную массу вещества составляют нейтральные частицы – атомы или(и) молекулы, в которых связаны отрицательный и положительный заряды. Другой широкий класс веществ – магнетики, характеризующихся наличием замкнутых микроскопических токов, которых можно рассматривать как элементарные магнитные диполи – к ним можно отнести орбитальные и спиновые магнитные моменты частиц вещества. Среды, как диэлектрические, так и магнитные со значительным количеством свободных зарядов называют проводниками. Несколько в стороне

от этих сред находятся сверхпроводники, макроскопические свойства которых определяются квантовым поведением единого ансамбля частиц. Все классы веществ резко не разграничены и часто перекрываются друг с другом, т.е., например, диэлектрики могут иметь магнитные свойства, но рассмотрение этих классов веществ по отдельности позволяет описать достаточно единым образом поля в средах.

В подавляющем числе случаев микроскопическое (сравнимое с атомным масштабом) распределение э.-м. поля, а также движение индивидуальных частиц среды под влиянием поля не рассматривают — так же как в статистической физике, в частности, так же проводят временное усреднение по хаотическим движениям частиц среды. Для дальнейшего описания поля в среде вводятся усредненные по "физически малому объему" как характеристики поля, так и плотность и скорость зарядов в среде. Под "физически малым объемом" обычно понимается объем, содержащий достаточно большое число частиц среды, но малый по сравнению с характерным размером пространственных неоднородностей.

Несмотря на значительное упрощение задачи описания полей в среде при таком усреднении, общих методов для совместного описания полей и частиц в произвольной среде не существует. Однако, в значительном числе случаев имеют дело со средами, которые подчиняются законам термодинамики, которая развита для равновесных состояний. Проводимое далее рассмотрение э.-м. свойств сред касается, в основном, термодинамически равновесной ситуации. При этом, в частности, из рассмотрения исключаются среды с резким, по сравнению с временным ходом изменения внешнего поля, изменением ее свойств.

Усредним формально все величины в уравнениях Максвелла (1.1–1.4) по физически малому объёму, обозначив при этом  $\vec{e} = \vec{E}$ ,  $\vec{h} = \vec{B}$ . Заметим, что в усредненных уравнениях Максвелла  $\vec{E}$  называют вектором электрического поля, а  $\vec{B}$  — вектором магнитной индукции.

Усредненные уравнения имеют вид:

$$\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad , \quad (1.7)$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad , \quad (1.8)$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \bar{\rho} \quad , \quad (1.9)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad , \quad (1.10)$$

а уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad . \quad (1.11)$$

Усредненные поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  определяются через решения уравнений Максвелла с источниками в виде усредненных плотности тока  $\vec{j}$  и плотности заряда  $\bar{\rho}$ . При таком

формальном усреднении влияние полей на заряды явно не учитывается и физический смысл полученных усредненных величин можно выяснить только при конкретном рассмотрении среды, в частности, отдельно введенных выше классов веществ. При этом существенным является то обстоятельство, что на микроскопическом уровне электрические и особенно магнитные свойства вещества определяются квантовыми законами и влияние внешних электромагнитных полей часто рассматривается как возмущение. Поэтому в уравнениях Максвелла для сред предпочитают перейти от усредненных зарядов и токов к связанным с ними величинам — дипольному и магнитному моментам.

Сделаем это сначала для диэлектриков, считая их изотропными.

Если диэлектрик в среднем не заряжен, то

$$\int_V \bar{\rho} dV = 0 \quad , \quad (1.12)$$

откуда из-за произвольности объёма  $V$  диэлектрика следует, что среднюю плотность можно записать в виде дивергенции некоторого вектора, например,

$$\bar{\rho} = -\operatorname{div} \vec{P} \quad . \quad (1.13)$$

Подставив (1.13) в третье уравнение Максвелла (1.9), получим:

$$\operatorname{div} (\vec{E} + 4\pi \vec{P}) = 0 \quad . \quad (1.14)$$

Принято обозначать

$$\vec{E} + 4\pi \vec{P} = \vec{D} \quad , \quad (1.15)$$

и вектор  $\vec{D}$  называют электрической индукцией, которая связана со средним электрическим полем согласно формуле:

$$\vec{D} = \tilde{\varepsilon} \vec{E} = (1 + 4\pi\kappa) \vec{E} \quad . \quad (1.16)$$

Коэффициент  $\tilde{\varepsilon}$  — диэлектрическая проницаемость, которая является функцией термодинамического состояния сред и при этом для постоянного поля  $\tilde{\varepsilon}$  всегда больше единицы. Коэффициент  $\kappa$  называют диэлектрической восприимчивостью.

Тогда третье уравнение Максвелла без сторонних зарядов записывается в широко распространенной форме

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} (\tilde{\varepsilon} \vec{E}) = 0 \quad . \quad (1.17)$$

Взаимное влияние зарядов в среде и электромагнитного поля проявляется также в первом уравнении Максвелла (1.7), где в правой части записана усредненная плотность токов в среде. Чтобы связать эту плотность с введенной выше поляризацией диэлектрика, применим операцию  $\operatorname{div}$  к обеим частям уравнения (1.7) и получим:

$$\operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -4\pi \operatorname{div} \vec{j} \quad . \quad (1.18)$$

Магнитное поле в это соотношение не входит, поскольку оператор  $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ .

Далее, продифференцировав по времени уравнение (1.14) и, используя коммутативность операторов  $\text{div}$  и  $\partial/\partial t$ , а также уравнение непрерывности (1.11) и соотношение (1.13), приходим к равенству:

$$\text{div} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -4\pi \text{div} \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) . \quad (1.19)$$

Из этого дифференциального соотношения и сравнения с третьим уравнением Максвелла (1.9) следует, что в диэлектрической среде первое уравнение Максвелла можно записать в виде:

$$\text{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 . \quad (1.20)$$

Величину

$$\vec{j}_{sh} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.21)$$

часто называют плотностью тока смещения, поскольку этот ток не сопровождается переносом зарядов различных знаков, а вызывается их взаимным смещением в изменяющемся от времени электрическом поле.

Покажем теперь, что введенный выше вектор  $\vec{P}$  можно считать дипольным моментом единицы объема диэлектрика.

Начнем с физической картины поляризации диэлектрика в электрическом поле. При наличии электрического поля противоположные заряды в нейтральных частицах диэлектрика под действием силы Лоренца (1.6) расходятся, образуя элементарные диполи. Элементарный электрический дипольный момент связан с напряженностью внешнего электрического поля в месте расположения диполя линейным соотношением:

$$\vec{p} = e \vec{r} = \alpha \vec{e} , \quad (1.22)$$

где  $\alpha$  – коэффициент электрической поляризуемости отдельной частицы вещества. Линейность  $\vec{p}(\vec{e})$  обычно нарушается в электрических полях, сравнимых с межмолекулярными.

Формула (1.22) следует непосредственно из уравнения Лоренца.

После усреднения микроскопических диполей по физически малому объёму весь объем диэлектрика  $V$  можно рассматривать как диполь, и, исходя из определения диполя, полный дипольный момент можно записать как

$$\vec{P}_0 = \int_V \vec{r} \bar{\rho} dV , \quad (1.23)$$

где интегрирование проводится по объёму, ограниченному поверхностью вне диэлектрика, где  $\bar{\rho} = 0$ .

С учетом соотношений (1.23) и (1.13) проведем последовательно ряд простых интегральных преобразований:

$$\vec{P}_0 = \int_V \vec{r} \bar{\rho} dV = - \int_V \vec{r} \text{div} \vec{P} dV = - \int_V \text{grad} (\vec{r} \vec{P}) dV + \int_V \vec{P} \text{div} \vec{r} dV . \quad (1.24)$$

Первый интеграл в сумме (1.24) преобразуется в поверхностный по той же поверхности, что и в (1.23) и тогда:

$$\int_V \text{grad}(\vec{r} \vec{P}) dV = \int_S (\vec{r} \vec{P}) d\vec{S} = 0 \quad , \quad (1.25)$$

а второй интеграл в сумме (1.24):

$$\int_V \vec{P} \text{div} \vec{r} dV = \int_V \vec{P} dV = \vec{P}_0 \quad (1.26)$$

и это доказывает, что введенный вектор  $\vec{P}$  можно назвать дипольным электрическим моментом единицы объёма диэлектрика.

Заметим, что этот усредненный по физически малому объёму дипольный момент является, вообще говоря, функцией положения, т.е.  $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r})$ . В частном случае, когда  $\vec{P} = \text{const}$ , средняя плотность заряда в объёме диэлектрика  $\bar{\rho} = 0$ . Однако при этом допустимо наличие некомпенсированных поверхностных зарядов на границе диэлектрика.

При справедливости выражения (1.22) дипольный электрический момент единицы объёма, так же как и элементарный диполь, пропорционален электрическому полю (среднему!):

$$\vec{P} = \kappa \vec{E} \quad . \quad (1.27)$$

Диэлектрическая восприимчивость  $\kappa$  (см.(1.16)) отличается от коэффициента поляризуемости  $\alpha$  в (1.22), поскольку, во-первых, в (1.22) стоит локальное поле (в месте расположения частицы), а не среднее, а, во-вторых, в коэффициенте  $\kappa$  можно учесть способность диполей в веществе к ориентации вдоль электрического поля.

Заметим, что дипольный электрический момент единицы объёма  $\vec{P}$  имеет более общий смысл, чем усредненные по объёму элементарные диполи вида (1.22). В частности, величину  $\vec{P}$  используют и для описания сегнетоэлектриков, где поляризация вызывается квантовыми эффектами (но в тензорном выражении из-за обычно имеющейся анизотропии).

Рассмотрение усредненных уравнений Максвелла в магнетиках начнем со следующего замечания.

При выводе усредненного первого уравнения Максвелла в диэлектриках в виде (1.20) к обеим частям уравнения (1.7) применялась операция  $\text{div}$ . При этой операции, когда  $\text{div rot} = 0$ , из этого уравнения исключается не только магнитное поле, но и вихревая составляющая вектора плотности тока  $\vec{j}$ , которую принято обозначать как

$$\vec{j}_M = c \text{rot} \tilde{M} \quad , \quad (1.28)$$

где  $\tilde{M}$ , как будет показано далее, представляет собой магнитный момент единицы объёма тела.

Вихревая составляющая вектора плотности тока, как нетрудно убедиться, подставив (1.28) в уравнение непрерывности (1.11), не сопровождается локальным изменением плотности зарядов во времени, то есть  $\partial \bar{\rho} / \partial t = 0$ . Таким образом, ток, формирующий

магнитный момент, представляют собой движение зарядов как целое по замкнутой траектории. К вихревым токам следует отнести замкнутые токи такого рода в объеме тела, в частности, молекулярные и атомные токи, а также токи, эквивалентные магнитным спиновым моментам частиц. Все эти токи и определяют магнитные свойства среды.

Подставив выражение (1.28) в первое уравнение Максвелла (1.7) с учетом (1.20), имеем

$$\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_M = 4\pi \operatorname{rot} \vec{M} \quad (1.29)$$

и, объединив слева под оператором  $\operatorname{rot}$  магнитное поле и магнитный момент, получим запись первого уравнения Максвелла и для диэлектрической, и для магнитной среды:

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad , \quad (1.30)$$

где вектор

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} \quad (1.31)$$

называют **напряженностью** магнитного поля, что вызвано скорее историческими причинами, и эта усредненная характеристика поля является реальным магнитным полем, действующим на заряженную частицу только вне магнитной среды, в частности, в вакууме.

Магнитную индукцию обычно связывают с напряженностью магнитного поля коэффициентом  $\tilde{\mu}$ , называемым магнитной проницаемостью среды, и из (1.31) имеем:

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} = \tilde{\mu} \vec{H} \quad . \quad (1.32)$$

При этом, в отличие от диэлектрической проницаемости, магнитная проницаемость среды может быть меньше единицы, но всегда  $\tilde{\mu} > 0$ .

Коэффициент

$$\chi = \frac{\tilde{\mu} - 1}{4\pi} \quad (1.33)$$

называют магнитной восприимчивостью.

Физическая интерпретация вектора  $\vec{M}$  выясняется следующим образом.

По определению, магнитный момент  $\vec{M}_V$  тела конечных размеров равен:

$$\vec{M}_V = \frac{1}{2c} \cdot \int_V [\vec{r} \cdot \vec{j}_M] dV \quad . \quad (1.34)$$

Подставив в (1.34) выражение (1.28), а затем проинтегрировав это по любому объёму, выходящему за пределы тела, где  $\vec{j}_M = 0$ , после несложного интегрального преобразования получим:

$$\vec{M}_V = \frac{1}{2c} \cdot \int_V [\vec{r} \cdot \vec{j}_M] dV = \int_V \vec{M} dV \quad . \quad (1.35)$$

Последнее равенство доказывает, что  $\vec{M}$  является магнитным моментом единицы объема среды.



Причины появления магнитного момента в среде определяются, строго говоря, законами квантовой механики. Магнетики принято разделять на несколько групп, к основным из которых относятся: диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики, антиферромагнетики. Из этих групп наиболее просто с позиций классической электродинамики качественно и до некоторой степени количественно объясняется наличие диамагнетизма, как возбуждение вихревым электрическим полем по формуле (1.6)) круговых атомных (молекулярных) токов при включении или изменении магнитного поля. Возникающий магнитный момент направлен против внешнего магнитного поля и отсюда магнитная проницаемость диамагнетиков  $\tilde{\mu} < 1$ . В парамагнетиках относительно небольшой магнитный момент, возникающий в атомах (молекулах) чисто из-за квантовомеханических причин направлен по магнитному полю, магнитная проницаемость парамагнетиков небольшая и  $\tilde{\mu} > 1$ . Квантовомеханический механизм формирования значительных элементарных магнитных моментов в ферромагнетиках определяется свойствами кристаллической решетки твердого тела и при наличии внешнего магнитного поля магнитные моменты стремятся выстраиваться вдоль поля  $\tilde{\mu} \gg 1$ . Более подробно и обоснованно магнетизм излагается в специализированных курсах и учебниках.

Таким образом, так называемые **материальные соотношения**, связывающие величины  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  в случае изотропной линейной среды без дисперсии имеют вид:

$$\vec{D} = \tilde{\varepsilon} \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \tilde{\mu} \vec{H} \quad , \quad (1.36)$$

где  $\tilde{\varepsilon}$  — диэлектрическая, а  $\tilde{\mu}$  — магнитная проницаемость среды.

В общем случае материальные соотношения могут иметь более сложный, в том числе и интегральный, вид (для нелинейных, анизотропных сред, сред с поглощением и т.п.). В частности, для анизотропных сред в материальные соотношения (1.36) вместо скаляров  $\tilde{\varepsilon}$  и  $\tilde{\mu}$  входят тензоры  $\varepsilon_{ik}$  и  $\mu_{ik}$ .

Выпишем уравнения Максвелла при  $\tilde{\varepsilon}(t) = \text{const}$  и  $\tilde{\mu}(t) = \text{const}$  со сторонними токами  $\vec{j}$  и зарядами  $\rho$ .

Первое уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{\tilde{\varepsilon}}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad . \quad (1.37)$$

Второе уравнение:

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\tilde{\mu}}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad . \quad (1.38)$$

Третье уравнение:

$$\text{div} (\tilde{\varepsilon} \vec{E}) = 4\pi \rho \quad . \quad (1.39)$$

Четвертое уравнение:

$$\text{div} (\tilde{\mu} \vec{H}) = 0 \quad . \quad (1.40)$$

Иногда полезно представить уравнения Максвелла в следующей интегральной форме:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \tilde{\varepsilon} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{4\pi}{c} \cdot I \quad , \quad (1.41)$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \tilde{\mu} \vec{H} \cdot d\vec{S} \quad , \quad (1.42)$$

$$\oint_S \tilde{\varepsilon} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi q \quad , \quad (1.43)$$

$$\oint_S \tilde{\mu} \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0 \quad . \quad (1.44)$$

Выражения (1.41) и (1.42) получены интегрированием (1.37) и (1.38) по поверхности  $\Sigma$ , ограниченной линией  $L$ , с применением теоремы Стокса. Выражения (1.43) и (1.44) получены интегрированием (1.39) и (1.40) по объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ , с применением теоремы Гаусса-Остроградского. Величина  $I$  — полный ток через поверхность  $\Sigma$ , а  $q$  — полный заряд внутри объема  $V$ . Символ  $\partial/\partial t$  заменен на  $d/dt$ , поскольку интеграл уже не является функцией координат.

Для однозначного решения уравнений Максвелла в ограниченной области пространства, в том числе и при наличии физически резкой границы между различными материальными средами, необходимо получить соответствие между полями с двух сторон границы области. Из уравнений (1.41) и (1.42), записанных для поверхности  $\Sigma$ , ограниченной прямоугольником  $L$ , длинные стороны которого примыкают с двух сторон к границе раздела, нетрудно получить предельным переходом, что тангенциальные компоненты полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  при пересечении границы должны быть непрерывны, то есть:

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)} \quad , \quad H_t^{(1)} = H_t^{(2)} \quad . \quad (1.45)$$

Заметим, что второе из этих условий выполняется только при отсутствии так называемых поверхностных токов на границе раздела (см. далее раздел 1.4).

Для решения уравнений Максвелла при постановке конкретной электродинамической задачи, согласно общим правилам решения дифференциальных уравнений математической физики используют граничные условия, начальные условия, а также условия поведения э.-м. полей на бесконечности. Несколько подробнее эти вопросы будут рассмотрены в следующем разделе.

Выпишем теперь известные энергетические характеристики э.-м. поля.

Плотность электромагнитной энергии:

$$w = \frac{1}{8\pi} (\tilde{\varepsilon} \vec{E}^2 + \tilde{\mu} \vec{H}^2) \quad (1.46)$$

и, соответственно, энергия поля, запасенная в объеме  $V$ :

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (\tilde{\varepsilon} \vec{E}^2 + \tilde{\mu} \vec{H}^2) dV \quad . \quad (1.47)$$

Плотность и направление потока электромагнитной энергии определяется вектором Пойнтинга:

$$\vec{s} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}] \quad , \quad (1.48)$$

а полный поток через поверхность  $S$ :

$$\Sigma = \frac{c}{4\pi} \int_S [\vec{E} \vec{H}] d\vec{S} \quad . \quad (1.49)$$

Заметим, что перенос энергии электромагнитной волной определяется, с одной стороны, напряженностью среднего электрического поля  $\vec{E}$ , а с другой стороны, напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$ , которая, вообще говоря, не является напряженностью среднего магнитного поля.

Важной характеристикой э.-м. поля является мощность, отдаваемая полем в другие виды энергии — тепловую, кинетическую и прочие, а также при обратном переходе этих видов энергии в электромагнитную. Объемная плотность этой мощности:

$$p = \vec{j} \vec{E} \quad , \quad (1.50)$$

и, соответственно, полная мощность в объеме  $V$ :

$$P = \int_V \vec{j} \vec{E} dV \quad . \quad (1.51)$$

При этом, если  $P > 0$ , то поле отдает энергию, а если  $P < 0$ , то другие виды энергии переходят в электромагнитную.

Заметим, что энергия магнитного поля не может непосредственно переходить в другие виды энергии (и обратно), а только через посредство электрического поля.

Уравнение, определяющее закон сохранения энергии для электромагнитного поля, в дифференциальной формулировке имеет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + p = -\operatorname{div} \vec{s} \quad , \quad (1.52)$$

что несложно получить из уравнений Максвелла (1.37) и (1.38).

При отсутствии токов ( $p = 0$ ) выполняется условие

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{s} = 0 \quad , \quad (1.53)$$

аналогичное условию непрерывности (1.11).

Заметим, что в общем случае, без конкретного описания свойств среды, можно только утверждать, что  $\vec{s}$  (1.48) является плотностью потока электромагнитной энергии, а о соотношении между слагаемыми в левой части равенства (1.52) ничего сказать нельзя.

Однако, для многих практически важных случаев, например, в стационарных линейных средах, линиях передач и устройствах с неизменными границами, устройствах СВЧ с электронными пучками и т.п. плотности энергии и плотности мощности взаимодействия можно поставить в соответствие четкий физический смысл.

В большинстве практически важных приложений можно использовать и формулу для общего баланса энергии э.-м. поля в виде:

$$\frac{dW}{dt} + P + \Sigma = 0 \quad . \quad (1.54)$$

Все приведенные выше формулы записаны в системе единиц CGS. В этой системе напряженности электрического и магнитного поля имеют одинаковую размерность, что логично, поскольку они определяют единое электромагнитное поле, и это обстоятельство упрощает анализ результатов при расчетах. Однако при численных расчетах электрические и магнитные величины чаще выражают в практических единицах (система СИ), в которых проградуированы все измерительные приборы. Приведем соотношения между основными электромагнитными единицами в системе CGS и практической системе: 1 CGS единица заряда =  $(3 \cdot 10^9)^{-1}$  Кл (кулон), 1 CGS единица тока  $(3 \cdot 10^9)^{-1}$  А (ампер), 1 CGS единица напряжения = 300 В (вольт), 1 CGS единица сопротивления =  $9 \cdot 10^{11}$  Ом, 1 CGS единица напряженности магнитного поля = 1 Э (эрстед) =  $10^{-4}$  Тл (тесла).

Законы и свойства электромагнитного поля можно описывать не только через электрические и магнитные вектора. Альтернативным способом является описание поля с помощью векторного  $\vec{A}$  и скалярного  $\Phi$  потенциалов. Введение потенциалов упрощает решение некоторых задач, в основном при рассмотрении э.-м. полей в вакууме. Магнитное и электрическое поле выражаются через потенциалы следующим образом:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad , \quad (1.55)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \Phi \quad , \quad (1.56)$$

и при этом автоматически удовлетворяются уравнения Максвелла (1.8) и (1.10).

Чтобы удовлетворялись остальные уравнения Максвелла, требуется, чтобы потенциалы удовлетворяли так называемым волновым уравнениям (см. далее раздел 1.3):

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad , \quad (1.57)$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad (1.58)$$

и дополнительному условию

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad . \quad (1.59)$$

Представлением э.-м. поля через потенциалы часто пользуются в теории поля, квантовой механике и квантовой электродинамике.

В электродинамике СВЧ чаще используют так называемый вектор Герца  $\vec{\Pi}$ , связанный с потенциалами следующими формулами:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \quad , \quad (1.60)$$

$$\Phi = -\text{div} \vec{\Pi} \quad , \quad (1.61)$$

и при этом дополнительное условие (1.59) выполняется автоматически.

Вектор Герца используют в основном при решении задач возбуждения волн в свободном пространстве и линиях передач.

## 1.2 Комплексные обозначения в электродинамике

В электродинамике СВЧ чаще всего имеют дело с э.-м. полями, изменяющимися во времени по гармоническому закону, то есть колеблющимися с фиксированной частотой  $\omega$ . Для амплитуд таких полей целесообразно ввести комплексные обозначения, решать уравнения Максвелла в комплексном виде, а к действительным величинам по необходимости переходить в окончательных формулах. Комплексную амплитуду, соответствующую реальной физической величине, например, компоненте электрического или магнитного поля, можно определить как

$$A(t) = \operatorname{Re} \{ A(\omega) e^{-i\omega t} \} . \quad (1.62)$$

Комплексная амплитуда может быть представлена также в виде:

$$A(\omega) = |A(\omega)| e^{i\Phi} , \quad (1.63)$$

где  $|A(\omega)|$  — ее модуль, равный реальной амплитуде величины  $A(t)$ , а  $\Phi$  — фаза комплексной амплитуды, определяющая фазовый сдвиг реальной величины относительно фиксированного момента времени.

При дальнейшем изложении курса почти всегда будут использоваться комплексные амплитуды, обозначаемые просто  $E$ ,  $H$ , и т.д. Реальные поля, зависящие от времени, будут обозначаться  $E(t)$ ,  $H(t)$ , и т.д.

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд получаются из уравнений (1.37) – (1.40) прежде всего заменой оператора дифференцирования по времени на множитель  $-i\omega$ .

Материальные уравнения в самом простом виде (1.36) справедливы, вообще говоря, только для постоянных во времени полей. В быстропеременных полях все среды в той или иной степени обладают временной дисперсией, то есть установление электрической или магнитной поляризации вещества не успевает следовать за изменением электромагнитного поля. Поэтому, для электрической поляризации, например, наиболее общее линейное соотношение между  $\vec{D}(t)$  и  $\vec{E}(t)$  можно записать в интегральном виде

$$\vec{D}(t) = \vec{E}(t) + \int_0^{\infty} f(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau , \quad (1.64)$$

где  $f(\tau)$  - функция времени, определяемая свойствами среды.

Аналогичное соотношение существует и для магнитных сред.

Для комплексных амплитуд эту связь, получаемую из (1.64) преобразованием Фурье, можно записать в том же виде, что и в (1.36):

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E} , \quad (1.65)$$

где

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) \cdot e^{i\omega\tau} d\tau \quad (1.66)$$

— комплексная величина.

В таком же комплексном виде можно записать и магнитную проницаемость среды  $\mu(\varepsilon)$ , и, окончательно:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \quad , \quad (1.67)$$

$$\mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega) \quad (1.68)$$

где мнимые части этих величин определяют потери в среде — положительные или отрицательные (в случае активных сред).

Таким образом, по виду изменятся только два первых уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} + ik\varepsilon \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad , \quad (1.69)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} - ik\mu \vec{H} = 0 \quad , \quad (1.70)$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число.

Материальные уравнения (1.36) по виду не изменятся :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad . \quad (1.71)$$

Следует заметить, что диэлектрическая и магнитная проницаемости  $\varepsilon$  и  $\mu$  в уравнениях Максвелла, записанных в комплексном виде для монохроматических процессов, должны быть взяты именно на частоте  $\omega$ .

Заметим дополнительно, что свойства сред по отношению к переменным электромагнитным полям определяются не только их временной дисперсией, но и пространственной, под которой понимается нелокальная зависимость поляризуемости от переменного электромагнитного поля, распространяющегося внутри среды в виде волны. В случае заметной пространственной дисперсии представление проницаемостей в виде комплексных величин теряет смысл. Однако для большинства материалов и условий, относящихся к СВЧ диапазону, пространственную дисперсию можно не учитывать.

Для примера рассмотрим случай, когда среда обладает проводимостью, то есть в ней имеются заряды, которые могут относительно свободно двигаться в среде под действием полей. Такой типичной средой является металл. Плотность тока в металле связана с электрическим полем соотношением, определяемым законом Ома (в дифференциальной форме):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad , \quad (1.72)$$

где  $\sigma$  — удельная проводимость металла.

Если ток в среде определяется только электрическим полем, то подставив (1.72) в (1.69), имеем:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -ik\varepsilon \vec{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} = -ik\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) \vec{E} \quad . \quad (1.73)$$

Из (1.73) следует, что величину  $\varepsilon + i(4\pi\sigma)/\omega$  можно назвать комплексной диэлектрической проводимостью проводящей среды, где выделена омическая часть. Величина  $\varepsilon$  (вообще говоря, также комплексная) определяется электрическими свойствами среды, зависящими от смещения связанных зарядов — электрической поляризуемости.

Если э.-м. поле немонахроматическое, то для перехода к комплексным амплитудам его раскладывают на мономатические составляющие — в ряд или интеграл Фурье.

Выразим через комплексные амплитуды энергетические характеристики поля (1.46—1.53), которые определяются квадратами и произведениями мгновенных значений полей и токов, приняв во внимание, что во многих случаях требуется вычислить только среднее значение этих характеристик за период колебания  $T = 2\pi/\omega$ .

Среднее по периоду от произведения двух комплексных амплитуд имеет достаточно простой вид. Если  $a(t)$  и  $b(t)$  — две вещественные функции, то по определению:

$$\overline{a(t)b(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T a(t)b(t) dt \quad . \quad (1.74)$$

Легко видеть, что это среднее выражается через комплексные амплитуды  $a$  и  $b$  следующим образом:

$$\overline{a(t)b(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{ab^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{a^*b\} \quad . \quad (1.75)$$

Прежде чем перейти к выражениям для энергетических характеристик э.-м. поля в средах, заметим, что анализ электродинамических характеристик систем только из энергетических соотношений не всегда приводит к однозначному результату. Например, из закона сохранения э.-м. энергии (1.53) для полей, произвольно меняющихся со временем, нельзя сделать корректных выводов об абсолютном значении запасенной энергии в системе, поскольку из этого выражения ее можно определить только с точностью до постоянной. Тем более выводов о величине запасенной энергии нельзя сделать для мономатических процессов с комплексными амплитудами полей, поскольку они описывают стационарное состояние системы — поля через период колебаний возвращаются к своим прежним значениям. Для вычисления запасенной энергии нужно рассматривать переходные процессы — нарастания или затухания колебаний в системе, используя уравнения Максвелла.

Как следует из приведенного выше примера (1.73) среды с комплексной диэлектрической проницаемостью — металла, наличие мнимой составляющей в проницаемости приводит к поглощению энергии в среде.

Приведем вывод энергетических соотношений для э.-м. полей в средах непосредственно из уравнений Максвелла.

Для этого используем уравнения (1.69) и (1.70), а также комплексно-сопряженные к ним. Умножим (1.69) на  $\vec{H}^*$ , а комплексно-сопряженное к (1.70) — на  $-\vec{E}$  и сложим их, а затем, используя тождество векторного анализа:

$$\vec{H}^* \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}^* = \operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}^*] \quad , \quad (1.76)$$

получим комплексное скалярное равенство:

$$-\operatorname{div} \vec{\sigma}_c = \bar{p}_\epsilon + \bar{p}_\mu + p_e + p_m + 2i(\bar{w}_\epsilon - \bar{w}_\mu) \quad , \quad (1.77)$$

где

$$\vec{\sigma}_c = \frac{c}{8\pi} \cdot [\vec{E} \vec{H}^*] \quad , \quad (1.78)$$

— комплексный вектор Пойнтинга,

$$p_e = \frac{1}{2} \cdot \vec{j}^e \vec{E}, \quad p_m = \frac{1}{2} \cdot \vec{j}^m \vec{H}, \quad (1.79)$$

— комплексные плотности мощности взаимодействия полей с токами,

и вещественные величины:

$$\bar{p}_\varepsilon = \frac{\omega \varepsilon''}{8\pi} \cdot |\vec{E}|^2 - \text{плотность мощности диэлектрических потерь}, \quad (1.80)$$

$$\bar{p}_\mu = \frac{\omega \mu''}{8\pi} \cdot |\vec{H}|^2 - \text{плотность мощности магнитных потерь}, \quad (1.81)$$

$$w_\varepsilon = \frac{\omega \varepsilon'}{16\pi} \cdot |\vec{E}|^2 - \text{плотность электрической энергии}, \quad (1.82)$$

$$w_\mu = \frac{\omega \mu'}{16\pi} \cdot |\vec{H}|^2 - \text{плотность магнитной энергии}. \quad (1.83)$$

Введем интегральные энергетические величины в объеме  $V$ , ограниченным поверхностью  $S$ . С помощью теоремы Гаусса-Остроградского равенство (1.77) несложно преобразовать в комплексное интегральное соотношение:

$$-\Sigma_c = \bar{P}_\varepsilon + \bar{P}_\mu + P_e + P_m + 2i(W_\varepsilon - W_\mu), \quad (1.84)$$

Выделив действительную часть в (1.84), получим закон сохранения энергии, усредненной по периоду колебаний монохроматических полей и этот закон получен непосредственно из уравнений поля:

$$-\bar{\Sigma}_c = \bar{P}_\varepsilon + \bar{P}_\mu + \bar{P}_e + \bar{P}_m. \quad (1.85)$$

Слева в (1.85) стоит поток энергии, поступающий (с учетом знака "минус") в объем  $V$  через поверхность  $S$ . Эта энергия распределяется между потерями в диэлектрике ( $\bar{P}_\varepsilon$ ), магнетике ( $\bar{P}_\mu$ ) и поглощается сторонними электрическими ( $\bar{P}_e$ ) и магнитными ( $\bar{P}_m$ ) токами.

Выражение (1.85), естественно, справедливо и тогда, когда электромагнитная энергия выделяется в объеме, как происходит в генераторах электромагнитного излучения — электронных, полупроводниковых или лазерных. Некоторые (или все) слагаемые в левой части равенства (1.85) становятся отрицательными и тогда поток энергии изменяет знак.

Обратим внимание на то, что в законе сохранения средней энергии отсутствует энергия, запасенная в поле ( $W_e$  и  $W_m$ ) — в соответствии с причинами, изложенными несколько выше.

Мнимую часть (1.84):

$$-\text{Im}\Sigma_c = \text{Im}(P_e + P_m) + 2\omega(W_\varepsilon - W_\mu), \quad (1.86)$$

иногда называют теоремой о реактивной мощности. Она иногда полезна для расчетов, но четкого физического смысла не имеет.

Понятно, что при решении уравнений Максвелла для монохроматических полей нет необходимости использовать начальные условия. Граничные условия (1.45), применяющиеся к э.-м. полям, позволяют решать задачи электродинамики, которые обычно



разбивают на два класса: внутренние задачи — в ограниченной части пространства, и внешние задачи — когда поле вычисляется в безграничном пространстве вне некоторой поверхности. Для обоих классов задач в электродинамике доказана теорема единственности, которая утверждает, что найденное каким-то способом решение с граничными условиями (1.45) является единственно возможным и другого решения искать не надо. При доказательстве единственности решения приходится делать дополнительные предположения. Первое из них состоит в наличии электрических и магнитных потерь в каждой точке рассматриваемого объема. Эти потери могут считаться бесконечно малыми, но их формальное введение позволяет исключить из решения внутренних задач незатухающие со временем поля, которые в рамках классической электродинамики не имеют физического содержания. Для единственности решения внешних задач нужно, во-первых, предполагать, все возбуждающие токи находятся на конечном расстоянии, и, во-вторых, полная энергия всех исходящих волн на бесконечности стремится к нулю. Для выполнения второго предположения можно, так же как и во внутренней задаче, считать среду распространения, в том числе и вакуум, слабо поглощающей. Все эти предположения, обеспечивающие строгость математической формулировки теоремы единственности, являются, с другой стороны, в рамках классической электродинамики вполне физически обоснованными.

### 1.3 Электромагнитные волны

Уравнения распространения э.-м. волн следуют непосредственно из уравнений Максвелла и они записываются в наиболее простом виде в том случае, когда среда, в которой волны распространяются, является однородной, изотропной и не имеющей дисперсии, т.е. при  $\tilde{\varepsilon} = \text{const}$  и  $\tilde{\mu} = \text{const}$ . Тогда из уравнений (1.37) и (1.38) можно исключить один из векторов поля —  $\vec{E}(t)$  или  $\vec{H}(t)$ .

Применив оператор  $\text{rot}$  к уравнению (1.37) и используя уравнение (1.38), получим уравнение:

$$\text{rot rot } \vec{H}(t) + \frac{1}{c^2} \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \vec{H}(t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \cdot \text{rot } \vec{j}(t) \quad , \quad (1.87)$$

а сделав ту же самую операцию в другой последовательности - применив оператор  $\text{rot}$  к уравнению (1.38) и используя уравнение (1.37), получим уравнение:

$$\text{rot rot } \vec{E}(t) + \frac{1}{c^2} \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \vec{E}(t)}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c^2} \tilde{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{j}(t)}{\partial t} \quad . \quad (1.88)$$

Эти уравнения, левые части которых одинаковы по виду, называют волновыми, поскольку их решениями являются поля, периодически повторяющиеся в пространстве. В частности, вдоль одной из координат решения (1.87) и (1.88) записываются в виде  $F(t \pm x \sqrt{\varepsilon\mu}/c)$ , где  $F$  - произвольная функция, определяющая волны, распространяющиеся в положительном (знак "минус") и отрицательном (знак "плюс") направлении по оси  $x$ .

Если записать эти уравнения для той части пространства, где отсутствуют источники поля ( $\vec{j} = 0$ ,  $\rho = 0$ ), то получим, например, для  $\vec{E}(t)$ :

$$\text{rot rot } \vec{E}(t) + \frac{1}{c^2} \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \vec{E}(t)}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (1.89)$$

Уравнение (1.89) можно записать в другом виде, используя операторное тождество  $\text{rot rot} \equiv -\Delta + \text{grad div}$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Если учесть, что  $\vec{E}(t)$  удовлетворяет третьему уравнению Максвелла с равной нулю правой частью, то (1.89) преобразуется к более используемому при расчетах виду, и часто именно его называют волновым уравнением:

$$\Delta \vec{E}(t) - \frac{1}{c^2} \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \vec{E}(t)}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (1.90)$$

Для монохроматических колебаний уравнения (1.87) и (1.88) приобретают вид:

$$\Delta \vec{H} + K^2 \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \text{rot} \vec{j} \quad , \quad (1.91)$$

$$\Delta \vec{E} + K^2 \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \frac{\omega}{c} \mu \vec{j} \quad , \quad (1.92)$$

а уравнение (1.90) без правой части записывается как

$$\Delta \vec{E} + K^2 \vec{E} = 0 \quad , \quad (1.93)$$

где  $K = \omega/c \cdot \sqrt{\varepsilon\mu}$  — так называемое волновое число в среде. При этом, как нетрудно показать, вид уравнения (1.93) не изменится, если  $\varepsilon$  и  $\mu$  и, соответственно,  $K$ , считать комплексными и зависящими от частоты  $\omega$  (см.(1.67) и (1.68)).

Таким образом, при решении задач о распространении э.-м. волн в среде вместо уравнений Максвелла можно совместно решить уравнения (1.93) и

$$\text{div} \varepsilon \vec{E} = 0 \quad , \quad (1.94)$$

определив электрическое поле (или аналогичным образом магнитное), а далее из уравнений Максвелла (1.7) или (1.8) найти другое поле. В частности, к волновому уравнению удобно переходить при использовании декартовых, цилиндрических и сферических координат, когда векторное волновое уравнение можно разделить на три скалярных. Наиболее просто оператор Лапласа записывается в декартовой системе координат:

$$\Delta_{xyz} U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad . \quad (1.95)$$

Таким образом, любая декартова компонента (скаляр  $U$ ) э.- м. поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta_{xyz} U + K^2 U = 0 \quad . \quad (1.96)$$

В простейшем случае, когда  $U$  зависит только от одной координаты, например, от  $z$ , частным решением уравнения (1.96) является

$$U = U_0 \exp\{\pm iKz\} \quad . \quad (1.97)$$

При действительном  $K$  выражение (1.97) описывает скалярную волну постоянной амплитуды, распространяющуюся в положительном (знак "плюс" в показателе экспоненты) или отрицательном (знак "минус") направлении по оси  $z$  (при временной зависимости  $\exp\{-i\omega t\}$ !).

На примере этой волны кратко напомним об основных характеристиках линейного волнового процесса. От записи (1.97) перейдем к реальной физической величине

$$U(z, t) = \operatorname{Re} \{ U_0 \exp\{\pm iKz - i\omega t\} \} . \quad (1.98)$$

Скалярная комбинация  $\Phi = \pm Kz - \omega t$  в (1.98) называется фазой волны. В фиксированный момент времени  $t$  величина  $U(z, t)$  распределена вдоль оси  $z$  по синусоиде, пространственный период  $\Lambda = 2\pi/K$  которой называют длиной волны в среде. Волновое число  $K$ , как уже отмечалось выше, может, вообще говоря, зависеть от частоты, и функции  $K(\omega)$  или  $\omega(K)$  описывают дисперсионные характеристики волны.

Фазовая скорость  $v_\Phi = \omega/K$  определяет скорость перемещения постоянной фазы вдоль оси  $z$  и, вообще говоря,  $v_\Phi$  может принимать значения от  $\infty$  до  $-\infty$ . В частности, если вдоль оси  $z$  передвигать датчик величины  $U$  со скоростью, равной фазовой, то его показания будут постоянными, поскольку в этом случае  $\Phi = Kz - \omega t = \text{const}$ .

Если колебание монохроматическое, то соответствующая монохроматическая волна не переносит сигнала, поскольку периоды волны ничем не отличаются друг от друга. Источником сигнала может быть только модулированное (по амплитуде, по фазе или по частоте) колебание, и сигнал от точки к точке переносится группой волн с отличающимися частотами — так называемым "волновым пакетом". Скорость распространения такого пакета, вообще говоря, отличается от фазовой скорости монохроматической волны. Как предельный случай скорости распространения сигнала, образованного группой волн с частотами, бесконечно мало отличающимися от частоты  $\omega_0$ , вводится понятие групповой скорости монохроматической волны  $v_g = d\omega/dK$  — при  $\omega = \omega_0$ . Поскольку  $v_g$  — скорость передачи сигнала, то  $|v_g| \leq c$ , где  $c$  — скорость света.

Из уравнения Гельмгольца (1.93) и уравнений Максвелла нетрудно получить, что в однородной изотропной среде могут распространяться векторные э.- м. волны вида:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\vec{K}\vec{r}} , \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cdot e^{i\vec{K}\vec{r}} , \quad (1.99)$$

где  $\vec{E}_0$  и  $\vec{H}_0$  — постоянные векторы.

Волны такого типа называют обобщенными плоскими волнами, или просто плоскими волнами, если волновой вектор  $\vec{K}$  — вещественный.

Подставив (1.99) в уравнения (1.69) и (1.70), получим:

$$k\varepsilon\vec{E}_0 = -[\vec{K}\vec{H}_0] , \quad k\mu\vec{H}_0 = [\vec{K}\vec{E}_0] , \quad (1.100)$$

откуда следует, во-первых, что вектора  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$  и  $\vec{K}$  взаимно перпендикулярны; во-вторых:

$$\vec{K}^2 = K'^2 - K''^2 + 2i\vec{K}'\vec{K}'' = \varepsilon\mu k^2 , \quad (1.101)$$

т.е. вектор может быть вещественным только в среде с вещественными проницаемостями.

Кроме того, если возвести в квадрат любое из уравнений (1.100), то получим соотношение между амплитудами электрического и магнитного полей в обобщенной плоской волне:

$$\vec{E}_0^2 = \frac{\mu}{\varepsilon} \vec{H}_0^2 . \quad (1.102)$$

Если волны распространяются вдоль оси  $z$ , то волновой вектор имеет только одну  $z$ -составляющую:

$$K = K' + iK'' \quad , \quad (1.103)$$

а волны двух поляризаций записываются в более простом виде:

$$E_x = A e^{iKz} \quad , \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A e^{iKz} \quad , \quad (x - \text{поляризация}) \quad (1.104)$$

или

$$E_y = B e^{iKz} \quad , \quad H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} B e^{iKz} \quad , \quad (y - \text{поляризация}) \quad (1.105)$$

или как их две линейные комбинации при комплексных  $A$  и  $B$  – в виде плоских волн эллиптической поляризации с различным направлением вращения векторов поля.

В средах с вещественными проницаемостями в плоских волнах поверхностями равных фаз являются плоскости  $z = \text{const}$ , а соотношения между амплитудами электрического и магнитного полей, длина волны, фазовая и групповая скорости определяются отношением диэлектрической и магнитной проницаемостей среды и электрическое и магнитное поля совпадают по фазе. В частности, при распространении волн в вакууме, где  $\varepsilon = \mu = 1$ , длина волны  $\Lambda = \lambda$ , волновое число в вакууме  $K = k = \omega/c$ , а  $v_{\text{ф}} = v_g = c$ .

Что означает комплексность волнового числа монохроматической волны, легко понять, если рассмотреть плоскую волну вида (1.104) или (1.105), распространяющуюся в среде с поглощением. Подставив  $K$  в виде (1.103) в экспоненциальную часть волны, получим:

$$e^{iKz} = e^{iK'z} \cdot e^{-K''z} \quad , \quad (1.106)$$

откуда видно, что  $K'$  определяет, как обычно, пространственную периодичность волны, а  $K''$  – экспоненциальное затухание поля волны по направлению распространения, вызванное равномерным поглощением энергии волны в среде.

При распространении волн вида (1.99) – под произвольными углами к осям декартовых координат – и при комплексном  $\vec{K}$  фазовый и амплитудный портреты волны могут не совпадать. В частности, плоскости равных фаз и равных амплитуд могут располагаться под углом друг к другу. Такая достаточно сложная картина даже для плоских волн может возникать при прохождении волн через границы сред из разных материалов.

## 1.4 Граничные условия на металле

В электродинамике СВЧ часто встречается ситуация, когда э.-м. поле рассматривается в области, полностью или частично ограниченной металлическими поверхностями. Как известно, металл – хорошо проводящая среда, в которой электроны проводимости могут легко перемещаться под действием электрического поля.

Рассмотрим, какой вид имеют э.-м. волны в металле.

Комплексная диэлектрическая проницаемость металла (см. (1.73)):

$$\varepsilon_m = \varepsilon' + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (1.107)$$

У большинства металлов в СВЧ диапазоне (вплоть до ИК диапазона)

$$\mu \simeq 1 \quad , \quad \frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg |\varepsilon'| \quad , \quad \text{а} \quad \frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg 1 \quad , \quad (1.108)$$

(например, у меди  $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17}$  1/с), и поэтому

$$\varepsilon_m \simeq i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad .(4.3) \quad (1.109)$$

(Заметим, что  $\sigma [\text{с}^{-1}] = 9 \cdot 10^{11} / \rho [\text{Ом} \cdot \text{см}]$ ).

Таким образом, волновое число э.-м. волны в металле

$$K = k \sqrt{\varepsilon} = k \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} (1 + i) = K' + i K'' \quad (1.110)$$

является комплексным, и  $K' = K''$ .

Во многих случаях источники э.-м. поля находятся вне металла. Проникновение э.-м. поля в металл можно рассчитать, рассмотрев нормальное падение плоской волны вида

$$E_x^{(1)} = A e^{ikz} \quad , \quad H_y^{(1)} = A e^{ikz} \quad (z < 0) \quad (1.111)$$

из вакуума на плоскую поверхность ( $z = 0$ ) металла бесконечной толщины ( $z \geq 0$ ). Используя (1.104) и (1.105) и условия (1.45) на границе раздела, нетрудно записать выражения для волны, отраженной от поверхности металла:

$$E_x^{(2)} = -A \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_m} - 1}{\sqrt{\varepsilon_m} + 1} \cdot e^{-ikz} \quad , \quad H_y^{(2)} = A \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_m} - 1}{\sqrt{\varepsilon_m} + 1} \cdot e^{-ikz} \quad (z \leq 0) \quad , \quad (1.112)$$

и волны, прошедшей вглубь металла:

$$E_x^{(3)} = A \cdot \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_m} + 1} \cdot e^{iKz} \quad , \quad H_y^{(3)} = A \cdot \frac{2\sqrt{\varepsilon_m}}{\sqrt{\varepsilon_m} + 1} \cdot e^{iKz} \quad (z \geq 0) \quad , \quad (1.113)$$

Поскольку у большинства металлов  $|\sqrt{\varepsilon_m}| = |n_m| \gg 1$ , то из (1.111) и (1.112) следует, что  $|E_x^{(2)}| \simeq |E_x^{(1)}|$ ,  $|H_y^{(2)}| \simeq |H_y^{(1)}|$ , то есть э.-м. волна отражается от поверхности металла почти полностью. Кроме того, нетрудно показать, что при условии  $|n_m| \gg 1$  прошедшая волна распространяется практически нормально к поверхности металла даже при небольших углах падения первоначальной волны. Таким образом, формулы (1.113) могут описывать структуру э.-м. волны в металле в достаточно общем случае. Из (1.110) и (1.113) видно, что электрическое и магнитное поля в волне спадают вглубь металла по одинаковому экспоненциальному закону, а характерный размер, на который поле проникает в металл,

$$d = \frac{1}{K''} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\lambda c}{\sigma}} \quad , \quad (1.114)$$

или

$$d [\text{см}] = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\rho[\text{Ом}\cdot\text{см}]}{f[\text{Гц}]}} , \quad (1.115)$$

называют толщиной скин-слоя. Из (1.113) следует, что на поверхности металла ( $z = 0$ ) магнитное поле приблизительно в два раза больше, чем в падающей волне, а электрическое поле существенно меньше. Отношение полей на поверхности металла

$$w = \frac{E_x^{(3)}}{H_y^{(3)}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m}} = \frac{1}{n_m} = kd \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad (1.116)$$

называют волновым импедансом, причем обычно  $|w| \ll 1$ .

Во многих случаях можно считать, что энергия э.-м. поля находится в основном вне металла, поскольку СВЧ поле проникает внутрь его на глубину, существенно меньшую длины волны; например, при  $\lambda = 1$  см в меди  $d = 4 \cdot 10^{-5}$  см. Это обстоятельство позволяет существенно упростить решение многих электродинамических задач. Упрощение сводится к тому, что внутри металла поле не рассматривается, а вводятся граничные условия для полей на его поверхности.

Наиболее просто граничные условия вводятся для идеального проводника, у которого по определению:

$$\sigma = \infty, \quad \varepsilon = i\infty, \quad \mu - \text{конечно.} \quad (1.117)$$

Из уравнения  $\text{rot } \vec{H} = -ik\varepsilon \vec{E}$  следует, что при условии (1.117) внутри идеального проводника

$$\vec{E} = 0 , \quad (1.118)$$

поскольку  $\vec{H}$  должно быть конечным. Из уравнения  $\text{rot } \vec{E} = ik\mu \vec{H}$  и условия (1.118) следует, что внутри идеального проводника и

$$\vec{H} = 0 . \quad (1.119)$$

Из условия (1.45) на границе раздела следует, что на поверхности проводника

$$E_t = 0 \quad \text{или} \quad [\vec{n} \vec{E}] = 0 , \quad (1.120)$$

где  $\vec{n}$  — нормаль к поверхности металла, направленная внутрь него.

Как следует из (1.114), при переходе к бесконечной проводимости скин-слой становится бесконечно тонким ( $d \rightarrow 0$ ), и весь ток протекает в этом слое. Для этого предельного случая вводится понятие поверхностной плотности тока

$$\vec{i} = \lim \int_0^\infty \vec{j}(\vec{n} d\vec{r}) \quad \text{при} \quad d \rightarrow 0 . \quad (1.121)$$

При наличии поверхностного тока непрерывность тангенциального магнитного поля на границе раздела (см. (1.45)) формально нарушается (заметим, что это не противоречит физическому, но **микроскопическому** условию (1.45)). Если в первом уравнении Максвелла перейти от объемных величин к поверхностным, то с учетом (1.119) и (1.121) нетрудно получить соотношение между поверхностной плотностью тока и магнитным полем на поверхности

$$[\vec{n} \vec{H}] = -\frac{4\pi}{c} \vec{i} . \quad (1.122)$$

Заметим, что в частном случае падения плоской волны на поверхность идеального проводника наличие тангенциального магнитного поля непосредственно следует из выражения (1.113).

Из уравнения Максвелла (1.8) и условия (1.122) также следует, что согласно самому определению поверхностного тока на поверхности идеального проводника равна нулю и нормальная составляющая магнитного поля, то есть

$$H_n = 0 \quad . \quad (1.123)$$

Условие (1.123) также используют в качестве граничного условия на поверхности идеального проводника.

Граничные условия (1.120) и (1.123) имеют простой вид, поэтому при решении электродинамических задач реальные проводники с достаточно большой проводимостью часто заменяют идеальными проводниками той же геометрии. Такое упрощение граничных условий во многих случаях приводит лишь к незначительному отличию рассчитываемого поля от реального, но существенно упрощает расчет.

В первом приближении влияние конечной проводимости на распределение э.-м. поля можно учесть, воспользовавшись введенным выше соотношением (1.116) между  $E_t$  и  $H_t$  на поверхности проводника. Это отношение справедливо в том случае, когда размеры  $a$  металлического тела существенно превышают толщину скин-слоя и э.-м. волна, проникающая вглубь тела, практически не доходит до другой его границы. Кроме того, поскольку э.-м. поле вблизи поверхности рассматривается в виде суперпозиции плоских волн, тело не должно иметь участков с малыми радиусами кривизны  $\rho$ . Условия

$$a \gg d, \quad \rho \gg d \quad (1.124)$$

определяют границы применимости так называемого сильного скин-эффекта в металле.

Граничные условия при сильном скин-эффекте, введенные М.А. Леонтовичем, на произвольной поверхности записываются в виде:

$$[\vec{n} \vec{E}] = -w [\vec{n} [\vec{n} \vec{H}]] \quad . \quad (1.125)$$

В большинстве электродинамических задач в СВЧ диапазоне конечную (но большую!) проводимость не требуется учитывать при расчете распределения полей, а только для расчета омического нагрева проводника. При этом расчет полей проводится в приближении идеальной проводимости, а полученное из расчета магнитное поле на поверхности металла подставляют в правую часть (1.125), что позволяет с достаточной точностью определить  $E_t$ . Наличие тангенциального электрического поля приводит к появлению направленного вглубь металла потока э.-м. мощности, которая идет на нагрев проводника. Формулу для средней мощности, поглощаемой проводником, для этого случая нетрудно записать, учитывая (1.49) и (1.125):

$$\bar{P} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_S w |H_t|^2 dS \quad . \quad (1.126)$$

Область применения теории сильного скин-эффекта ограничена не только условиями (1.124), но и определенным частотным диапазоном. Ясно, что эта теория неприменима при очень больших частотах, когда становятся существенными квантовые явления,

например, фотоэффект. Однако при увеличении частоты э.-м. колебаний задолго до появления квантовых явлений теория обычного скин-эффекта становится неприменимой из-за того, что длина свободного пробега электронов в металле сначала сравнивается с "классической" толщиной скин-слоя (1.114), а затем и превосходит ее. При этом импульс электромагнитного поля переносится в металле дополнительно перемещающимися электронами. Это случай так называемого аномального скин-эффекта, который при нормальной температуре начинает проявляться в СММ диапазоне, а при низких температурах может играть роль и на более длинных волнах. В условиях аномального скин-эффекта нарушается локальность описания электромагнитного поля в среде и при расчете свойств металла следует учитывать пространственную дисперсию диэлектрической проницаемости.



## Глава 2

# Линии передачи на сверхвысоких частотах

Передача э.-м. энергии от источника к "потребителю", являющаяся одной из основных задач при любом использовании э.-м. излучения, проводится с помощью линий передачи. Линия передачи, которую можно рассматривать как обобщение обычной цепи постоянного или переменного тока на случай любых частот, позволяет с той или иной эффективностью **направлять** э.-м. волну от источника к потребителю. Например, обычная двухпроводная линия постоянного или переменного тока служит для передачи энергии **вдоль проводов (а не по проводам)**. Единственным (достаточным и необходимым) условием передачи э.-м. энергии является наличие составляющей вектора Пойнтинга (1.48) вдоль линии. В двухпроводной линии, как нетрудно вычислить, практически вся э.-м. энергия распространяется в пространстве, окружающем двухпроводную линию, а вектор Пойнтинга направлен от источника к "потребителю".

Возможность эффективной передачи э.-м. вдоль двухпроводной линии даже на достаточно высоких частотах определяется тем, что токи в соседних проводах текут в противоположных направлениях. Поскольку расстояние между проводами существенно меньше длины волны, то э.-м. волны, излучаемые токами в каждом из проводов, имеют противоположные фазы и практически полностью гасят друг друга на некотором расстоянии от линии, в связи с чем двухпроводная линия в стороны излучает слабо.

В диапазоне СВЧ обычно используют линии передачи, поперечные размеры которых сравнимы с длиной волны. Это приводит к тому, что от двухпроводных линий приходится отказаться из-за сильного излучения в стороны. Для того, чтобы избавиться от потерь на излучение, СВЧ энергию передают внутри хорошо проводящих металлических оболочек. К таким линиям передачи СВЧ, в частности, относятся коаксиальные линии, которые широко используются в обычной радиотехнике, а также специфические СВЧ линии передачи – волноводы. К частично экранированным линиям передачи относятся полосковые и щелевые линии, а также диэлектрические волноводы.

В коротковолновой части СВЧ диапазона – на ММ и СММ волнах – в последнее время используют квазиоптические линии передачи. В этих линиях э.-м. энергия передается или вдоль диэлектрических структур – например, внутри диэлектрических труб или стержней ( в оптике их называют световодами), или непосредственно по свобод-

ному пространству, часто с периодической коррекцией фронта э.-м. волны с помощью линз или зеркал – по так называемым квазиоптическим линии передачи. Элементы квазиоптических линий имеют поперечные размеры, во многих случаях существенно превышающие длину волны, и при этом можно достичь неплохой направленности э.-м. излучения в свободном пространстве, что и определяет возможность эффективной передачи энергии.

Следует, однако, заметить, что передача электромагнитного излучения по экранированным или частично экранированным линиям существует не только в СВЧ диапазоне. На радиочастотах к ним можно отнести распространение радиоволн вдоль поверхности Земли с отражением от ионосферы.

В последнее время благодаря интенсивному развитию микро- и нанoeлектроники с использованием технологий, позволяющих изготовить такие линии для передачи сигналов в диапазонах длин волн вплоть до инфракрасных, в микросхемных устройствах используют микрополосковые линии. Оптические световоды с малыми потерями обусловили широкое развитие быстрой связи между компьютерами по всему миру.

Подробное рассмотрение свойств СВЧ линий передачи мы начнем с волноводов.

## 2.1 Волноводы

Волновод представляет собой трубу, вообще говоря, произвольного сечения, стенки которой сделаны из хорошо проводящего металла. Э.-м. энергия распространяется внутри и вдоль волновода.

Большинство электродинамических расчетов СВЧ линий передачи энергии начинают с вычисления собственных волн, то есть с того случая, когда внешние источники э.-м. поля в рассматриваемой области отсутствуют. Для определения полей собственных волн необходимо найти решение уравнений Максвелла без возбуждающих токов.

Собственные волны в волноводе будем искать в предположении, что стенки волновода идеально проводящие, а внутри волновода – вакуум. Начальную часть расчета можно провести, не конкретизируя форму волновода в сечении, а только предполагая, что волновод однороден по продольной оси  $z$ . Поля однородной волны в волноводе можно представить в общем виде:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{\pm i h z} \quad , \quad \vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y) e^{\pm i h z} \quad , \quad (2.1)$$

где  $h$  – продольное волновое число собственной волны в волноводе.

Доказано, что волны в волноводах с бесконечно проводящими стенками разбиваются на две группы: волны, у которых равна нулю продольная компонента  $E_z$  электрического поля – так называемые магнитные волны ( $H$ -волны или  $TE$ -волны), и волны, у которых равна нулю продольная компонента  $H_z$  магнитного поля – электрические волны ( $E$ -волны или  $TH$ -волны). При конечной проводимости стенок возникают так называемые "гибридные" волны, у которых существуют обе продольные компоненты полей, но для обычно используемых в волноводах хорошо проводящих металлов их можно не принимать во внимание.

Если, с учетом этого разбиения, подставить (2.1) в уравнения Максвелла (1.7) и

(1.8), нетрудно получить, что для волн вида (2.1) каждая из поперечных компонент полей  $E_x, E_y, H_x, H_y$  выражается через две продольные компоненты  $E_z$  и  $H_z$ .

Магнитные волны имеют следующие компоненты

$$E_x, E_y, H_x, H_y, H_z \quad . \quad (2.2)$$

Из уравнений Максвелла через  $H_x$  выражаются все остальные компоненты полей магнитной волны:

$$H_x = \frac{ih}{g^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad , \quad H_y = \frac{ih}{g^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad , \quad (2.3)$$

$$E_x = \frac{ik}{g^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad , \quad E_y = -\frac{ik}{g^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad . \quad (2.4)$$

Таким образом, расчет полей магнитных волн в волноводе сводится, по существу, к решению одного уравнения. Продольная компонента  $H_z e^{\pm ikz}$  удовлетворяет уравнению (1.96), из которого легко получить уравнение:

$$\Delta_{xy} H_z + g^2 H_z = 0 \quad (2.5)$$

для распределения продольной составляющей магнитного поля в поперечном сечении волновода. В этом уравнении

$$g = \sqrt{k^2 - h^2} \quad (2.6)$$

– поперечное волновое число в волноводе, а

$$\Delta_{xy} U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (2.7)$$

– двумерный оператор Лапласа.

Граничные условия для  $H_z$  на внутреннем контуре волновода имеют вид:

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \quad , \quad (2.8)$$

что, как нетрудно получить из (2.3, 2.4), эквивалентно условию  $E_t = 0$ .

Электрические волны имеют следующие компоненты:

$$E_x, E_y, E_z, H_x, H_y \quad . \quad (2.9)$$

Все поперечные компоненты полей электрических волн выражаются через продольную компоненту электрического поля  $E_z$  :

$$E_x = \frac{ih}{g^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad , \quad E_y = \frac{ih}{g^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad , \quad (2.10)$$

$$H_x = -\frac{ik}{g^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad , \quad H_y = \frac{ik}{g^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad . \quad (2.11)$$

Продольная компонента  $E_z$  удовлетворяет уравнению:

$$\Delta_{xy} E_z + g^2 E_z = 0 \quad (2.12)$$

с граничным условием на внутреннем контуре волновода:

$$E_z = 0 \quad . \quad (2.13)$$

Уравнения (2.5) и (2.12) имеют нетривиальные решения, удовлетворяющие условиям (2.8) и, соответственно, (2.13), лишь для дискретных значений  $g_s^2$  — собственных значений задач (2.5, 2.8) и (2.12, 2.13); эти решения являются собственными функциями и для каждой из рассматриваемых задач набор собственных значений представляет собой неубывающую последовательность вещественных чисел  $\{g_s^2\}$ . Вообще говоря, собственные значения для электрических и магнитных волн различны, но в исключительных случаях они могут совпадать. Собственные функции совпадать не могут, так как они удовлетворяют различным граничным условиям (2.8) и (2.13).

В результате вычисления всех остальных компонент полей по этим собственным функциям согласно соотношениям (2.3, 2.4) и (2.10, 2.11) получаются собственные (или нормальные) волны в волноводе. Каждая собственная волна, таким образом, имеет определенное распределение компонент полей в поперечном сечении волновода и, соответственно, свое продольное волновое число (см. (2.6)).

Набор собственных значений  $\{g_s^2\}$  при заданной частоте возбуждения волновода можно разделить на две части: те значения  $g_s^2$ , которые удовлетворяют неравенству  $g_s^2 < k^2$ , соответствуют, как следует из (2.1) и (2.6), собственным волнам, которые могут распространяться в волноводе ( $h_s^2 > 0$  и  $\text{Im } h_s = 0$ ); а при условии  $g_s^2 > k^2$  собственные волны не распространяются, а экспоненциально затухают вдоль оси  $z$  ( $h_s^2 < 0$  и  $\text{Re } h_s = 0$ ). Как нетрудно получить из (2.5, 2.8), (2.12, 2.13) и (2.13), нераспространяющиеся волны в среднем не переносят энергии вдоль волновода. Эти волны имеют реактивный характер и существенны, вообще говоря, только в некоторой области вблизи источника. В отличие от рассмотренного выше затухания волн в поглощающей среде (см. (1.106)), затухание нераспространяющихся волн в волноводе не связано с энергетическими потерями. Поля нераспространяющихся волн в волноводе, по существу, являются составляющими "ближнего" поля источника, которое, как известно из теории поля, имеет достаточно сложную структуру около источника даже в свободном пространстве.

Поскольку  $\{g_s^2\}$  представляет собой неубывающую последовательность вещественных чисел, то распространяющимся волнам соответствуют числа из начала этой последовательности. Распространяющаяся собственная волна с минимальным собственным значением называется основной волной волновода, а остальные собственные волны — волнами высших типов. Критическому случаю, когда

$$g_s^2 = k^2 \quad \text{и} \quad h_s = 0 \quad (2.14)$$

соответствует критическая частота

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{g_s c}{2\pi} \quad , \quad (2.15)$$

а соответствующая длина волны в свободном пространстве

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{g_s} \quad (2.16)$$

называется критической длиной волны.

Таким образом, через волновод фиксированного сечения могут проходить э.-м. волны фиксированного типа только с частотами, превышающими критическую.

Из выражения (2.6) определяется волноводная длина волны э.-м. волны:

$$\Lambda_s = \frac{2\pi}{h_s} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - g_s^2}} \quad , \quad (2.17)$$

причем, поскольку  $h_s < k$ , то  $\Lambda_s > \lambda$ .

Из (2.6) определяется также фазовая скорость собственной волны в волноводе:

$$v_\Phi = \frac{\omega}{h_s} = c \left( 1 - \frac{g_s^2}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad (2.18)$$

Из (2.18) видно, что распространяющиеся волны в волноводе имеют фазовые скорости, большие скорости света. На критической частоте фазовая скорость бесконечно велика (в приближении бесконечной проводимости стенок волновода!).

Групповая скорость волны в волноводе, естественно, меньше скорости света. Нетрудно получить простое соотношение между групповой и фазовой скоростями волноводной волны:

$$v_\Phi \cdot v_g = c^2 \quad . \quad (2.19)$$

Естественно, что формулы (2.14 – 2.19) справедливы как для магнитных, так и для электрических волн. Картина распространения волноводных волн допускает и качествен-

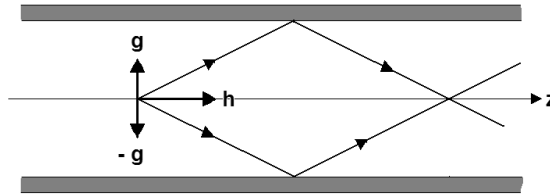


Рис. 2.1: Волны Бриллюэна в двумерном волноводе

ную лучевую трактовку, которая была предложена Бриллюэном. Распространение волн в волноводе в упрощенном двумерном варианте легко понять из рис. 2.1. Волноводную волну можно представить как суперпозицию двух плоских волн с одним и тем же продольным вектором  $\vec{h}$  и противоположными по направлению поперечными векторами  $\vec{g}$ . Эти волны, которые называют волнами Бриллюэна, попеременно отражаются от стенок

волновода, формируя собственную волну волновода. При уменьшении частоты длина продольного вектора уменьшается и угол падения волн Бриллюэна на стенку волновода приближается к нормали. Нормальное падение волны соответствует критической частоте.

Перейдем теперь к рассмотрению собственных волн в волноводах конкретных сечений.

### 2.1.1 Системы волн в прямоугольном и круглом волноводах

На практике наиболее распространены прямоугольные волноводы, сечение которых – прямоугольник, и круглые (или цилиндрические), сечение которых – круг. Эти волноводы, во-первых, достаточно просты в изготовлении, и, во-вторых, э.-м. поля в таких волноводах рассчитываются аналитически.

Как следует из п. 2.1, для вычисления полей Е-волн в прямоугольном волноводе нужно, прежде всего, решить уравнение (2.12) с граничным условием (2.13) на внутреннем контуре волновода.

Уравнение (2.12) в декартовых координатах решается известным методом разделения переменных или методом Фурье. Поскольку (2.12) – уравнение двумерных собственных колебаний, то оно разделяется по координатам  $x$  и  $y$  на два уравнения с двумя независимыми поперечными волновыми числами  $g_x$  и  $g_y$ , причем

$$g_x^2 + g_y^2 = g^2 \quad . \quad (2.20)$$

Из граничного условия (2.13) следует, что собственными значениями этих уравнений являются:

$$g_x = \frac{m\pi}{a} \quad , \quad g_y = \frac{n\pi}{b} \quad , \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (2.21)$$

Собственные значения полного поперечного волнового числа в прямоугольном волноводе:

$$g_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad , \quad (2.22)$$

а продольную компоненту электрического поля запишем в виде:

$$E_z(x, y) = C \cdot \frac{g_{mn}^2}{k^2} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \quad , \quad (m, n = 1, 2, \dots). \quad (2.23)$$

По продольной компоненте (2.23) вычисляются, согласно (2.10, 2.11), все остальные компоненты собственных Е-волн. Собственная или нормальная волна в волноводе характеризуется, таким образом, двумя целыми числами  $m$  и  $n$  (индексами) и обычно записывается в виде  $E_{mn}$  или  $ТН_{mn}$  (тип волны). Каждый тип волн имеет свои поперечные волновые числа по осям  $x$  и  $y$  (соответственно, полное поперечное волновое число (2.20)) и свое распределение полей в поперечном сечении.

Выпишем выражения для распределения полей основной электрической волны  $E_{11}$

в прямоугольном волноводе:

$$E_x = C \cdot \frac{ih}{k^2} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \cdot e^{ihz} , \quad (2.24)$$

$$E_y = C \cdot \frac{ih}{k^2} \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \cdot e^{ihz} , \quad (2.25)$$

$$E_z = C \cdot \frac{g^2}{k^2} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \cdot e^{ihz} , \quad (2.26)$$

$$H_x = -C \cdot \frac{i}{k} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \cdot e^{ihz} , \quad (2.27)$$

$$H_y = -C \cdot \frac{i}{k} \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \cdot e^{ihz} , \quad (2.28)$$

для поперечного волнового числа:

$$g = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \quad (2.29)$$

и для критической длины волны:

$$\lambda_c = 2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{-\frac{1}{2}} . \quad (2.30)$$

Аналогичным образом рассчитываются в прямоугольном волноводе и магнитные волны (H-волны). Продольная компонента магнитного поля магнитной волны  $H_{mn}$  (или  $TE_{mn}$ ) имеет вид:

$$H_z = C \cdot \frac{g}{k} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{ihz} , \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) , \quad (2.31)$$

а полное поперечное волновое число выражается, как и у E-волн, формулой (2.22).

Основной магнитной волной в прямоугольном волноводе при  $a > b$  является волна  $H_{10}$ , которая имеет следующие составляющие э.-м. полей:

$$H_x = -iC \cdot \frac{h}{k} \cdot \sin \frac{\pi}{a} x \cdot e^{ihz} , \quad (2.32)$$

$$H_y = 0 , \quad (2.33)$$

$$H_z = C \cdot \frac{g}{k} \cdot \cos \frac{\pi}{a} x \cdot e^{ihz} , \quad (2.34)$$

$$E_x = 0 , \quad (2.35)$$

$$E_y = iC \cdot \sin \frac{\pi}{a} x \cdot e^{ihz} , \quad (2.36)$$

поперечное волновое число:

$$g = \frac{\pi}{a} , \quad (2.37)$$

и критическую длину волны:

$$\lambda_c = 2a . \quad (2.38)$$

Для передачи энергии по прямоугольным волноводам обычно используют именно волну  $H_{10}$ . Ее критическая длина волны – максимальная среди всех типов волн в прямоугольном волноводе. Для волновода заданного сечения существует диапазон частот,

ограниченный снизу критической частотой волны, а сверху – критической частотой следующей распространяющейся волны (например,  $H_{01}$  или  $H_{20}$ ), в котором только волна  $H_{10}$  является распространяющейся. Если выбрать частоту внутри этого диапазона, то СВЧ энергия будет переноситься только одним типом волны, что существенно облегчает ее дальнейшее использование.

Из выражений (2.32) – (2.38) видно, что фазовая скорость и структура полей волны  $H_{10}$  не зависит от размера  $b$  волновода. Поэтому, в частности, волновод, рассчитанный на передачу энергии на волне  $H_{10}$ , можно делать любой толщины  $b$  без изменения условий продольного распространения волны. Например, если волновод необходимо пропустить через щель, его можно сделать достаточно узким.

Часто, кроме структуры полей внутри волновода, полезно знать, как текут токи по стенкам волновода. Как следует из (1.122), по идеально проводящим стенкам волновода течет поверхностный ток с плотностью:

$$\vec{i} = -\frac{c}{4\pi} [\vec{n}\vec{H}] \quad . \quad (2.39)$$

Видно, что направление тока по стенкам перпендикулярно тангенциальному магнитному полю и, вообще говоря, эти токи можно назвать "собственными токами" волны, хотя этот термин обычно не используют. Там, где протекают токи, должен быть хороший омический контакт, что важно для применений волноводной техники. Заметим, что СВЧ токи на стенках волновода должны замыкаться или сами на себя, или через электрические силовые линии внутри волновода.

Для вычисления полей в круглом волноводе уравнения для полей естественно записывать в цилиндрических координатах  $\varphi$ ,  $r$  и  $z$ . Для распределения продольных составляющих полей такой выбор системы координат приводит к уравнениям Бесселя.

Например, для E-волн:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + g^2 E_z = 0 \quad (2.40)$$

с граничным условием на контуре волновода:

$$E_z = 0 \quad \text{при} \quad r = a \quad . \quad (2.41)$$

Как известно, уравнение (2.40) имеет решение:

$$E_z(\varphi, r) = C J_m(gr) \cos m\varphi \quad , \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad , \quad (2.42)$$

где  $J_m$  – функция Бесселя порядка  $m$ .

Из граничного условия (2.41) следует характеристическое уравнение:

$$J_m(ga) = 0 \quad . \quad (2.43)$$

Если через  $\nu_{mn}$  обозначить  $n$ -й положительный корень уравнения  $J_m(\nu) = 0$ , то решением (2.43) является последовательность собственных поперечных волновых чисел

$$g_{mn} = \frac{\nu_{mn}}{a} \quad , \quad (m = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots) \quad (2.44)$$



для собственных волн типа  $E_{mn}$  в круглом волноводе. Численные значения корней  $\nu_{mn}$  находятся из таблиц.

Поля и волновые числа магнитных волн в круглом волноводе также определяются из уравнения Бесселя вида (2.40) для компоненты  $H_z$  при граничном условии:

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad r = a. \quad (2.45)$$

Поперечное распределение поля  $H_z$  также описывается выражением вида (2.42), но собственные волновые числа волн  $H_{mn}$  находятся из соотношения:

$$g_{mn} = \frac{\mu_{mn}}{a}, \quad (m = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots) \quad (2.46)$$

где  $\mu_{mn}$  –  $n$ -й корень уравнения:

$$J'_m(\mu) = 0. \quad (2.47)$$

Штрих в (2.47) означает производную по аргументу. Численные значения корней  $\mu_{mn}$  также находятся из таблиц.

Необходимо отметить некоторую специфику распространения волн в круглом волноводе по сравнению с прямоугольным. Из-за азимутальной симметрии круглого волновода следует, что азимутально-несимметричные волны ( $m \neq 0$ ) являются "поляризационно" вырожденными, то есть одному и тому же поперечному волновому числу соответствуют два одинаковых распределения поля, но развернутых на  $90^\circ$  в плоскости сечения волновода друг относительно друга ( $\sin m\varphi$  вместо  $\cos m\varphi$  в (2.42)).

Основной электрической волной в круглом волноводе является волна  $E_{01}$ , распределение полей которой запишем в виде:

$$E_r = C \cdot \frac{ih}{k} \cdot J_1(gr) \cdot e^{ihz}, \quad (2.48)$$

$$E_\varphi = 0, \quad (2.49)$$

$$E_z = C \cdot \frac{g}{k} \cdot J_0(gr) \cdot e^{ihz}, \quad (2.50)$$

$$H_\varphi = iC \cdot J_1(gr) \cdot e^{ihz}, \quad (2.51)$$

поперечное волновое число:

$$g = \frac{2,405}{a} \quad (2.52)$$

и критическую длину волны:

$$\lambda_c = 2,613 a. \quad (2.53)$$

Основной магнитной волной в круглом волноводе является волна  $H_{11}$  со следующим

распределением полей:

$$H_r = C \cdot \frac{ih}{k} \cdot \left[ J_0(gr) - \frac{1}{gr} J_1(gr) \right] \cos \varphi \cdot e^{ihz} , \quad (2.54)$$

$$H_\varphi = C \cdot \frac{ih}{k} \cdot \frac{1}{gr} \cdot J_1(gr) \sin \varphi \cdot e^{ihz} , \quad (2.55)$$

$$H_z = C \cdot \frac{g}{k} \cdot J_1(gr) \cos \varphi \cdot e^{ihz} , \quad (2.56)$$

$$E_r = -C \cdot \frac{i}{gr} \cdot J_1(gr) \cdot \sin \varphi e^{ihz} , \quad (2.57)$$

$$E_\varphi = -C \cdot i \cdot \left[ J_0(gr) - \frac{1}{gr} J_1(gr) \right] \cos \varphi \cdot e^{ihz} , \quad (2.58)$$

поперечным волновым числом:

$$g = \frac{1,841}{a} \quad (2.59)$$

и критической длиной волны:

$$\lambda_c = 3,412 a . \quad (2.60)$$

Волна  $H_{11}$  имеет наибольшую критическую длину волны из всех типов в круглом волноводе.

Среди собственных волн в круглом волноводе выделяется азимутально-симметричная волна  $H_{01}$ , которая, хотя и не является основной, но обладает специфическими особенностями, в частности, она имеет минимальные омические потери (см. далее п. 2.5). У этой волны имеются только компоненты  $E_\varphi$ ,  $H_r$  и  $H_z$ , откуда следует, что, во-первых, ток на стенках волновода имеет только азимутальную составляющую, и, во-вторых, силовые линии электрического поля этой волны замкнуты сами на себя.

Однако следует заметить, что, несмотря на малость омических потерь, использование волны  $H_{01}$  для передачи СВЧ энергии мешает то обстоятельство, что эта волна вырождена. Из известного соотношения  $J'_0(x) = -J_1(x)$  следует, что тем же самым волновым числом обладает волна  $E_{11}$ , которая имеет другое распределение полей и, к тому же, существенно большие потери при распространении (см. далее п. 2.5).

Для сравнения обычных низкочастотных методов передачи э.-м. энергии с волноводным полезно рассмотреть распространение э.-м. волн в коаксиальной линии, широко используемой на более длинных волнах, но также применяемой и на СВЧ.

## 2.1.2 Коаксиальная линия

Коаксиальная линия, сечение которой представлено на рис. 8, состоит из двух цилиндрических проводников радиусами  $a$  и  $b$ , расположенных концентрически (рис. 2.2). Рассчитаем поля в коаксиальной линии, пользуясь методами расчета волноводов. считая для упрощения формул, что между наружным и внутренним проводниками линии (там, где распространяется э.-м. волна), — вакуум, а проводники имеют бесконечную проводимость.

Рассмотрим электрические волны в коаксиальной линии. Для этого воспользуемся уравнением (2.40) для компоненты  $E_z$  в цилиндрических координатах. Граничные

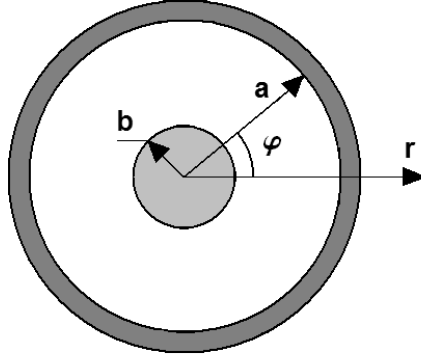


Рис. 2.2: Сечение коаксиальной линии

условия для  $E_z$  запишутся в виде:

$$E_z = 0 \quad r = a, \quad (2.61)$$

$$E_z = 0 \quad r = b. \quad (2.62)$$

Из-за наличия внутреннего проводника решение уравнения (2.40) должно содержать не только функции Бесселя  $J_m(gr)$  (см. (2.42)), но и функции Неймана  $N_m(gr)$ . В частности, для азимутально-однородных волн ( $m = 0$ ) поля имеют вид:

$$E_z = [A J_0(gr) + B N_0(gr)] \cdot e^{ihz}, \quad (2.63)$$

$$E_r = -i \frac{h}{g} [A J_1(gr) + B N_1(gr)] \cdot e^{ihz}, \quad (2.64)$$

$$H_\varphi = -i \frac{k}{g} [A J_1(gr) + B N_1(gr)] \cdot e^{ihz}. \quad (2.65)$$

Для определения набора поперечных волновых чисел  $\{g_{0n}\}$  в коаксиальной линии сначала из граничного условия (2.61) найдем связь между константами  $A$  и  $B$  в (2.63—2.65):

$$B = -A \frac{J_0(ga)}{N_0(ga)}. \quad (2.66)$$

а из второго граничного условия (2.62) получим трансцендентное уравнение относительно  $g$ :

$$J_0(gb) \cdot N_0(ga) = J_0(ga) \cdot N_0(gb), \quad (2.67)$$

которое решается численными методами. Покажем далее, что в коаксиальной линии, в отличие от рассмотренных выше односвязных волноводов, может распространяться волна с  $g = 0$  и определим поля волн в коаксиальной линии для этого случая.

Чтобы корректно исключить бесконечные значения функций Неймана при нулевом аргументе, воспользуемся следующим методом.

Подставив (2.66) в (2.63–2.65), перенормируем константу  $A$  так, чтобы поля  $E_r$   $H_\varphi$  на внешнем коаксиале ( $r = a$ ) оставались конечными при  $g = 0$ :

$$A = i D \frac{g}{k} \cdot \frac{N_0(ga)}{J_1(ga)N_0(ga) - J_0(ga)N_1(ga)}, \quad (2.68)$$

где  $D$  — новая константа.

При учете (2.66) и (2.68) поля (2.63–2.65) представятся в требуемом виде:

$$E_z = i D \frac{g}{k} \cdot \frac{J_0(gr)N_0(ga) - J_0(ga)N_0(gr)}{J_1(ga)N_0(ga) - J_0(ga)N_1(ga)} \cdot e^{ihz}, \quad (2.69)$$

$$E_r = D \frac{h}{k} \cdot \frac{J_1(gr)N_0(ga) - J_0(ga)N_1(gr)}{J_1(ga)N_0(ga) - J_0(ga)N_1(ga)} \cdot e^{ihz}, \quad (2.70)$$

$$H_\varphi = D \cdot \frac{J_1(gr)N_0(ga) - J_0(ga)N_1(gr)}{J_1(ga)N_0(ga) - J_0(ga)N_1(ga)} \cdot e^{ihz}. \quad (2.71)$$

Запишем теперь приближенные выражения для полей при  $gr, ga \ll 1$ , воспользовавшись известными приближениями:

$$J_0(x) \simeq 1, \quad J_1(x) \simeq \frac{x}{2}, \quad N_0(x) \simeq -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{1,78x}, \quad N_1(x) \simeq -\frac{2}{\pi x}, \quad (x \ll 1). \quad (2.72)$$

Тогда из (2.69) – (2.71) имеем:

$$E_z \simeq i D \frac{(ga)^2}{ka} \cdot \ln \frac{a}{r} \cdot e^{ihz}, \quad (2.73)$$

$$E_r \simeq D \frac{ha}{kr} \cdot e^{ihz}, \quad (2.74)$$

$$H_\varphi \simeq D \frac{a}{r} \cdot e^{ihz}. \quad (2.75)$$

Из (2.73) следует, что переходе к малым поперечным волновым числам для выполнения граничного условия  $E_z = 0$  на стенках коаксиала необходимо положить  $g = 0$ , и тогда, соответственно,  $h = k$ . Этот подход позволяет выделить из всей совокупности собственных волн коаксиальной линии особую волну с двумя компонентами э.-м. поля:

$$E_r = D \frac{a}{r} \cdot e^{ihz}, \quad (2.76)$$

$$H_\varphi = D \frac{a}{r} \cdot e^{ihz}. \quad (2.77)$$

Эта волна, называемая обычно ТЕМ-волной, основная в коаксиальной линии. Она имеет чисто поперечный характер, ее фазовая и групповая скорости равны скорости света, длина волны равна длине волны в свободном пространстве, а критическая длина волны равна бесконечности, что естественно было ожидать, поскольку по коаксиальной линии можно передавать постоянный ток.

Конечно, в коаксиальной линии могут распространяться и волноводные волны  $E$ – и  $H$ – типа. В частности, для рассматриваемой выше симметричной ( $m = 0$ )  $E$ –волны

собственные значения волн с разными радиальными индексами можно получить из граничного условия  $E_z = 0$  из при  $r = a$  (2.69). Волноводные волны в коаксиальных линиях обычно используемого относительно небольшого сечения могут существовать только при достаточно высоких частотах. Они используются редко и их наличие обычно нежелательно, поскольку они могут отбирать энергию от основной волны. Возможность распространения высших типов волн ограничивает, в частности, использование коаксиальных линий в коротковолновой части СВЧ диапазона.

Таким образом, последовательный волновой расчет э.-м. полей основной волны в коаксиальной линии приводит, как и следовало ожидать, к тем же самым результатам, что и обычный квазистатический расчет в радиотехнике. Из выражений для полей (2.76) и (2.77) нетрудно получить ток  $I$  и напряжение  $U$  в линии, обычно используемые в квазистатике.

Плотность тока на поверхности проводников находится согласно (1.122) и интегрированием по поверхностям внутреннего и внешних проводников определяются полные токи

$$I_a = -D \frac{ca}{2} \cdot e^{ikz} \quad , \quad I_b = D \frac{ca}{2} \cdot e^{ikz} \quad , \quad (2.78)$$

которые, как и следовало ожидать, равны по величине и противоположны по направлению.

Заметим, что в случае волновых полей напряжение между проводниками определяется, вообще говоря, неоднозначным образом из-за того, что переменное электрическое поле, строго говоря, не имеет потенциального характера. Поэтому, когда по аналогии с квазистатикой для полей в волноводах вводят напряжение, то для его однозначного определения необходимо указать, во-первых, какая волна распространяется в волноводе, во-вторых, по какому пути интегрируется напряженность электрического поля между выбранными точками.

В коаксиальной линии при распространении основной волны электрическое поле потенциально в поперечном сечении и по аналогии с квазистатическим случаем напряжение определяется как

$$U = \int_a^b E_r dr = D a \ln \frac{a}{b} \cdot e^{ikz} \quad . \quad (2.79)$$

При расчетах линий передачи в УКВ, а иногда и в СВЧ диапазонах, используют так называемое волновое сопротивление линии, которое определяется как отношение напряжения **бегущей в одном направлении** волны в линии к току этой волны:

$$Z = \frac{U}{I} \quad . \quad (2.80)$$

Из тех же соображений, что высказаны выше о напряжении, следует, что волновое сопротивление СВЧ линии тоже величина неоднозначная. В коаксиальной линии для основной волны оно вводится естественным образом из (2.79) и (2.80):

$$Z = \frac{2}{c} \ln \frac{a}{b} \quad . \quad (2.81)$$

Для того, чтобы вычислить  $Z$  в практической системе единиц (в омах), следует в (2.75) коэффициент  $1/c$  заменить на 30 Ом.

Из (2.81) видно, что волновое сопротивление пустой коаксиальной линии определяется только отношением диаметров проводников, поскольку распределение полей в распространяющейся волне, а, следовательно, и соотношение между напряжением и током в ней определяются только граничными условиями.

Если линия заполнена веществом, то

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{2}{c} \ln \frac{a}{b} . \quad (2.82)$$

Мощность, переносимая волной по коаксиальной линии, определяется из вектора Пойнтинга:

$$\bar{P} = (Da)^2 \frac{c}{4} \ln \frac{a}{b} = \frac{U^2}{2Z} = \frac{I^2 Z}{2} . \quad (2.83)$$

Выражение (2.83) для мощности по виду полностью совпадает с мощностью нагрева омического резистора сопротивлением  $Z$ , но имеет другой физический смысл.

Во многих случаях, особенно в УКВ и более длинноволновых диапазонах, размеры устройств, подсоединяемых к линиям, существенно меньше длины волны и они рассматриваются как сосредоточенные элементы квазистатическими методами. Введение волнового сопротивления позволяет при расчетах цепей, в которых используются коаксиальные линии, применять развитый в радиотехнике метод эквивалентных схем. В частности, как следует из (2.83), линию с бегущей волной на эквивалентной схеме можно представить активным сопротивлением  $Z$ . Волновой характер поля при этом учитывают только в тех отрезках линий, длина которых сравнима или больше длины волны.

Возможность описания статическими методами электродинамически точного распределения поля в сечении коаксиальной линии позволяет в значительной мере упростить расчеты ВЧ и СВЧ цепей, используя хорошо развитые радиотехнические методы. При этом достаточно простым способом можно учесть как конечную проводимость проводников линии, так и свойства диэлектрика между проводниками.

Из уравнений Максвелла получены так называемые телеграфные уравнения для напряжения и тока в линии. Для комплексных амплитуд (зависящих только от координаты  $z$ ) они записываются в виде:

$$\frac{dU}{dz} = -(r_l - i\omega l_l) I , \quad (2.84)$$

$$\frac{dI}{dz} = -(g_l - i\omega c_l) U , \quad (2.85)$$

где  $r_l$  — погонное (на единицу длины) сопротивление линии,  $l_l$  — погонная индуктивность линии,  $c_l$  — погонная емкость линии,  $g_l$  — погонный коэффициент утечки (из-за проводимости диэлектрика между проводниками линии). При этом проводимость диэлектрика должна быть существенно меньше проводимости проводников.

Заметим, что для комплексных уравнений (2.84) и (2.85) зависимость от времени описывается функцией  $e^{-i\omega t}$ , как обычно в электродинамике, а не  $e^{i\omega t}$ , как принято в радиотехнических расчетах цепей передачи и элементов устройств.

Погонные емкость и индуктивность коаксиальной линии, заполненной диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$ , определяются формулами:

$$c_l = \frac{\varepsilon}{2 \ln \frac{b}{a}} , \quad (2.86)$$

$$l_l = \frac{2}{c^2} \cdot \ln \frac{b}{a} , \quad (2.87)$$

а погонные сопротивление и утечка рассчитываются по закону Ома.

Из уравнений (2.84) и (2.85) следует волновое уравнение

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + h^2 U = 0 , \quad (2.88)$$

где

$$h = \sqrt{(\omega l_l + i r_l)(\omega c_l + i g_l)} \quad (2.89)$$

— комплексное волновое число распространяющейся волны.

Этому же уравнению удовлетворяет ток в линии. Решением таких уравнений являются волны напряжения и тока, распространяющиеся в обоих направлениях вдоль линии, что можно записать двумя эквивалентными способами:

$$I_+ e^{ihz} , U_+ e^{ihz} ; \quad I_- e^{-ihz} , -U_- e^{-ihz} , \quad (2.90)$$

или

$$I_+ e^{ihz} , U_+ e^{ihz} ; \quad -I_- e^{-ihz} , U_- e^{-ihz} , \quad (2.91)$$

что отражает противоположность знаков продольной составляющей вектора Пойнтинга у прямой и встречной волн.

При наличии сопротивления и утечек волновое сопротивление коаксиальной линии становится комплексным:

$$Z = \sqrt{\frac{\omega l_l + i r_l}{\omega c_l + i g_l}} . \quad (2.92)$$

Телеграфные уравнения используют для расчета всех линий, поперечное сечение которых не является односвязной областью и, следовательно, вдоль таких линий может распространяться чисто поперечная (*ТЕМ*) волна. Кроме коаксиальной линии, к ним относятся двухпроводная линия, полосковая, спиральная, многопроводные линии с различным числом проводов и т.п.

## 2.2 Сторонние токи

Исследование собственных волн в однородных линиях передачи является необходимым первым этапом расчета. Но в любой реальной линии должен присутствовать источник возбуждения поля в линии, а также устройства, принимающие и преобразующие э.-м. энергию. Вторым этапом является вычисление поля, создаваемого в линии передачи источниками э.-м. волн, что называют задачей возбуждения линии передачи.

Источниками э.-м. волн, как следует из уравнений Максвелла, являются электрические токи с плотностью  $\vec{j}$ . Для упрощения расчетов полей эту плотность тока во многих случаях разделяют на два слагаемых:

$$\vec{j} = \vec{j}^e + \vec{j}_i \quad . \quad (2.93)$$

Первое слагаемое  $\vec{j}^e$  — плотность тока, вызванного движением зарядов, которые перемещаются только внешними силами и на которые э.-м. поля, возбуждаемые в рассматриваемой системе, влияния не оказывают. Эти токи называют сторонними и в расчете их принимают заданными. Введение сторонних токов позволяет учесть как токи неэлектромагнитного происхождения — от химических, механических и прочих источников, так и токи, возбуждаемые полями той части системы, которая не рассматривается детально в данной задаче. Слагаемое  $\vec{j}_i$  — плотность вторичного тока, определяемого самим электромагнитным полем. Токи такого типа учитывались нами ранее при описании э.-м. поля в материальных средах (см. п. 1.1), и, в частности, поля в металлах (см. п.1.4). Другим примером вторичного тока является ток из (1.122) в стенках волновода при распространении собственной волны, который, по существу, является другим представлением собственного поля на материальной границе. Необходимости введения вторичного тока в правую часть уравнений Максвелла во многих случаях не существует, в частности, они уже учтены в свойствах сред (через проницаемости  $\epsilon$  и  $\mu$ ) или через граничные условия.

Сторонние источники вводятся в уравнения Максвелла следующим образом:

$$\text{rot}\vec{E} = ik\vec{H} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}^m \quad , \quad (2.94)$$

$$\text{rot}\vec{H} = -ik\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^e \quad , \quad (2.95)$$

где  $\vec{j}^m$  — плотность магнитного тока носит вспомогательный характер и введена, в частности, для симметрии уравнений (2.94) и (2.95). Однако, несмотря на то, что магнитных зарядов и, следовательно, и магнитных токов в природе не наблюдается, плотности  $\vec{j}^m$  в задачах электродинамики можно поставить в соответствие конкретное физическое содержание.

Во многих случаях источники возбуждения э.-м. волн можно представить в виде диполей или совокупности диполей. Электрический диполь представляет собой два заряда с противоположными знаками  $+e$  и  $-e$ , находящиеся на расстоянии  $l$ . Момент электрического диполя

$$\vec{p} = e\vec{l} \quad , \quad (2.96)$$

а колеблющемуся с частотой  $\omega$  диполю соответствует ток с комплексной амплитудой  $I$ , причем

$$I\vec{l} = -i\omega\vec{p} \quad . \quad (2.97)$$

Если размеры диполя малы, то в первом приближении его можно заменить "точечным" диполем бесконечно малого размера, но с конечным моментом. Колеблющемуся точечному диполю можно поставить в соответствие плотность тока

$$\vec{j}^e = -i\omega\vec{p}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad , \quad (2.98)$$

где  $r_0$  — координата диполя, а  $\delta(\vec{r})$  — трехмерная дельта-функция.



Магнитный диполь эквивалентен току  $I$ , протекающему по замкнутому контуру, ограничивающему векторную площадку  $\vec{S}$ . Момент магнитного диполя

$$\vec{m} = \frac{1}{c} I \vec{S} \quad . \quad (2.99)$$

Точечному магнитному диполю, колеблющемуся с частотой  $\omega$ , ставится в соответствие плотность магнитного тока

$$\vec{j}^m = -i\omega \vec{m} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad . \quad (2.100)$$

Примером магнитного диполя в СВЧ диапазоне может служить небольшая по сравнению с длиной волны петля, по которой течет СВЧ ток. Магнитный момент петли и, следовательно, вектор плотности магнитного тока перпендикулярен плоскости петли.

По аналогии с поверхностным электрическим током (см. (1.122)) можно ввести также поверхностный магнитный ток

$$[\vec{n}\vec{E}] = -\frac{4\pi}{c} \vec{i}^m \quad , \quad (2.101)$$

где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к поверхности проводника.

Левая часть соотношения (2.101) – скачок тангенциального электрического поля при переходе через поверхность раздела, по которой текут магнитные поверхностные токи.

В некотором приближении разрывным можно считать электрическое поле, которое возникает в щели, прорезанной в проводящем экране перпендикулярно вектору плотности поверхностного электрического тока. При разрыве тока на краях щели возникают заряды противоположного знака, соединенные линиями электрического поля, которые обрываются на экране. При расчете э.-м. полей металлический экран со щелью заменяется сплошным экраном с эквивалентным поверхностным магнитным током, вектор плотности которого отличен от нуля только в месте расположения щели и направлен вдоль нее. Подобным же образом можно ввести магнитный ток в небольшом отверстии, прорезанном в металлическом экране (см. далее 3.6.1).

## 2.3 Лемма Лоренца

При расчете возбуждения волновода обычно пользуются методом разложения возбуждаемого поля по собственным волнам волновода, рассмотренным выше. При таких расчетах, хорошо разработанных в математической физике для решения линейных дифференциальных уравнений, в электродинамике полезно использовать так называемую лемму Лоренца — вспомогательное математическое соотношение между комплексными амплитудами полей, возбуждаемыми двумя независимыми источниками (на одной частоте!). Лемма Лоренца полезна не только для этой задачи и мы будем пользоваться ей и далее, поэтому остановимся на этой лемме подробнее. Доказательство леммы Лоренца нетрудно провести, основываясь на уравнениях Максвелла (1.69) и (1.70) и на известных формулах векторного анализа.

Если в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ , сторонние токи  $\vec{j}_1^e$  и  $\vec{j}_1^m$  возбуждают э.-м. поле  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ , а другие сторонние токи  $\vec{j}_2^e, \vec{j}_2^m$  возбуждают э.-м. поле

$\vec{E}_2, \vec{H}_2$ , то

$$\text{rot } \vec{E}_1 = ik\mu \vec{H}_1 - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_1^m, \quad (2.102)$$

$$\text{rot } \vec{H}_1 = -ik\varepsilon \vec{E}_1 + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_1^e, \quad (2.103)$$

$$\text{rot } \vec{E}_2 = ik\mu \vec{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_2^m, \quad (2.104)$$

$$\text{rot } \vec{H}_2 = -ik\varepsilon \vec{E}_2 + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_2^e, \quad (2.105)$$

При этом комплексные проницаемости  $\varepsilon$  и  $\mu$  могут произвольным образом изменяться в пространстве.

Умножим уравнение (2.102) скалярно на  $\vec{H}_2$ , а уравнение (2.105) — на  $-\vec{E}_1$  и сложим их, затем умножим уравнение (2.104) на  $\vec{H}_1$ , а уравнение (2.103) — на  $-\vec{E}_2$  и также их сложим. В результате получим два выражения:

$$\vec{H}_2 \text{ rot } \vec{E}_1 - \vec{E}_1 \text{ rot } \vec{H}_2 = ik(\vec{E}_1 \varepsilon \vec{E}_2 + \vec{H}_2 \mu \vec{H}_1) - \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_2^e \vec{E}_1 + \vec{j}_1^m \vec{H}_2), \quad (2.106)$$

$$\vec{H}_1 \text{ rot } \vec{E}_2 - \vec{E}_2 \text{ rot } \vec{H}_1 = ik(\vec{E}_2 \varepsilon \vec{E}_1 + \vec{H}_1 \mu \vec{H}_2) - \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1). \quad (2.107)$$

При вычитании (2.107) из (2.106) первые члены справа сокращаются и далее, воспользовавшись для преобразования разности левых членов известным векторным тождеством

$$\text{div}[\vec{A}\vec{B}] = \vec{B} \text{ rot } \vec{A} - \vec{A} \text{ rot } \vec{B}, \quad (2.108)$$

получим дифференциальную формулировку леммы Лоренца:

$$\text{div}[\vec{E}_1 \vec{H}_2] - \text{div}[\vec{E}_2 \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1). \quad (2.109)$$

Для практического использования лемму Лоренца записывают в интегральном виде. Проинтегрировав равенство (2.109) по объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ , и, преобразовав левую часть этого интегрального равенства по теореме Гаусса-Остроградского, получим:

$$\int_S \{[\vec{E}_1 \vec{H}_2] - [\vec{E}_2 \vec{H}_1]\} \vec{n} dS = \frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1) dV. \quad (2.110)$$

где  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ .

В основе удобства применения леммы Лоренца в виде (2.110) для электродинамических расчетов лежат два факта. Первый состоит в достаточной произвольности выбора объема  $V$ , второй: токи в (2.110) могут быть реальными для рассматриваемой задачи, но можно некоторые из токов задать произвольно как по величине, так и по расположению в пространстве.

В частной формулировке леммы Лоренца за объем  $V$  принимают все бесконечное пространство, и тогда, согласно теореме единственности, интеграл по поверхности бесконечно большого радиуса слева в (2.110) исчезающе мал. Отсюда имеем:

$$\int_V (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1) dV = 0. \quad (2.111)$$

Из этого выражения непосредственно следует важная для практики теорема взаимности, которую мы приведем здесь для электрических диполей. Если магнитные токи отсутствуют, то (2.111) упрощается до вида:

$$\int_V (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1) dV = 0 \quad . \quad (2.112)$$

Плотности электрического тока связаны с соответствующими дипольными моментами соотношениями

$$\vec{j}_1^e = -i\omega \vec{p}_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \quad , \quad \vec{j}_2^e = -i\omega \vec{p}_2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_2) \quad . \quad (2.113)$$

подставив которые в (2.112), получим:

$$\vec{p}_1 \vec{E}_2(1) = \vec{p}_2 \vec{E}_1(2) \quad , \quad (2.114)$$

где  $\vec{E}_1(2)$  — поле диполя  $\vec{p}_1$  в точке расположения диполя  $\vec{p}_2$ , а  $\vec{E}_2(1)$  — поле диполя  $\vec{p}_2$  в точке расположения диполя  $\vec{p}_1$ .

Из (2.114) непосредственно следует краткая формулировка теоремы взаимности: при равенстве абсолютных величин двух дипольных моментов действие диполя 1 на диполь 2 такое же, как действие диполя 2 на диполь 1. Отметим еще раз, что на этот вывод не влияет, какое пространственное распределение  $\varepsilon$  и  $\mu$  существует в среде между диполями.

В частности, из теоремы взаимности следует важное для практики утверждение о том, что диаграммы направленности любой антенны на прием и передачу совпадают.

Однако, имеются среды, для которых теорема взаимности не верна. Пусть в рассматриваемой части пространства имеется анизотропная среда, свойства которой в общем случае обычно характеризуют тензорами  $\varepsilon_{ik}$  и  $\mu_{ik}$  (см. §1). Примем для простоты записи, что один из этих тензоров антисимметричный, например, тензор магнитной проницаемости, т.е.  $\mu_{ik} = -\mu_{ki}$ . Тогда, как следует из правил тензорного анализа, в формулах (2.104) и (2.105)

$$\vec{H}_2 \mu_{ik} \vec{H}_1 = -\vec{H}_1 \mu_{ik} \vec{H}_2, \quad (i, k = x, y, z) \quad (2.115)$$

и при вычитании (2.105) из (2.104) вместо (2.109) получается более сложное выражение:

$$\text{div}[\vec{E}_1 \vec{H}_2] - \text{div}[\vec{E}_2 \vec{H}_1] = 2ik \vec{H}_2 \mu_{ik} \vec{H}_1 - \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1) \quad , \quad (2.116)$$

которое иногда называют обобщенной леммой Лоренца в дифференциальном виде.

Перейдя к интегральной форме из (2.116), получим вместо (2.110) соотношение:

$$\int_S \left\{ [\vec{E}_1 \vec{H}_2] - [\vec{E}_2 \vec{H}_1] \right\} \vec{n} dS = 2ik \int_V \vec{H}_2 \mu_{ik} \vec{H}_1 dV + \frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1) dV \quad , \quad (2.117)$$

которое является математической основой для создания так называемых невзаимных устройств в технике СВЧ. Эти невзаимные устройства в СВЧ диапазоне выполняются в основном на ферритах. Физические основы работы невзаимных устройств и их конструкции изложены, например, в [17].

## 2.4 Возбуждение волн в волноводах

Перейдем теперь непосредственно к задаче о возбуждении волновода сторонними токами.

В гл.2.1 были вычислены поля и волновые числа собственных волн в волноводе, которые являются решениями уравнений Максвелла без источников. При наличии внешних источников в волноводе может возбуждаться, вообще говоря, весь набор собственных волн, как распространяющихся в обоих направлениях вдоль волновода, так и затухающих. Каждая собственная волна с продольным волновым числом  $h_s$  возбуждается со своей амплитудой  $C_s$ , определяемой способом возбуждения, то есть распределением сторонних токов. Индекс  $s$  для краткости заменяет индексы типов волн  $mn$ , причем для прямой волны  $s > 0$  ( $C_s, \vec{E}_s, \vec{H}_s$ ), а для встречной  $s < 0$  ( $C_{-s}, \vec{E}_{-s}, \vec{H}_{-s}$ ).

Известным методом решения задачи о вынужденных колебаниях линейной системы является разложение вынужденных колебаний по собственным функциям системы. При этом для определения коэффициентов разложения для собственных функций необходимо ввести условия ортогональности и нормировки.

Условие ортогональности собственных волн в волноводе несложно получить, применив лемму Лоренца в виде (2.110) к полям двух произвольных собственных волн с разными индексами  $s$  и  $s'$ :  $\vec{E}_s, \vec{H}_s$  и  $\vec{E}_{s'}, \vec{H}_{s'}$ , находящиеся в некотором объеме однородного волновода, заключенного между поперечными сечениями  $S_1$  и  $S_2$ . Поверхность внутренней стенки волновода между этими сечениями обозначим через  $S_0$ . При этом, в отличие от условий расчета собственных волн в волноводе в п 2.1, будем считать проводимость стенок волновода большой, но конечной, когда на стенке справедливо граничное условие Леонтовича (1.125):

$$[\vec{n} \vec{E}] = -w [\vec{n} [\vec{n} \vec{H}]] \quad . \quad (2.118)$$

где  $\vec{n}$  - нормаль к поверхности, направленная вглубь металла.

Если внутри рассматриваемого объема отсутствуют сторонние токи, то правая часть (2.110) обращается в нуль и

$$\int_S \left\{ [\vec{E}_s \vec{H}_{s'}] - [\vec{E}_{s'} \vec{H}_s] \right\} \vec{n} dS = 0 \quad . \quad (2.119)$$

Подынтегральное выражение на внутренней поверхности волновода  $S_0$  обращается в нуль, поскольку, с учетом (1.125):

$$\left\{ [\vec{E}_s \vec{H}_{s'}] - [\vec{E}_{s'} \vec{H}_s] \right\} = -w \left\{ [\vec{n} [\vec{n} \vec{H}_s]] \vec{H}_{s'} - [\vec{n} [\vec{n} \vec{H}_{s'}]] \vec{H}_s \right\} = w \left\{ [\vec{n} \vec{H}_s] [\vec{n} \vec{H}_{s'}] - [\vec{n} \vec{H}_{s'}] [\vec{n} \vec{H}_s] \right\} = 0 \quad . \quad (2.120)$$

Далее, из (2.119) нетрудно видеть, что

$$\int_{S_1} \left\{ [\vec{E}_s \vec{H}_{s'}] - [\vec{E}_{s'} \vec{H}_s] \right\} \vec{l} dS = \int_{S_2} \left\{ [\vec{E}_s \vec{H}_{s'}] - [\vec{E}_{s'} \vec{H}_s] \right\} \vec{l} dS \quad (2.121)$$

где  $\vec{l}$  - единичный вектор в направлении оси  $z$ , то есть значение интеграла по поперечному сечению волновода не зависит от расположения этого сечения по оси  $z$ . Однако,

под знаком интеграла эта зависимость имеется:

$$[\vec{E}_s \vec{H}_{s'}] \propto e^{i(h_s+h'_s)z} \quad . \quad (2.122)$$

Из этого факта следует, что в любом поперечном сечении волновода  $S_w$  должно быть:

$$\int_{S_w} \left\{ [\vec{E}_s \vec{H}_{s'}] - [\vec{E}_{s'} \vec{H}_s] \right\} \vec{l} dS = 0 \quad (\text{при } s' \neq -s) \quad , \quad (2.123)$$

Это условие (2.123) определяет ортогональность собственных волн в волноводе.

Но если в подынтегральном выражении (2.121) стоят поля противоположно распространяющихся волн с одним индексом ( $s' = -s$ ), то (2.123) является положительной величиной

$$N_s = \frac{c}{4\pi} \int_{S_p} \left\{ [\vec{E}_s \vec{H}_{-s}] - [\vec{E}_{-s} \vec{H}_s] \right\} \vec{l} dS \quad (\text{при } s' = -s) \quad , \quad (2.124)$$

которое является выражением для нормы  $s$ -ой собственной волны в волноводе.

Норма имеет размерность мощности и видно, что для распространяющейся волны в идеальном волноводе она пропорциональна средней мощности, переносимой  $s$ -ой волной по волноводу. Если, например, магнитное поле собственной волны —  $H_0(x_0, y_0)$ , то переносимая ею мощность:

$$\Sigma_0 = H_0^2 \cdot \frac{N_s}{4 H_s^2(x_0, y_0)} \quad . \quad (2.125)$$

Пусть источники (электрические и магнитные сторонние токи) занимают в волноводе область между сечениями  $z_1 \leq z \leq z_2$ . Тогда волны должны расходиться от области, занятой источниками. Представим возбужденное поле в виде разложений: — справа от источников

$$\vec{E} = \sum_s C_s \vec{E}_s \quad , \quad \vec{H} = \sum_s C_s H_s \quad (\text{при } z > z_2) \quad , \quad (2.126)$$

и слева от источников:

$$\vec{E} = \sum_s C_{-s} \vec{E}_{-s} \quad , \quad \vec{H} = \sum_s C_{-s} H_{-s} \quad (\text{при } z < z_1) \quad . \quad (2.127)$$

Комплексные амплитуды  $C_s$  и  $C_{-s}$  этих волн определяются с использованием леммы Лоренца, условий ортогональности (2.119) и нормировки (2.124). Выпишем окончательные формулы:

$$C_s = \frac{1}{N_s} \int_V (\vec{j}^e \vec{E}_{-s} - \vec{j}^m \vec{H}_{-s}) dV \quad , \quad (2.128)$$

$$C_{-s} = \frac{1}{N_s} \int_V (\vec{j}^e \vec{E}_s - \vec{j}^m \vec{H}_s) dV \quad . \quad (2.129)$$

В области, занятой источниками, существуют как прямые, так и встречные волны, причем амплитуды этих волн являются функциями  $z$ .

Наиболее часто при возбуждении волноводов необходимо добиться следующего: первое — при заданном токе возбуждения получить максимальную амплитуду рабочей волны, второе — подавить возбуждение других типов волн (обычно высших). Из вида формул (2.128) и (2.129) можно сразу сделать некоторые выводы об эффективности различных способов возбуждения волновода. Легко видеть, что максимальную эффективность

возбуждения волны заданного типа  $\vec{E}_s, \vec{H}_s$  можно получить, если распределение токов  $\vec{j}^e$  (или  $\vec{j}^m$ ) в поперечном сечении волновода полностью совпадает с распределением напряженности  $\vec{E}_{-s}$  (или, соответственно,  $\vec{H}_{-s}$ ) и, кроме того, токи и напряженности полей имеют одинаковые продольные волновые числа. При этом остальные типы волн не возбуждаются. Однако такое распределенное возбуждение, как правило, достаточно трудно осуществить, и на практике чаще используют сосредоточенные источники возбуждения. При их использовании для получения максимальной эффективности возбуждения необходимо выполнять по возможности следующие требования:

1. Направление возбуждающего тока  $\vec{j}^e$  (или  $\vec{j}^m$ ) должно совпадать с направлением напряженности поля  $\vec{E}_{-s}$  (или, соответственно,  $\vec{H}_{-s}$ ) в месте расположения элемента возбуждения.
2. Источник возбуждения  $\vec{j}^e$  (или  $\vec{j}^m$ ) должен помещаться в область максимальной напряженности поля собственной волны  $\vec{E}_{-s}$  (или, соответственно,  $\vec{H}_{-s}$ ).
3. При продольном расположении источника возбуждения в волноводе волны тока в источнике и напряженности соответствующих полей должны иметь одинаковые продольные волновые числа.

К наиболее часто используемым элементам сосредоточенного возбуждения относятся следующие.

1. Электрический штырь (рис. 2.3 а). Обычно он представляет собой небольшой отрезок коаксиальной линии с удлиненным внутренним проводником, пропускаемый внутрь волновода через отверстие в его стенке. Штырь является источником электрического тока, который течет по внутренней жиле коаксиальной линии.
2. Петля (рис. 2.3 б). Также представляет собой отрезок коаксиальной линии, удлиненный внутренний проводник которой изогнут в виде замкнутого или незамкнутого кольца. Во втором случае ток замыкается через емкость зазора. Петля описывается как магнитный ток, вектор плотности которого направлен перпендикулярно плоскости петли.
3. Щель в стенке волновода (рис. 2.3 в). Как уже обсуждалось выше, щель, в которой имеется поперечное электрическое поле, можно рассматривать как магнитный ток, протекающей вдоль щели в ее плоскости. Поперечное поле в возбуждающей щели создается внешним источником. Наиболее часто щель используется для связи двух волноводов через общую стенку. При этом для эффективного возбуждения щель должна быть прорезана перпендикулярно электрическим токам, текущим по стенкам волноводов.

## 2.5 Потери в волноводах

Поскольку стенки реальных волноводов имеют конечную проводимость, то при передаче СВЧ энергии по волноводам некоторая часть мощности теряется на омический нагрев стенок. Кроме того, для потребителя СВЧ энергии во многих случаях существенно

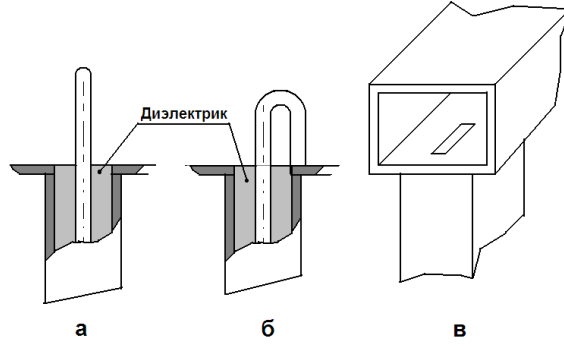


Рис. 2.3: Элементы возбуждения волновода.

не только, какая часть энергии дошла до конца линии передачи, но и желательно, чтобы, на выходе присутствовал только тот тип волны, который возбуждается на входе волновода. Поэтому потери в волноводах разделяют на два типа – на омические и на потери преобразования рабочего типа волны в другие типы волн. Рассмотрим сначала омические потери.

Если волновод является геометрически однородным и омические потери равномерно распределены по его длине  $l$ , то выходная мощность  $\bar{\Sigma}_l$  связана с входной мощностью  $\bar{\Sigma}_0$  экспоненциальным законом

$$\bar{\Sigma}_l = \bar{\Sigma}_0 e^{-2h''l} \quad , \quad (2.130)$$

где  $h'' = \text{Im } h$  – коэффициент затухания поля волны вдоль направления ее распространения. Из закона сохранения энергии и выражения (2.130) следует, что коэффициент затухания выражается формулой

$$h'' = \frac{\bar{P}}{2\bar{\Sigma}} \quad , \quad (2.131)$$

где  $\bar{P}$  – средняя мощность омических потерь на единицу длины волновода (так называемая погонная мощность потерь), а  $\bar{\Sigma}$  – средняя мощность, переносимая волной через сечение волновода.

При сильном скин-эффекте для вычисления омических потерь можно использовать граничные условия Леонтовича, а именно введенную выше формулу (1.126). Для погонной мощности потерь эта формула преобразуется к виду

$$\bar{P} = \oint_C w' |H_s^{(t)}|^2 ds \quad , \quad w' = \text{Re } w \quad (2.132)$$

где  $H_s^{(t)}$  – тангенциальная компонента магнитного поля на стенке волновода, а интегрирование проводится по контуру  $C$  волновода.

Средний поток мощности через сечение волновода (при единичной амплитуде волны) также легко рассчитывается по формуле (1.49):

$$\bar{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} \int_S [\vec{E}_s \vec{H}_s^*] d\vec{S} \quad , \quad (2.133)$$

где интегрирование проводится по сечению волновода.

Зная распределение полей собственных волн в идеальном волноводе, по формулам (2.131) – (2.133) несложно вычислить коэффициенты затухания собственных волн в волноводе.

Например, для волны  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе со сторонами  $a$  и  $b$  :

$$h'' = \frac{1}{D} \cdot \frac{(a/2b)\nu^2 + 1}{\sqrt{\nu(\nu^2 - 1)}} \quad , \quad (2.134)$$

где  $\nu = f/f_0$  – относительная частота,  $f$  – рабочая частота,  $f_0$  – критическая частота, а параметр

$$D = a \sqrt{\frac{\sigma}{f_0}} \quad . \quad (2.135)$$

В круглом волноводе диаметром  $2a$  коэффициент затухания волны  $H_{01}$  равен

$$h'' = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu(\nu^2 - 1)}} \quad , \quad (2.136)$$

где

$$D = 2a \sqrt{\frac{\sigma}{f_0}} \quad . \quad (2.137)$$

Из вида выражения (2.131) можно сделать некоторые общие выводы относительно омических потерь в волноводах. Прежде всего, поскольку  $\bar{P} \sim a$  – характерному поперечному размеру волновода, а  $\bar{\Sigma} \sim a^2$ , то коэффициент  $h'' \sim a^{-1}$ , то есть затухание волны должно падать при увеличении поперечных размеров волновода. Эту зависимость можно усмотреть и из конкретных формул (2.134) и (2.136). Из этих качественных соображений следует, что волноводы с поперечным сечением сложной формы, в которых соотношение между площадью поперечного сечения и поперечными размерами, вообще говоря, меньше, чем в волноводах круглого и прямоугольного сечений, должны иметь большие омические потери.

При уменьшении частоты и приближении ее к критической поперечные поля собственных волн в волноводе уменьшаются (см. подраздел 2.1.1) и, следовательно, уменьшается поток мощности через сечение волновода. Это приводит к резкому возрастанию затухания волны вблизи критической частоты. Заметим, однако, что для расчета потерь на самой критической частоте и непосредственной близости от нее формулы (2.131) и (2.132) должны быть заменены другими, более сложными, учитывающими конечную проводимость стенок.

Омические потери зависят и от распределения токов на стенках волновода, то есть от типа собственной волны. Например, стандартные прямоугольные волноводы на волне  $H_{10}$  в 3-х сантиметровом диапазоне длин волн имеют характерное затухание порядка 25 Дб/км (то есть волна ослабляется по мощности приблизительно в 300 раз). Гораздо меньшее затухание имеют симметричные магнитные волны в круглых волноводах. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что затухание волны  $H_{01}$  в круглом волноводе может составить всего 2 – 4 Дб/км в диапазоне частот 30 – 100 ГГц. В то же время волна  $E_{11}$  в круглом волноводе, имеющая то же волновое число, имеет затухание в сотни раз большее.



Однородные в продольном направлении волноводы, являются, естественно, определенной расчетной абстракцией. В реальных волноводах имеются устройства ввода и вывода энергии, внутри волноводов могут находиться различные элементы, например, петли, штывы и т.п. При сочленении отдельных волноводных секций с помощью фланцев в местах их соединений имеются неизбежные контактные неоднородности, а сами волноводные секции могут иметь изгибы. Кроме того, волноводы не могут быть строго однородны по сечению и длине из-за неизбежных неточностей при их изготовлении.

Строго говоря, при любых изменениях геометрии волновода, в том числе и тех, о которых говорилось выше, волноводные поля должны рассчитываться из уравнений Максвелла с соответствующим изменением граничных условий. Неоднородность в волноводе, на которую падает первичная волна, считают источником расходящихся вторичных волн. Полное поле – сумма первичного и вторичного полей – должно удовлетворять граничным условиям на неоднородности, а в любом сечении волновода поле представляется в виде суммы собственных волн с постоянными амплитудами. Строгий расчет вторичных волн достаточно сложен, поскольку в решении (обычно численном) приходится учитывать значительное число нераспространяющихся волн.

Возбуждение вторичных волн на неоднородностях приводит, естественно, к потерям энергии при передаче по волноводу. Если в волноводе может распространяться только основной тип волны, то при наличии неоднородности, во-первых, на входе волновода появляются отраженная волна того же типа и, во-вторых, из-за возбуждения нераспространяющихся волн увеличивается мощность омических потерь около неоднородности. Если же в волноводе имеется возможность распространения не только основной волны, но и других типов волн (как, например, в волноводах большого сечения – так называемых сверхразмерных волноводах), то часть энергии основной волны забирается другими типами волн. В этом случае на выходе волновода присутствует смесь типов волн, что во многих случаях является нежелательным для работы подсоединяемых к волноводу устройств. Эти потери на преобразование типов волн в волноводе обычно стараются свести до минимума, и эффективность этого процесса в значительной мере определяется возможностями расчета коэффициентов преобразования или хотя бы их оценки.

Из формул возбуждения волноводов (2.128) и (2.129) грубую оценку амплитуд вторичных волн можно получить простым способом только для небольших неоднородностей. В качестве примера рассмотрим пассивный электрический диполь в волноводе. Считаем, что размеры диполя существенно меньше длины волны, а расстояние от диполя до стенки волновода существенно превышает размеры диполя. Тогда поле  $\vec{\mathcal{E}}$ , поляризующее диполь, можно считать квазистатическим и наведенный дипольный момент равен

$$\vec{p} = \beta \vec{\mathcal{E}} \quad , \quad (2.138)$$

где  $\beta$  – коэффициент статической поляризуемости диполя.

Пусть в волноводе могут распространяться только две магнитные волны с поперечными электрическими полями  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  в месте расположения диполя. Первичной волной, падающей на диполь, будем считать первую магнитную волну единичной амплитуды. Тогда, согласно (2.128), (2.129) и (2.138), диполь возбуждает вторичные волны с ампли-

тудами:

$$C_1 = C_{-1} = -\frac{i\omega}{N_1} \beta \vec{\mathcal{E}} \vec{E}_1, \quad (2.139)$$

$$C_2 = C_{-2} = -\frac{i\omega}{N_2} \beta \vec{\mathcal{E}} \vec{E}_2, \quad (2.140)$$

Если поляризуемость диполя мала и амплитуды вторичных волн малы по сравнению с амплитудой первичной волны, то в первом приближении за поляризующее поле можно принять поле падающей волны в месте расположения диполя. Тогда

$$C_1^{(1)} = C_{-1}^{(1)} = -\frac{i\omega}{N_1} \beta \vec{E}_1 \vec{E}_1, \quad (2.141)$$

$$C_2^{(1)} = C_{-2}^{(1)} = -\frac{i\omega}{N_2} \beta \vec{E}_1 \vec{E}_2, \quad (2.142)$$

Формулы (2.139) и (2.140) первого приближения позволяют даже в этом простом случае оценить потери на преобразование только качественно. В частности, в этом приближении закон сохранения энергии записывается для рассматриваемого случая в виде:

$$|1 + C_1|^2 + |C_1|^2 + 2 \frac{N_1}{N_2} |C_2|^2 \approx 1 \quad (2.143)$$

и выполняется не вполне точно.

Уточнение аналитического решения этой задачи методом последовательных приближений оправдано только в отдельных случаях, например, если диполь является малым диэлектрическим телом с  $\varepsilon \simeq 1$ . Дело в том, что в достаточно точном разложении поля, формируемого диполем в волноводе, по собственным волнам волновода, должно содержаться значительное число нераспространяющихся волн. Соответственно, эти волны должны вносить существенный вклад в поляризацию диполя.

Для расчета конкретных, часто встречающихся на практике неоднородностей – стыка волноводных фланцев, волноводных изгибов, диафрагм, петель, зондов и т.п. – развиты эффективные численные методы и результаты таких расчетов приводятся в справочниках по волноводам и технике СВЧ.

## 2.6 Общие свойства линий передачи

Различные линии передачи э.-м. энергии, в частности, рассмотренные выше волноводы и коаксиальная линия, могут отличаться, и иногда существенно, по своим электродинамическим характеристикам – по распределению полей, дисперсионным характеристикам и т.п. Однако, когда в линии передачи распространяются волны только одного типа, то распространение волн в различных линиях можно описывать с общих позиций. Чтобы ввести параметры, общие для всех линий передачи, рассмотрим, не конкретизируя тип линии, достаточно общую схему передачи э.-м. энергии. Источник излучения формирует в линии передачи э.-м. волну, которая, пройдя через ряд устройств, включенных в эту линию, попадает в конечное устройство – нагрузку, которой может служить

приемник, детектор, поглощающее устройство, антенна и т.п. Устройства, включенные в линию, могут иметь различное назначение – измерители характеристик э.-м. поля, колебательные системы и т.п., а могут быть и нежелательными неоднородностями — стыками отдельных узлов, случайно деформированными отрезками волноводов и т.п.

От источника распространяется прямая волна вида  $A e^{ihz}$ , где  $A$  – комплексная амплитуда любой компоненты поля волны в линии, а  $h$  – продольное волновое число волны. Любой элемент, вставленный в линию, является неоднородностью для волны, в частности, неоднородностью является и нагрузка линии. В этих неоднородностях первичная волна наводит токи, которые, в свою очередь, возбуждают вторичные волны в линии. На достаточном удалении от неоднородности можно пренебречь высшими типами волн и можно считать, что неоднородность является источником вторичных волн того же типа, что и первичная волна: отраженной вторичной волны и прямой вторичной волны.

Рассмотрим случай, когда в линии имеется только одна неоднородность. Поместим источник излучения в начало координаты  $z = 0$ , и пусть неоднородность занимает по длине отрезок  $L < z < L_1$  (рис. 2.4). Тогда при  $z < L$  в линии существует прямая

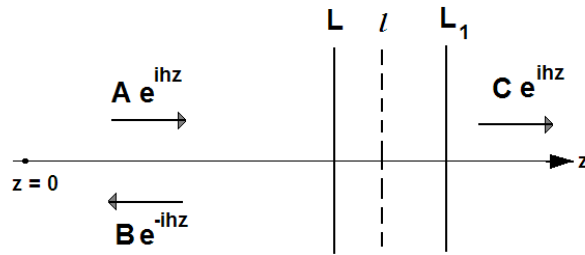


Рис. 2.4: Неоднородность в линии.

волна от источника и волна  $B e^{-ihz}$ , отраженная неоднородностью, а при  $z > L_1$  — только прямая прошедшая волна  $C e^{ihz}$ . При  $L < z < L_1$  — в области, занятой неоднородностью, имеются, вообще говоря, прямые и отраженные волны, а также волны высших типов обоих направлений. В этой области поля не рассматриваются, а электродинамические свойства неоднородности описывают коэффициентом отражения  $R$  волны от неоднородности и коэффициентом прохождения  $T$  волны через неоднородность.

Очевидно, что в рамках сделанных предположений любую неоднородность в линии можно заменить эквивалентной неоднородностью, сосредоточенной в некоторой опорной плоскости  $z = l$ . Эквивалентная замена состоит в том, чтобы отраженная и прошедшая волны имели те же комплексные амплитуды, что и в случае реальной неоднородности. Волна, отраженная от эквивалентной неоднородности, записывается в виде:

$$B e^{-ihz} = R \cdot A e^{ihl} \cdot e^{-ih(z-l)} = R \cdot A e^{2ihl} \cdot e^{-ihz} \quad (2.144)$$

В такой записи отчетливо видно, что токи, возбужденные в неоднородности, пропорциональны полю падающей волны в месте расположения неоднородности, и неоднородность

является источником вторичных волн. Из (2.144) следует, что реальной неоднородности можно поставить в соответствие бесконечно много эквивалентных неоднородностей, отличающихся фазой коэффициента отражения и расположенных в различных опорных плоскостях. Таким образом, когда неоднородность характеризуют коэффициентом отражения, то необходимо указывать, в каком месте расположена опорная плоскость.

Волна, прошедшая через неоднородность, записывается в виде:

$$C e^{ihz} = A e^{ihz} + A e^{ihl} \cdot T_1 \cdot e^{ih(z-l)} \quad , \quad (2.145)$$

где первое слагаемое — падающая волна, а второе слагаемое — вторичная волна, возбужденная первичными токами в неоднородности. Выражение (2.145) обычно записывают в виде

$$C e^{ihz} = T \cdot e^{ihz} \quad , \quad (2.146)$$

откуда следует, что коэффициент прохождения

$$T = 1 + T_1 \quad , \quad (2.147)$$

в отличие от коэффициента отражения, не зависит от положения опорной плоскости. Более того, используя лемму Лоренца (2.110), можно показать, что коэффициент прохождения для волн, падающих на неоднородность справа и слева, одинаков. Для доказательства за поле  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  в (2.110) следует принять поля собственных волн — падающей слева на неоднородность и отраженной влево от неоднородности, а за поле  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  — аналогичную сумму полей при падении волны справа. Этот вывод, конечно, неверен для невзаимных элементов в линиях передач (например, для развязывающих элементов СВЧ техники — ферритовых вентилях и циркуляторов), поскольку они содержат материалы с анизотропией проницаемости и теорема взаимности, следующая из леммы Лоренца, для них не применима.

Связь между  $R$  и  $T$ , вообще говоря, находится электродинамическим расчетом конкретной неоднородности. Однако, если неоднородность не поглощает энергии (реактивная неоднородность), то между  $R$  и  $T$  существуют определенные соотношения. Найдем сначала эту связь для симметричной неоднородности.

Поместим опорную плоскость в плоскость симметрии неоднородности, совмещенную с  $z = 0$ . Очевидно, что из-за симметрии системы для волн, падающих справа и слева, будут одинаковыми не только коэффициенты прохождения, но и коэффициенты отражения.

Пусть на неоднородность с двух сторон падают волны единичной амплитуды, но с произвольными фазами. Обозначим через  $w$  и  $u$  комплексные амплитуды этих волн при  $z = 0$ . Полное поле справа и слева от неоднородности представляет собой суперпозицию всех первоначальных, прошедших и отраженных волн. Волна, уходящая влево от неоднородности:

$$w_2 + u_1 = R u + T w \quad . \quad (2.148)$$

Волна, уходящая вправо:

$$w_1 + u_2 = T u + R w \quad . \quad (2.149)$$

Поскольку энергия не поглощается неоднородностью, то должно выполняться равенство:

$$|w_2 + u_1|^2 + |w_1 + u_2|^2 = |u|^2 + |w|^2 = 2 \quad . \quad (2.150)$$

Из-за произвольности фаз у амплитуд  $w$  и  $u$  для выполнения равенства (2.150) требуется, чтобы  $R$  и  $T$  подчинялись двум соотношениям:

$$|T|^2 + |R|^2 = 1 \quad (2.151)$$

$$T R^* + R T^* = 0 \quad \text{Re}(T R^*) = \text{Re}(R T^*) = 0 \quad . \quad (2.152)$$

Соотношение (2.151) выражает закон сохранения энергии в случае реактивной неоднородности. Условие (2.152) означает, что фазы  $R$  и  $T$  симметричной неоднородности, не поглощающей энергии, сдвинуты на  $\pi/2$  друг относительно друга.

Заметим, что условие (2.152) не имеет универсального характера, поскольку фаза коэффициента отражения зависит от выбора опорной плоскости (см.(2.144)). Однако, в линиях с симметричными неоднородностями его удобно использовать при расчетах из-за естественности выбора положения опорной плоскости. В случае несимметричной реактивной неоднородности абсолютные величины коэффициентов отражения справа и слева равны и удовлетворяют условию (2.151). При этом можно найти такое положение опорной плоскости, чтобы выполнялось и условие (2.152). Если размер неоднородности вдоль направления распространения существенно меньше длины волны (например, неоднородность - тонкая пленка), то за положение опорной плоскости принимается координата неоднородности.

Поскольку любая бегущая волна переносит э.-м. энергию, то из выражения для вектора Пойнтинга следует, что в волне должны быть составляющие  $E_t$  и  $H_t$ , перпендикулярные направлению распространения волны. Направления векторов Пойнтинга в прямой и встречной волнах противоположны, откуда следует, что если поля прямой волны записаны в виде:

$$E_t^+ = A e^{ihz} \quad , \quad H_t^+ = B e^{ihz} \quad , \quad (2.153)$$

то составляющая одного из полей (электрического или магнитного) в отраженной волне должна быть отрицательной, например,

$$E_t^- = R e^{2ihl} \cdot A e^{-ihz} \quad , \quad H_t^- = -R e^{2ihl} \cdot B e^{-ihz} \quad , \quad (2.154)$$

где  $l$  — координата опорной плоскости.

Естественно, что коэффициент отражения  $R$  в (2.154) — один и тот же, поскольку связь между электрическим и магнитным полями в бегущей волне определяется только электродинамическими свойствами линии.

## 2.7 Основные способы измерения коэффициента отражения в волноводе

Из (2.145) и (2.147) следует, что поля между источником и неоднородностью определяются коэффициентом отражения. Рассмотрим теперь, как из картины этих полей определить коэффициент отражения.

При  $0 < z < l$  поля имеют вид:

$$E = A e^{ihz} + R e^{2ihl} \cdot A e^{-ihz} \quad , \quad (2.155)$$

$$H = B e^{ihz} - R e^{2ihl} \cdot B e^{-ihz} \quad . \quad (2.156)$$

Записав  $R = |R| e^{i\Phi}$ , из (2.155) имеем для электрического поля:

$$E = A e^{ihz} (1 - |R| e^{2ihl+i\Phi}) + 2A |R| e^{2ihl+i\Phi} \cos hz \quad . \quad (2.157)$$

Первое слагаемое в (2.157) — прямая бегущая волна, а второе — суперпозиция прямой и отраженной волн одинаковой амплитуды, так называемая стоячая волна.

Для магнитного поля имеем:

$$H = B e^{ihz} (1 - |R| e^{2ihl+i\Phi}) + 2iB |R| e^{2ihl+i\Phi} \sin hz \quad . \quad (2.158)$$

Из сравнения (2.157) и (2.158) видно, что в стоячей волне магнитное и электрическое поля сдвинуты, во-первых, на  $\Lambda/4$  в пространстве (вдоль оси  $z$ ), и, во-вторых, фаза магнитного поля отстает от электрического на  $\pi/2$ .

Чтобы определить коэффициент отражения из (2.157) или (2.158), измеряют распределение поля вдоль оси  $z$  между источником и неоднородностью. При измерениях обычно пользуются зондами или петлями, а сигнал с них измеряют квадратичным детектором. В этом случае выходной сигнал  $u$  пропорционален среднему квадрату напряженности поля. Например, при измерении электрического поля:

$$u \propto 1 + |R|^2 + 2|R| \cos(2hz - 2hl - \Phi) \quad . \quad (2.159)$$

После измерения обычно вычисляют  $\sqrt{u}$ , формально переходя к напряженности поля в линии. Из (2.159) следует, что при передвижении зонда вдоль оси напряженность изменяется от максимального значения  $1 + |R| \propto \sqrt{u_{max}}$  до минимального  $1 - |R| \propto \sqrt{u_{min}}$ .

Как следует также из (2.159), расстояние между соседними максимумом и минимумом составляет  $\Lambda/4$ . Отношение максимальной и минимальной напряженностей поля, измеренных таким методом, называется коэффициентом стоячей волны (к.с.в.) или коэффициентом стоячей волны напряжения (к.с.в.н.), и, согласно (2.159):

$$\text{к.с.в.} = \sqrt{\frac{u_{max}}{u_{min}}} = \frac{1 + |R|}{1 - |R|} \quad . \quad (2.160)$$

Таким образом, по измеренному к.с.в. определяется модуль коэффициента отражения:

$$|R| = \frac{\text{к.с.в.} - 1}{\text{к.с.в.} + 1} \quad . \quad (2.161)$$

Если отраженной волны нет, то сигнал  $u$  постоянен вдоль линии и к.с.в. = 1. Это означает, что вся энергия падающей волны поглощается в неоднородности — случай полного согласования линии с нагрузкой. Если же неоднородность полностью отражает падающую волну, то к.с.в. =  $\infty$ . В этом случае в точках, называемых узлами, напряженность электрического поля падает до нуля, а в точках, сдвинутых на  $\Lambda/4$  относительно узлов и называемых пучностями, электрическое поле максимально. Графически изменение напряженности вдоль оси представлено на рис.2.5.

Заметим, что иногда при измерениях коэффициента отражения вместо понятия коэффициента стоячей волны пользуются коэффициентом бегущей волны — к.б.в. = (к.с.в.)<sup>-1</sup>.

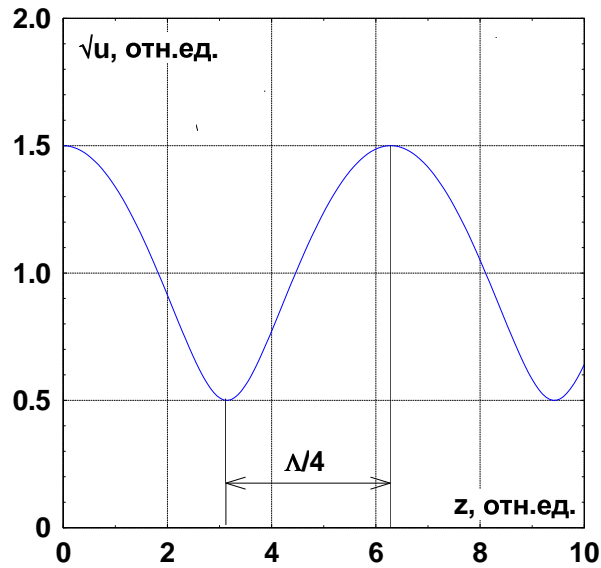


Рис. 2.5: Качественная картина распределения поля вдоль линии передачи

Для того, чтобы определить фазу  $\Phi$  коэффициента отражения, в выражение (2.159) необходимо подставить электрическую длину  $hl$  до опорной плоскости. Если она заранее неизвестна, то распространенная методика измерения фазы состоит в следующем. Неоднородность, подсоединенную к линии в точке  $l$ , заменяют, если это возможно, полностью отражающей нагрузкой и в линии создается режим чисто стоячей волны. Измеренное положение узла при таком закорачивании линии является опорным для определения фазы  $\Phi$ . При присоединении к линии измеряемой неоднородности узел может сдвигаться относительно опорного положения на  $\Delta z$ . Если он сдвигается к неоднородности, то, как следует из (2.159),  $\Phi = h \Delta z > 0$ , а если к источнику, то  $\Phi = h \Delta z < 0$ . Далее измеренную фазу нетрудно привязать к любой опорной плоскости. Заметим, что при этом методе измерения фазу неоднородности можно определить только с точностью до  $\pi n$ , что для многих практических нужд оказывается вполне достаточным. Ясно, что измерение распределения полей вдоль линии передачи, что необходимо для определения к.с.в., реально проводить только в диапазонах длин волн от дециметрового до миллиметрового, где эти измерения являются традиционными. Заметим, что во многих случаях требования к неоднородностям в линиях СВЧ, а также параметры стандартных СВЧ элементов характеризуют не коэффициентом отражения, а величиной к.с.в.

Распространенным прибором для измерения к.с.в. является измерительная линия, представляющая собой отрезок волновода или коаксиала, длина которого — несколько длин волн в соответствующей линии, и в котором прорезана длинная продольная щель шириной много меньшей длины волны. Вдоль щели на каретке перемещается электрический зонд или петля для измерения поля вдоль линии. Зонд или петля нагружены на квадратичный детектор, сигнал с которого поступает на регистрирующий прибор. Измерительная линия включается между генератором СВЧ и измеряемой неоднородностью. Естественно, что для каждого типа волны и сечения линии передачи должна

использоваться соответствующая измерительная линия. Например, стандартная измерительная линия волноводного типа представляет собой отрезок прямоугольного волновода, работающего на волне  $H_{10}$ , продольная щель в котором прорезана по центру широкой стенки. Такая щель слабо возмущает поля в волноводе, поскольку в этом месте токи у волны  $H_{10}$  практически отсутствуют.

В другом методе для измерения коэффициента отражения используют направленный ответвитель. Направленные ответвители служат для ответвления части волны, причем одного направления — прямой или встречной из основного тракта. Конструкция волноводного направленного ответвителя схематически представлена на рис.2.6. Это — два волновода одного сечения, связанные через систему щелей или отверстий в общей стенке, причем система связи через отверстия или щели в общей стенке волноводов рассчитана таким образом, что волна, распространяющаяся в основном волноводе, эффективно возбуждает в ответвляющем волноводе только волну того же направления. На одном из торцов ответвляющего волновода помещается поглощающая нагрузка с к.с.в.  $\approx 1$  и тогда амплитуда волны на его открытом торце пропорциональна амплитуде волны соответствующего направления в основном волноводе. В зависимости от связи между волноводами ответвители различают по переходному затуханию, то есть по тому, какая часть волны ответвляется.

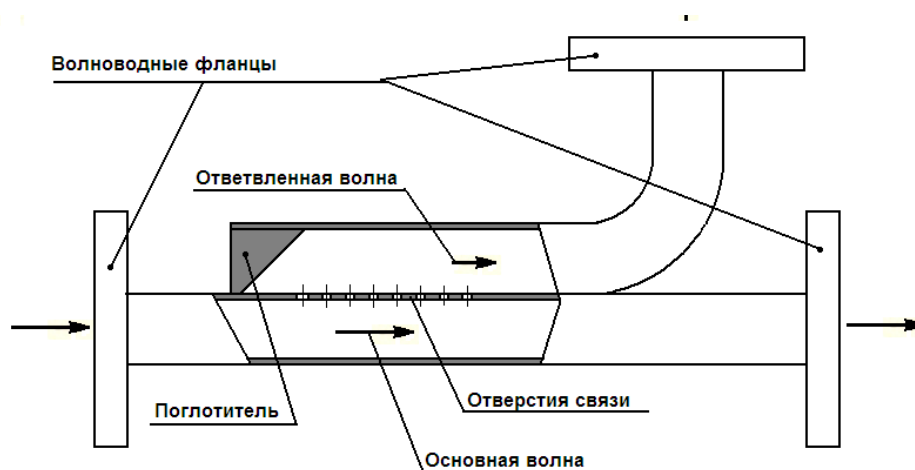


Рис. 2.6: Направленный ответвитель в разрезе

Коэффициент отражения измеряется с помощью направленного ответвителя следующим образом. Ответвитель включают в линию между генератором и неоднородностью, причем, если используется один ответвитель, то в одном опыте он включается на измерение прямой волны, а в другом опыте — на измерение отраженной. Можно эти измерения проводить одновременно, используя два ответвителя, включенных в противоположных направлениях. Такая схема используется в стандартных приборах, называемых рефлектометрами. Следует заметить, что хотя в простейших схемах измерения с помощью направленного ответвителя можно определить только модуль коэффициен-



та отражения, однако при фиксированной амплитуде прямой волны измерения можно провести существенно быстрее, чем с помощью измерительной линии.

Аналогичным образом можно рассмотреть поля в линии с произвольным числом неоднородностей. При этом, естественно, нужно оставаться в рамках сделанных предположений: поля рассматривать в виде прямых и отраженных волн только на однородных участках линии, где можно описывать свойства неоднородностей их коэффициентами отражения и прохождения.

Корректный подход к исследованиям с применением СВЧ требует знания основных характеристик СВЧ тракта и, прежде всего, коэффициента стоячей волны. Одна из наиболее часто встречающихся задач в технике СВЧ — согласование элементов СВЧ тракта. Под термином "согласование" в большинстве случаев понимают создание на определенном участке тракта режима чисто бегущей волны (т.е.  $k.c.v. = 1$ ), когда вся мощность волны поглощается нагрузкой. В часто встречающихся случаях минимизация отраженной волны является условием нормальной работы электронных СВЧ приборов - усилителей и генераторов СВЧ колебаний.

В технике СВЧ к настоящему времени разработано много методов и устройств как для согласования отдельных участков тракта, так и для подавления отраженных волн. Остановимся на одном методе, простом и часто используемом на практике — развязке отдельных участков СВЧ трактов с помощью аттенуаторов. Аттенуатор — это устройство, помещаемое в тракт, которое в идеале только поглощает, но не отражает падающую на него волну. Легко понять, что при включении между источником и нагрузкой аттенуатора с коэффициентом прохождения  $T$  отраженная волна уменьшается по амплитуде в  $T^2$  раз. Хотя затухание волн из-за омических потерь является, вообще говоря, вредным явлением, однако в СВЧ трактах, предназначенных для измерительных целей, затухание может играть положительную роль. Даже в относительно простых трактах с малыми потерями из-за неизбежных отражений на неоднородностях в различных местах тракта могут возникать стоячие волны. В результате картина продольного распределения полей может иметь сложный вид и, к тому же, может существенно отличаться от ожидаемой. При включении аттенуаторов в отдельные участки тракта уменьшается как  $k.c.v.$ , так и не всегда желательные электромагнитные связи между элементами тракта. В этом случае уменьшение  $k.c.v.$  приводит, как правило, к увеличению широкополосности тракта. При выборе параметров аттенуаторов обычно исходят из компромисса между допустимой величиной  $k.c.v.$  и необходимым уровнем сигналов.

В наиболее распространенных конструкциях аттенуаторов поглощающим элементом в волноводе являются вставки из материалов с большими потерями в СВЧ диапазоне — из карбонильного железа, резины с металлическими или графитовыми добавками и т.п. Форма, размеры и расположение этих вставок в корпусе аттенуатора рассчитываются (обычно численно) таким образом, чтобы при заданном ослаблении волны аттенуатором его собственный  $k.c.v.$  был минимальным.

Поскольку СВЧ устройства используют для различных целей в технике и научных исследованиях, разработаны как методы расчета (в большинстве случаев численные), так и конструкции разнообразных элементов волноводных трактов. По разнообразию элементной базы волноводная техника даже превышает обычную радиотехнику, в частности, потому, что требование работы на основном типе волны в волноводе приводит к необходимости использования волноводов различного сечения, рассчитанных на опре-

деленные диапазоны длин волн — 10-см , 7-см, 5-см и т.д. диапазоны. Для волноводных трактов с определенным стандартизированным сечением волновода разработаны и производятся элементы волноводного тракта с гарантированными параметрами. Кроме упомянутых выше направленных ответвителей с различным переходным затуханием, аттенуаторов различной конструкции и параметров, к стандартным элементам относятся волноводные разветвители мощности, тройники, мосты, СВЧ окна для разделения газовой и вакуумных частей волноводов, плавные волноводные переходы с одного сечения на другое и т.п. Параметры и характеристики стандартных элементов описаны в специальных справочниках по волноводам.

В отличие от волноводов, расчеты трактов с линиями, поддерживающими чисто поперечные волны, в частности, коаксиальных трактов, можно с достаточной точностью проводить аналитически на основе развитых в радиотехнике квазистатических методов. Рассмотрим принцип таких расчетов на простейшем примере.

Приведем расчет коэффициента отражения в линии с волновым сопротивлением  $Z$ , нагруженной на конце комплексным импедансом  $Z_0$ . На практике в подавляющем числе случаев размеры нагрузки существенно меньше длины рабочей волны, поэтому связь амплитуд тока и напряжения для нагрузки можно выразить через закон Ома в комплексном виде:

$$U = Z_0 I \quad . \quad (2.162)$$

Эти ток и напряжение являются суперпозициями амплитуд падающей и отраженной волн (2.90, 2.91) в месте расположения нагрузки:

$$U = U_+ + U_- \quad , \quad (2.163)$$

$$I = I_+ - I_- \quad . \quad (2.164)$$

Из (2.163), (2.164) и (2.80) получаются выражения для коэффициента отражения по току

$$R_I = \frac{I_-}{I_+} = \frac{Z - Z_0}{Z_0 + Z} \quad (2.165)$$

и коэффициента отражения по напряжению

$$R_U = \frac{U_-}{U_+} = \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z} \quad , \quad (2.166)$$

которые отличаются только знаком.

Нетрудно видеть, что при отсутствии нагрузки на конце линии ( $Z_0 = \infty$ ) величины  $R_U = 1$ ,  $R_I = -1$ , а при коротке линии ( $Z_0 = 0$ ) —  $R_U = -1$ ,  $R_I = 1$ .

Если подставить (2.166) в (2.163) и (2.163) в (2.164), то можно обосновать эквивалентную схему линии : как генератора напряжения с внутренним сопротивлением  $Z$  и э.д.с. =  $2U_+$  или генератора тока  $2I_+$  и шунтовым сопротивлением  $Z$ .

## Глава 3

# Поверхностные волны

Поверхность материала (в общем случае — поверхность раздела между двумя средами) разграничивает области, где параметры электромагнитного поля могут отличаться — разным средам соответствуют разные волновые вектора электромагнитных волн, разные соотношения между компонентами полей и т.п.

При распространении электромагнитных волн в линиях передачи энергии, и, в частности, в волноводах, как показано в предыдущей главе, основная часть энергии волны заключена в объёме волновода, ограниченном его металлическими стенками. Наличие поглощения в стенках волновода сводится, в основном, к потере электромагнитной энергии, которая частично переходит в тепло. Однако, наличие поверхности раздела может приводить не только к потерям энергии "объемных" волн, но и появлению нового класса волн, тесно связанных с поверхностями раздела. Для этих волн поверхность раздела при определенных условиях является направляющей и такие "поверхностные волны" переносят энергию вдоль поверхности.

### 3.1 Поверхностные волны над двумерной диэлектрической плоскостью

Наиболее простым случаем поверхности раздела является плоскость (ее координата  $x = 0$ , от координаты  $y$  поля не зависят и  $z$  - перпендикулярно плоскости) между свободным пространством и диэлектриком с комплексной проницаемостью  $\varepsilon$ .

Если считать, что волна распространяется вдоль оси  $z$ , то, как следует из требования конечности энергии, переносимой этой волной, она должна затухать при удалении от поверхности раздела. Если она распространяется вдоль оси  $z$  с комплексным волновым числом  $h = h' + i h''$ , то от плоскости раздела (по оси  $x$ ) она, как следует из волнового уравнения, затухает наружу с комплексным коэффициентом  $p = p' + i p''$  ( $x > 0$ ) и внутрь диэлектрика - с комплексным коэффициентом  $p_1 = p'_1 + i p''_1$  ( $x < 0$ ). Рассчитаем далее распространение волн вблизи поверхности, определив фазовую скорость и коэффициенты пространственного затухания в зависимости от свойств диэлектрика. Комплексность диэлектрической проницаемости позволяет применить результаты расчета практически к любому диэлектрику, в том числе и к металлу. Выделим среди поверхностных волн быстрые, у которых фазовая скорость  $v_{ph} \geq c$ , и замедленные —

$v_{ph} < c$  (см. раздел 1.3).

Для переноса энергии, т.е. существования составляющей вектора Пойнтинга по координате  $z$ , необходимо наличие двух компонент поля в волне —  $E_x$  и  $H_y$ . При этом, используя непрерывность тангенциальных компонент полей при  $x = 0$ , поля волны в свободном пространстве (при  $x \geq 0$ ) можно получить в виде:

$$E_x = A \cdot \exp\{ihz - px\} \quad , \quad (3.1)$$

$$H_y = A \cdot \frac{k}{h} \cdot \exp\{ihz - px\} \quad , \quad (3.2)$$

$$E_z = -i A \cdot \frac{p}{h} \cdot \exp\{ihz - px\} \quad , \quad (3.3)$$

а в диэлектрике (при  $x \leq 0$ ) как:

$$E_x = A \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \exp\{ihz + p_1x\} \quad , \quad (3.4)$$

$$H_y = A \cdot \frac{k}{h} \cdot \exp\{ihz + p_1x\} \quad , \quad (3.5)$$

$$E_z = i A \cdot \frac{p_1}{h\varepsilon} \cdot \exp\{ihz + p_1x\} \quad , \quad (3.6)$$

Из волнового уравнения следуют комплексные соотношения:

$$h^2 - p^2 = k^2 \quad , \quad (3.7)$$

$$h^2 - p_1^2 = k^2\varepsilon \quad . \quad (3.8)$$

Из-за непрерывности  $E_z$  при  $x = 0$  имеем:

$$p_1 = -\varepsilon p \quad , \quad (3.9)$$

и, с учетом (3.7, 3.8), получаем:

$$p = i \cdot \frac{k}{\sqrt{\varepsilon + 1}} \quad , \quad (3.10)$$

$$p_1 = -i \cdot \frac{k\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon + 1}} \quad , \quad (3.11)$$

$$h = k \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}} \quad . \quad (3.12)$$

Чтобы волна экспоненциально спадала от плоскости наружу, необходимо, чтобы

$$p' > 0 \quad , \quad (3.13)$$

то есть

$$\operatorname{Re} \left( i \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + 1}} \right) > 0 \quad , \quad (3.14)$$

а чтобы она была замедленной:

$$h' > k \quad , \quad (3.15)$$

то есть

$$\operatorname{Re} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}} \right) > 1 \quad . \quad (3.16)$$

При анализе (3.14, 3.16) воспользуемся соотношением (основная ветвь корня):

$$\sqrt{z} = \sqrt{x + iy} = \sqrt{\frac{x + |z|}{2}} + i \frac{y}{\sqrt{2(x + |z|)}} \quad . \quad (3.17)$$

Обозначив  $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ , имеем

$$p' = \frac{k}{|\varepsilon + 1|} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2[(\varepsilon_1 + 1) + |\varepsilon + 1|]}} \quad , \quad (3.18)$$

$$p'' = \frac{k}{|\varepsilon + 1|} \cdot \sqrt{\frac{(\varepsilon_1 + 1) + |\varepsilon + 1|}{2}} \quad , \quad (3.19)$$

откуда следует, что для выполнения (3.14) необходимо только, чтобы

$$\varepsilon_2 > 0 \quad . \quad (3.20)$$

Используя (3.9), несложно показать, что при условии (3.20) одновременно выполняется неравенство:

$$p'_1 > 0 \quad , \quad (3.21)$$

то есть вглубь диэлектрика поверхностная волна также затухает.

Заметим, что противоположное условие  $\varepsilon_2 < 0$  может выполняться для активных сред, которых мы здесь не рассматриваем.

Для анализа волнового числа  $h$  запишем:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}} = \frac{1}{|\varepsilon + 1|} \cdot \sqrt{(|\varepsilon|^2 + \varepsilon_1) + i\varepsilon_2} \quad . \quad (3.22)$$

откуда

$$h' = \frac{k}{|\varepsilon + 1|} \cdot \sqrt{\frac{|\varepsilon|^2 + \varepsilon_1 + |\varepsilon| \cdot |\varepsilon + 1|}{2}} \quad , \quad (3.23)$$

$$h'' = \frac{k}{|\varepsilon + 1|} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2(|\varepsilon|^2 + \varepsilon_1 + |\varepsilon| \cdot |\varepsilon + 1|)}} \quad (3.24)$$

Если  $|\varepsilon| \gg 1$ , то (3.23) можно приближенно записать как

$$h' = k \left( 1 - \frac{\varepsilon_1}{2|\varepsilon|^2} \right) \quad , \quad (3.25)$$

откуда следует, что для приближенного выполнения неравенства (3.15) необходимо, чтобы

$$\varepsilon_1 < 0 \quad . \quad (3.26)$$

Точные условия на границу  $\varepsilon_2(\varepsilon_1)$  между быстрыми и замедленными поверхностными волнами находятся следующим образом.

Возведем неравенство (3.15), подставив в него (3.23), в квадрат, что дает:

$$|\varepsilon| \cdot |\varepsilon + 1| \geq |\varepsilon|^2 + 3\varepsilon_1 + 2 \quad . \quad (3.27)$$

Возведя (3.27) еще раз в квадрат и раскрыв модули, имеем:

$$\varepsilon_2^2 \cdot (\varepsilon_1 + 3/4) \leq -(\varepsilon_1 + 1)^3 \quad , \quad (3.28)$$

Кривая, определяемая функцией

$$\varepsilon_2(\varepsilon_1) = \sqrt{-\frac{(1 + \varepsilon_1)^3}{\varepsilon_1 + 3/4}} \quad , \quad (3.29)$$

имеет область определения  $-1 < \varepsilon_1 < -3/4$ . Она начинается в точке  $\varepsilon_1 = -1$  и обращается в бесконечность в точке  $\varepsilon_1 = -3/4$ . Область замедленных ( $h' > k$ ) поверхностных волн лежит в верхней плоскости  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  слева от этой кривой. Справа от кривой (3.29) лежит область быстрых ( $h' < k$ ) поверхностных волн. (рис. 3.1) В случае же диэлектрика без потерь, то есть при  $\varepsilon_2 = 0$ , поверхностная волна над диэлектриком трансформируется в объёмную плоскую волну в свободном пространстве, падающую на диэлектрик под углом Брюстера, а внутри диэлектрика - в плоскую волну, полностью проходящую внутрь диэлектрика, что нетрудно увидеть из формул (3.10 – 3.12) при сравнении их с формулами Френеля.

Хотя трудно подобрать вещество естественного происхождения с параметрами в диапазоне  $-1 < \varepsilon_1 < -3/4$ , любопытно получить выражения для полей над диэлектриком на границе раздела между быстрыми и медленными волнами. На этой границе, как можно убедиться, подставив (3.29) в (3.23) и (3.24),  $\text{Re}(h/k) = 1$  и  $\text{Im}(h/k) = 1$ , т.е.

$$h = k + i k \quad , \quad (3.30)$$

а из комплексного уравнения (3.7) определяется коэффициент затухания от поверхности:

$$p = p' + ip'' = k \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} + i k / \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \quad . \quad (3.31)$$

Итак, при  $\varepsilon_2 > 0$  все волны, распространяющиеся над диэлектрической плоскостью — и замедленные, и быстрые — являются поверхностными. Они затухают как вдоль направления распространения (по оси  $z$ ), так как  $\text{Im}(h/k) > 0$ , так и поперек (по оси  $x$ ), так как  $\text{Re}(p/k) > 0$ .

**Рассмотрим теперь энергетические соотношения в поверхностной волне.**

Выпишем выражения для составляющих вектора Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \cdot \text{Re}[\vec{E} \vec{H}^*] \quad (3.32)$$

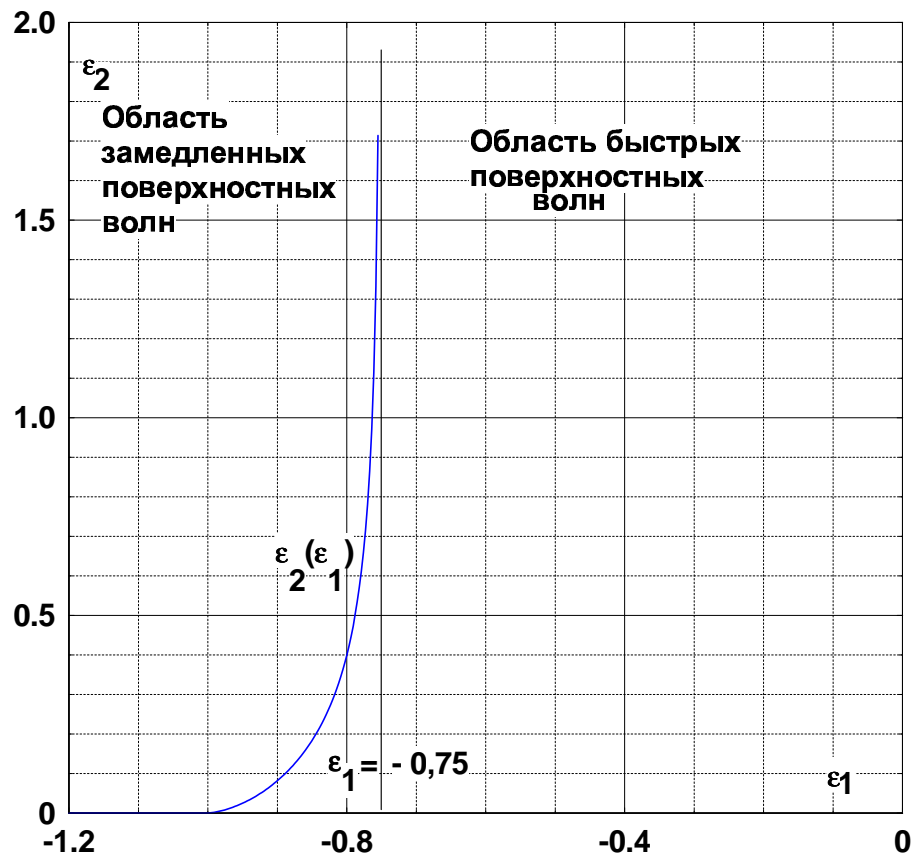


Рис. 3.1: Области замедленных и быстрых поверхностных волн над диэлектриком

применительно к поверхностной волне над диэлектриком вида (3.1–3.3):

$$S_x = -\frac{c}{8\pi} \cdot A^2 \cdot \frac{p'' k}{|h|^2} \cdot e^{-2(h''z+p'x)}, \quad (3.33)$$

$$S_z = \frac{c}{8\pi} \cdot A^2 \cdot \frac{h' k}{|h|^2} \cdot e^{-2(h''z+p'x)}. \quad (3.34)$$

Мощность (на единицу длины по оси  $y$ ), поступающая в диэлектрик, получается интегрированием (3.33) по  $z$  от 0 до  $\infty$  при  $x = 0$ , а мощность, переносимая поверхностной волной (также на единицу длины по оси  $y$ ) интегрированием (3.34) по  $x$  от 0 до  $\infty$  при  $z = 0$ :

$$\Sigma_x = -\frac{c}{8\pi} \cdot A^2 \cdot \frac{p'' k}{|h|^2 \cdot 2h''}, \quad (3.35)$$

$$\Sigma_z = \frac{c}{8\pi} \cdot A^2 \cdot \frac{h' k}{|h|^2 \cdot 2p'}. \quad (3.36)$$

Эти мощности, в согласии с законом сохранения энергии, равны по величине, поскольку, как нетрудно убедиться из (3.7),  $h' h'' = p' p''$ .

Интерес к исследованию поверхностных волн первоначально возник в начале 20-го века в связи с нуждами радиосвязи. В частности, поскольку земная поверхность - грунт, водные пространства - являются проводящими диэлектриками, то поверхностные радиоволны (волны Ценнека, 1907 г.) считались перспективными для загоризонтной связи. Дальнейшие исследования не подтвердили эффективности такой связи, однако эти работы заметно способствовали прогрессу в электродинамике поверхностных волн. В частности, развитые методики расчета оказались существенными для уточнения решений задач дифракции радиоволн на поглощающих объектах, что важно для целей радиолокации.

Другое прикладное направление заключается в измерении параметров поверхностных волн при их распространении над материалами с целью изучения физики поверхностных слоев. Как следует из вышеприведенных формул, из измерений скорости распространения поверхностных волн и их коэффициентов затухания от поверхности можно определить комплексную проницаемость материалов. Этот метод, который развит в диапазонах длин волн от СВЧ до видимого света, оказался ценным, в частности, для изучения свойств различных металлов, в том числе в реальной ситуации, когда поверхность металла покрыта тонкой оксидной пленкой. Расчет распространения поверхностных волн над такой двуслойной структурой несложно провести аналитическими или численными методами.

В последнее время интерес к поверхностным волнам возник в связи с широким развитием микро- и нанoeлектроники. Большинство современных радиоэлектронных устройств конструктивно представляют собой двумерные слоистые (пленки металла или полупроводника на диэлектрической подложке) структуры с расположенными на них миниатюрными активными или пассивными радиоэлементами. Сигналы между элементами передаются с использованием частот в ГГц диапазоне. При этом в распространение э.-м. сигналов вдоль таких "пленочных" линий передачи могут вносить существенный вклад поверхностные волны, а в некоторых случаях полезно, чтобы он был определяющим. С поверхностными волнами связаны, естественно, токи, распространяющиеся вместе с ними в тонком поверхностном слое проводника. В физике твердого



тела для этих токов, если существует необходимость их квантовать, принято название "поверхностные плазмоны". В связи с этим рассмотрим подробнее распространение поверхностных волн над металлами.

При рассмотрении сильного скин-эффекта (см. раздел 1.4) в СВЧ области спектра действительной частью диэлектрической проницаемости можно пренебречь по сравнению с мнимой частью. Однако, как показано выше, для существования поверхностных волн у металлов необходимо учитывать и действительную часть диэлектрической проницаемости.

Более полное рассмотрение электромагнитных свойств металлов можно провести, основываясь на эмпирических формулах, введенных в 1922 году П. Друде (так называемая модель Друде). В этой модели, так же как и при описании проводимости, металл рассматривается как жесткая решетка ионов с движущимися между ними электронами проводимости. Однако, кроме изменения импульса электронов при их столкновении с ионами, что выражается частотой затухания

$$\omega_\tau = 2\pi F_p = \frac{1}{\tau} \quad , \quad (3.37)$$

$\tau$  - среднее время жизни электрона, в модели Друде учитывается кулоновское взаимодействие электронов и создаваемое ими электрическое поле – так же, как в физике плазмы, – что приводит к собственным колебаниям электронов на плазменной частоте:

$$\omega_p = 2\pi F_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m \varepsilon_\infty}} \quad , \quad (3.38)$$

где  $N$  - электронная плотность,  $e$  и  $m$  - заряд и эффективная масса электрона в металле. Параметр  $\varepsilon_\infty \sim 1$  - высокочастотная диэлектрическая проницаемость металла, которая определяется связанными электронами и она существенна только в видимом и ультрафиолетовом диапазонах.

Квантовомеханическое поведение электронов в металле в модели Друде учитывается эмпирически, в частности, через эффективную массу электрона. Тем не менее, формулы Друде качественно подтверждаются измерениями для многих металлов в видимой и инфракрасной (вплоть до ТГц диапазона) областях, хотя при этом для количественного согласия с расчетом приходится использовать подгоночные параметры.

Комплексная диэлектрическая проницаемость металла  $\varepsilon_1 + i\varepsilon_2$  зависит от частоты следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_\tau^2} \quad , \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_\tau \omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \omega_\tau^2)} \quad , \quad (3.40)$$

При этом у большинства металлов плазменная частота находится в ультрафиолетовой, а частота затухания - в инфракрасной области спектра, то есть  $\omega_p \gg \omega_\tau$ . Например, у алюминия плазменная частота, вычисляемая из данных измерений, составляет 3,6 ПГц (длина волны – около 100 нм), а частота затухания - 21 ТГц (длина волны – около 15 мкм). В качестве иллюстрации на рис. 3.2 приведены зависимости  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  для

алюминия от частоты, полученные по формулам (3.39) и (3.39), где численные значения частот  $\omega_p$  и  $\omega_\tau$  найдены обработкой нескольких экспериментальных измерений по ИК диапазону. При частоте около 20 ТГц  $\varepsilon_2 = |\varepsilon_1|$  и  $\varepsilon_2$  растет в сторону меньших частот, а в ИК и видимой области спектра  $\varepsilon_2 < |\varepsilon_1|$ .

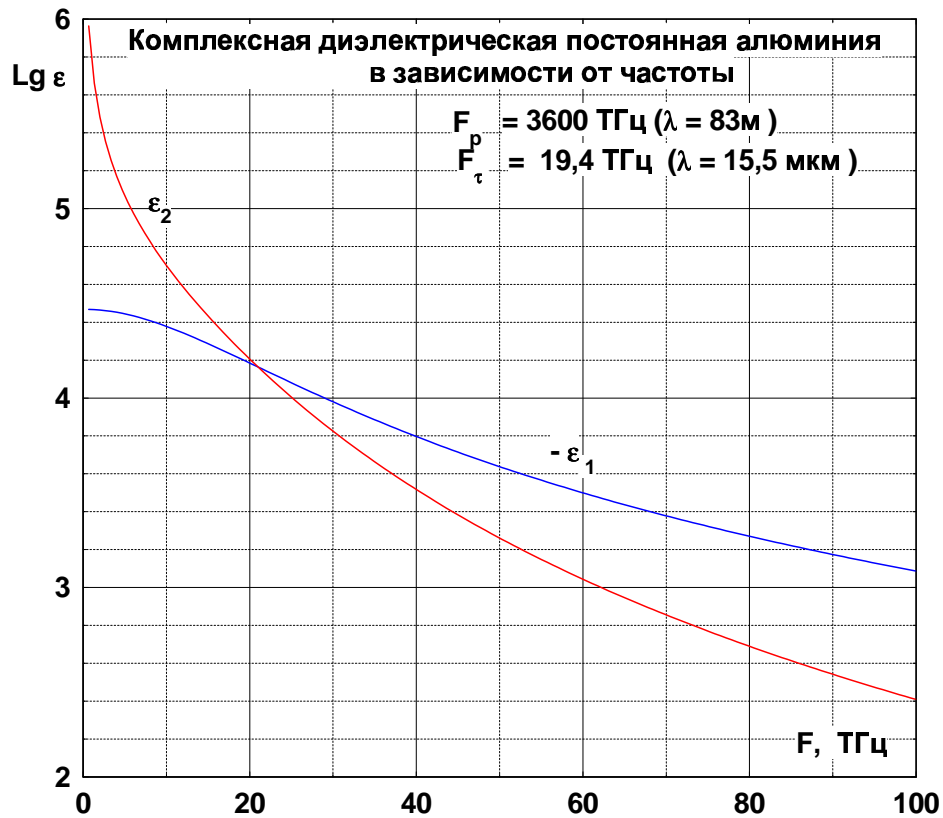


Рис. 3.2: Комплексная диэлектрическая постоянная алюминия от частоты

При низких частотах, когда  $\omega \ll \omega_p, \omega_\tau$ :

$$\varepsilon_1(0) = - \left( \frac{\omega_p}{\omega_\tau} \right)^2 = \text{const} \quad , \quad (3.41)$$

а проводимость на постоянном токе

$$\sigma_0 = \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_\tau} \quad . \quad (3.42)$$

Для расчета параметров поверхностных волн над металлом в терагерцовом и СВЧ диапазонах, с учетом приведенных выше неравенств, можно считать, что

$$\varepsilon_1 \simeq - \frac{4\pi\sigma}{\omega_\tau} \cdot \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_\tau^2} \right) \quad , \quad (3.43)$$

$$\varepsilon_2 \simeq \frac{4\pi\sigma}{\omega} \cdot \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_\tau^2} \right) \quad . \quad (3.44)$$

Выпишем теперь постоянные распространения поверхностной волны в этом случае, когда  $|\varepsilon| \gg 1$  и  $\varepsilon_2 \gg -\varepsilon_1$ . Из (3.18, 3.19, 3.22, 3.23) имеем:

$$p'_m \simeq k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_2}}, \quad (3.45)$$

$$p''_m \simeq k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_2}}, \quad (3.46)$$

$$h'_m \simeq k \cdot \left(1 + \frac{|\varepsilon_1|}{2\varepsilon_2^2}\right), \quad (3.47)$$

$$h''_m \simeq k \cdot \frac{1}{2\varepsilon_2}. \quad (3.48)$$

Подстановка (3.45) и (3.46) в соотношение между электрическим (3.2) и магнитным полем (3.3) на поверхности металла показывает, что для поверхностной волны справедливо граничное условие Леонтовича и для расчета свойств поверхностных волн над металлами можно пользоваться понятием поверхностного импеданса  $w$  (ср.(1.116)).

Из (3.45) и (3.48) следует, что затухание волны при удалении от поверхности металла в  $\sqrt{2\varepsilon_2}$  раз больше, чем затухание вдоль поверхности, однако даже затухание от поверхности мало, и эффективная область распространения волны над металлом существенно больше длины волны в свободном пространстве. Например, у алюминия на длине волны 0,2 мм  $\varepsilon_1 = -32300$ ,  $\varepsilon_2 = 426700$ , и характерная длина затухания (где поле падает в  $e$  раз) вдоль поверхности составляет около 27 м, а от поверхности - 29 мм.

Из формулы (3.47) следует, что фазовая скорость распространения волн вдоль поверхности металла меньше скорости света на небольшую величину:

$$\frac{\Delta v_f}{c} = \frac{|\varepsilon_1|}{2\varepsilon_2^2}. \quad (3.49)$$

Для алюминия на длине волны 0,2 мм это отличие – в седьмом знаке.

Мощность, переносимую поверхностной волной (на единицу длины по оси  $y$ ) над металлом, можно приближенно получить из (3.36) с учетом формул (3.45–3.48):

$$\Sigma_z \simeq \frac{c}{8\pi} \cdot A^2 \cdot \frac{\lambda\sqrt{\varepsilon_2}}{2\pi\sqrt{2}}, \quad (3.50)$$

где  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве, а  $A$  — амплитуда компоненты  $E_x$  электрического поля волны (3.1).

## 3.2 Планарный диэлектрический волновод

Как показано выше, над диэлектрической полуплоскостью при условии  $\varepsilon_2 = 0$  (диэлектрик без потерь) поверхностные волны распространяться не могут. Однако, это утверждение становится несправедливым для диэлектрика конечных размеров.

Рассмотрим диэлектрическую пластину с проницаемостью  $\varepsilon$  толщиной  $2a$ , симметрично расположенную по оси  $x$  — с границами при  $x = a$  и  $x = -a$  — и бесконечную по оси  $y$ . Вне пластины — вакуум. Волны распространяются вдоль оси  $z$  (рис.3.3).

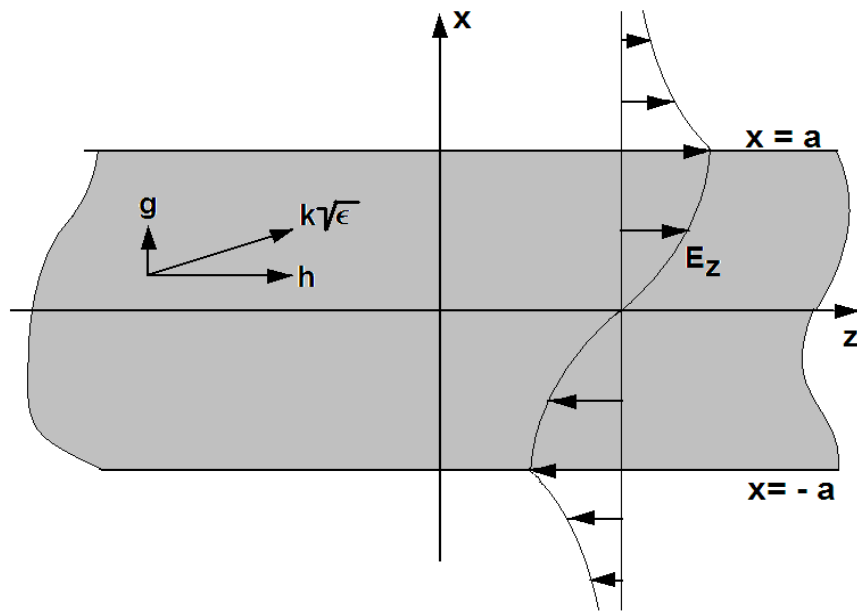


Рис. 3.3: Планарный диэлектрический волновод

Качественную картину распространения волн внутри пластины можно получить в лучевом приближении. Поле внутри нее можно представить в виде совокупности плоских волн, падающих под углом на внутренние поверхности раздела "диэлектрик–вакуум" ( $x = \pm a$ ) и волн, отражающихся от этих границ. Таким образом, диэлектрическая пластина является направляющей структурой для передачи волн по оси  $z$  — так называемый планарный диэлектрический волновод. При этом уже из лучевого рассмотрения ясно, что волны, не излучающиеся через границы диэлектрика в виде плоских волн, должны падать на эту границу под углами, большими угла полного внутреннего отражения. Из оптики также известно, что при этом поле экспоненциально спадает в вакуум от границы раздела.

Получим свойства этих волн из электродинамического расчета, рассматривая собственные волны в планарном волноводе.

Нетрудно видеть, что из-за симметрии задачи по оси  $x$  достаточно использовать в расчетах только одну границу  $x = a$ .

Как и в случае металлических волноводов, собственные волны в диэлектрических волноводах разделяются на две группы — электрические волны с ненулевой компонентой электрического поля  $E_z$  и магнитные волны с ненулевой компонентой магнитного поля  $H_z$ . В лучевом (или брюллюэновском) рассмотрении — это комбинации плоских волн различной линейной поляризации.

Мы подробно рассмотрим электрические волны в двумерном планарном волноводе, поскольку основные свойства электрических и магнитных волн в диэлектрических

волноводах одинаковы.

Симметрия планарного волновода относительно плоскости  $x = 0$  позволяет представить волны внутри диэлектрической пластины в виде совокупности волн, симметричных относительно этой плоскости (четных):

$$E_x = B \cdot \frac{h}{\varepsilon} \cdot \exp\{ihz\} \cdot \cos gx \quad , \quad (3.51)$$

$$H_y = B \cdot k \cdot \exp\{ihz\} \cdot \cos gx \quad , \quad (3.52)$$

$$E_z = -i B \cdot \frac{g}{\varepsilon} \cdot \exp\{ihz\} \sin gx \quad , \quad (3.53)$$

и асимметричных (нечетных) волн:

$$E'_x = B' \cdot \frac{h}{\varepsilon} \cdot \exp\{ihz\} \cdot \sin gx \quad , \quad (3.54)$$

$$H'_y = B' \cdot k \cdot \exp\{ihz\} \cdot \sin gx \quad , \quad (3.55)$$

$$E'_z = i B' \cdot \frac{g}{\varepsilon} \cdot \exp\{ihz\} \cos gx \quad , \quad (3.56)$$

где  $h$  – продольное, а  $g$  – поперечное волновые числа.

Над диэлектриком ( $x \geq a$ ) распространяется поверхностная волна:

$$E_x^{(s)} = A h \cdot \exp\{ihz - p(x - a)\} \quad , \quad (3.57)$$

$$H_y^{(s)} = A k \cdot \exp\{ihz - p(x - a)\} \quad , \quad (3.58)$$

$$E_z^{(s)} = -i A p \cdot \exp\{ihz - p(x - a)\} \quad , \quad (3.59)$$

где  $p$  – коэффициент затухания волны от плоскости раздела в вакуум.

Из волнового уравнения в вакууме и диэлектрике следует:

$$h^2 - p^2 = k^2 \quad , \quad (3.60)$$

$$h^2 + g^2 = k^2 \varepsilon \quad , \quad (3.61)$$

откуда следует связь между волновыми числами в диэлектрике:

$$g^2 + p^2 = k^2 (\varepsilon - 1) \quad . \quad (3.62)$$

Для четных электрических волн из-за непрерывности  $E_z$  и  $H_y$  при  $x = a$  имеем:

$$A p = B \cdot \frac{g}{\varepsilon} \cdot \sin ga \quad , \quad (3.63)$$

$$A = B \cdot \cos ga \quad , \quad (3.64)$$

а для нечетных электрических волн:

$$-A' p = B' \cdot \frac{g}{\varepsilon} \cdot \cos ga \quad , \quad (3.65)$$

$$A' = B' \cdot \sin ga \quad . \quad (3.66)$$

Из условия разрешимости систем уравнений (3.63 — 3.64) и (3.65 — 3.66) относительно  $A$  и  $B$  и, соответственно,  $A'$  и  $B'$  получаются характеристические уравнения, связывающие поперечное волновое число и коэффициент затухания для четных и нечетных волн, соответственно:

$$p a = \frac{g a}{\varepsilon} \cdot \operatorname{tg} g a \quad , \quad (3.67)$$

$$p a = - \frac{g a}{\varepsilon} \cdot \operatorname{ctg} g a \quad . \quad (3.68)$$

Множитель  $a$ , преобразующий уравнения к безразмерному виду, добавлен для удобства дальнейшего анализа.

Для вычисления  $g a$  и  $p a$  при заданных параметрах волновода  $\varepsilon$ ,  $f$  и частоты  $\omega = c k$ , к уравнениям (3.67) и (3.68) необходимо добавить уравнение (3.62), которое также запишем в безразмерном виде:

$$(g a)^2 + (p a)^2 = (k a)^2 (\varepsilon - 1) \quad . \quad (3.69)$$

Появление дополнительного уравнения для расчета волновых чисел вполне естественно, поскольку по сравнению с металлическим волноводом рядом с диэлектрическим волноводом существует еще одна — поверхностная волна с коэффициентом затухания  $p$ .

Из-за трансцендентности уравнений (3.67) и (3.68) аналитического решения этой задачи не существует и волновые числа можно рассчитать только численно или приближенно. Однако, для качественного понимания условий распространения волн в планарном диэлектрическом волноводе вполне годится графическое рассмотрение совместного решения этих уравнений в координатах  $g a$  (горизонтальная ось) и  $p a$  (вертикальная ось), которое иллюстрировано рисунком 3.4.

Правые части уравнений (3.67) и (3.68) графически представляют собой бесконечное число ветвей, что определяется функциями  $\operatorname{tg} g a$  и  $\operatorname{ctg} g a$ . На оси  $g a$  эти ветви начинаются в точках  $\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ , четные волны) или  $\pi(n + \frac{1}{2})$  (нечетные волны). Поскольку необходимо соблюсти условие  $p \geq 0$  (волны затухают в вакуум), то отрицательная часть этих ветвей при  $\pi n \leq g a \leq \pi(n + \frac{1}{2})$  в этом решении не принимается во внимание.

Уравнение (3.69) в координатах  $(g a, p a)$  представляет собой окружность с радиусом

$$\rho = k a \sqrt{\varepsilon - 1} \quad , \quad (3.70)$$

а точка пересечения этой окружности с ветвями функций в правой части уравнений (3.67) и (3.68) дает решение относительно  $p a$  и  $g a$ .

Проанализируем условия существования волн в планарном волноводе, исходя из этой графической картины. При  $\rho \leq \pi$  существует только один корень, который определяет четную волну типа  $E_{00}$ , и её называют основной; при увеличении  $\rho > \pi$ , т.е. при росте частоты, появляется второй корень, определяющий следующую волну  $E_{20}$  и т.д., то есть при увеличении частоты в диэлектрическом волноводе, как и в металлических волноводах, последовательно возникают условия распространения высших типов волн. Первое пересечение окружности (3.69) при увеличении ее радиуса с очередной

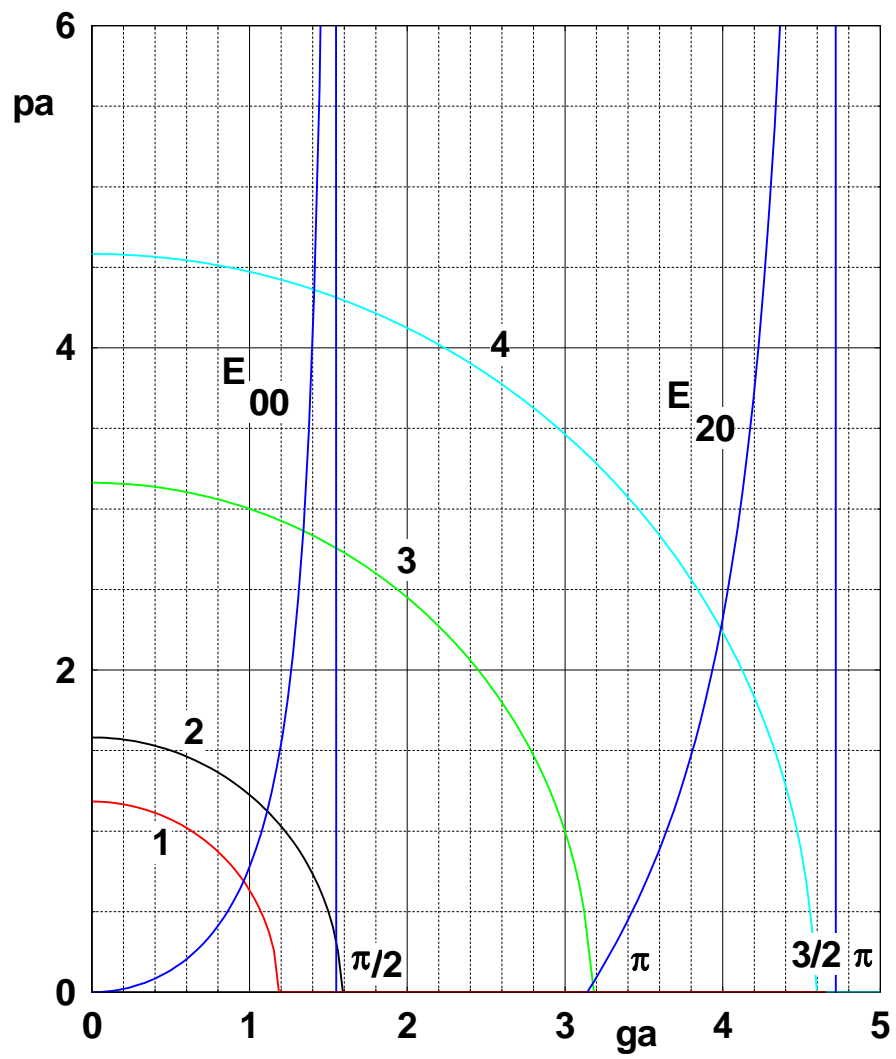


Рис. 3.4: Графическое решение характеристического уравнения

ветвью функции правой части (3.67) и (3.68) в точках  $ga = \pi n$  (для четных волн) и  $ga = \pi(n + 1/2)$  (для нечетных волн) определяет критическую частоту соответствующего типа волны, например, для четных волн:

$$k_c = \frac{\pi n}{a \sqrt{\varepsilon - 1}} \quad , \quad (3.71)$$

Четные электрические волны в двумерном случае обозначают как  $E_{2n0}$ , а нечетные —  $E_{(2n+1)0}$ . Второй нижний индекс зарезервирован для обозначения типов волн в реальных диэлектрических волноводах прямоугольного сечения.

Аналогия между диэлектрическим волноводом и металлическими линиями является весьма полезной, но неполной из-за различия граничных условий для полей на стенках. Прежде всего, отметим, что, в отличие от металлического волновода, поперечное волновое число собственной волны не является постоянным, а возрастает при увеличении частоты, асимптотически стремясь к  $\pi(n + 1/2)$  (четные волны) и  $\pi(n + 1)$  (нечетные волны) при  $f \rightarrow \infty$ .

Обсудим и другие отличия между этими линиями передачи. Распространяющаяся в диэлектрическом волноводе собственная волна сопровождается медленной ( $h \geq k$ ) поверхностной ( $p \geq 0$ ) волной вдоль наружной границы диэлектрической стенки. Наибольшее качественное отличие между этими диэлектрическими и металлическими волноводами заключается в поведении волн на критической частоте, а также ниже и вблизи нее. В металлическом волноводе на критической частоте  $h = 0$ , то есть фазовая скорость волны равна  $\infty$ , а при уменьшении частоты ниже критической волна экспоненциально затухает вдоль волновода. В диэлектрическом волноводе на критической частоте  $p = 0$  и  $h = k$ , то есть волны и в волноводе и вне его распространяются со скоростью света вдоль оси  $z$ . Условие же  $p = 0$  означает, что вне волновода поле представляет собой плоскую волну конечной амплитуды во всем пространстве, которая несет бесконечную энергию, что физически бессмысленно. Нетрудно показать, что это вызвано некорректностью выбора модели расчета волн строго на критической частоте. Для волновода конечных размеров по оси  $y$  энергия внешнего поля конечна, хотя существенная часть энергии волны находится вне волновода.

Наиболее отчетливо этот факт проявляется для основной четной электрической волны  $E_{00}$ , которая имеет критическую частоту, равную нулю, и в этом отношении она аналогична волне  $TEM$  в коаксиальной линии. Это, конечно, не означает, что по диэлектрическому волноводу, так же, как по коаксиальной линии, можно передавать постоянный ток. Низкочастотные колебания, как и при более высоких частотах, распространяются всегда только в виде волн, которые, поскольку при этом  $g \simeq 0$  и  $p \simeq 0$ , являются практически плоскими волнами и в диэлектрике и в свободном пространстве, т.е. поперечными волнами. При этом можно строго показать, что эффективность возбуждения низкочастотных волн, длина волны которых существенно превышает размеры волновода, ничтожна. В связи с этим, волну  $E_{00}$  на низких частотах использовать для передачи э.-м. энергии неэффективно. Заметим, что основная нечетная волна  $E_{10}$  имеет критическую частоту, отличную от нулевой, и аналогична волноводным волнам в обычном волноводе.



Поскольку на критической частоте

$$g_c = \frac{\pi n}{a}, \quad (3.72)$$

$$k_c = h_c = \frac{\pi n}{a \sqrt{\varepsilon - 1}}, \quad (3.73)$$

то при лучевом рассмотрении картины волн внутри волновода угол падения волны на границу "диэлектрик-вакуум" определяется формулой:

$$\operatorname{tg} \varphi_c = \frac{h_c}{g_c} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - 1}}, \quad (3.74)$$

из которой следует, что на критической частоте волны, вне зависимости от типа волны, падают на границу точно под углом полного внутреннего отражения. Разные типы волн отличаются при этом друг от друга различным числом вариаций поля поперек волновода.

С увеличением частоты выше критической угол падения волны на границу раздела увеличивается, и, поскольку при этом увеличивается волновое число  $p$ , то поверхностная волна вне диэлектрика сильнее прижимается к границе раздела. Это поведение собственной волны можно легко увидеть из графического анализа решения уравнений, как описано выше. При частоте, существенно превышающей критическую, собственная волна в волноводе распространяется с фазовой скоростью, лишь немного большей скорости света в диэлектрике, а энергия в поверхностной волне, которая сильно "прижата" к границе раздела, незначительна.

Более сложные расчеты приходится проводить при анализе поведения собственных волн на частотах меньше критической. Формально, для этого уравнения (3.62), (3.67) и (3.68) необходимо решать попарно совместно для комплексных значений волновых чисел  $h$ ,  $p$  и  $g$ . Однако, качественную картину поведения распространения волн при частотах меньше критической можно понять из лучевой трактовки. При углах падения волн внутри пластины меньше  $\varphi_c$  волны частично выходят наружу. Это означает, во-первых, что поперечное волновое число в (3.62)  $p$  нужно заменить на  $-ip$  и поверхностная волна превращается в обычную "быструю" волну, и, во-вторых, поскольку эти волны уносят часть энергии собственного колебания, продольное волновое число  $h$  становится комплексным, приобретая положительную мнимую часть. Эти волны обычно учитываются при расчете возбуждения волновода, и большая часть из них довольно быстро покидает волновод.

При формальном расчете, кроме этих "вытекающих" волн, получают "втекающие" и "антиповерхностные" волны (с волновым числом  $p = p' + ip''$ , где  $p' > 0$  и  $p'' > 0$ ). Учет этих волн приобретает смысл только тогда, когда расчет проводится не для изолированной пластины, как в данном случае, а при наличии более сложной системы, например, из нескольких параллельно расположенных волноводов.

Проведенное простейшее рассмотрение распространения электромагнитных волн в планарном диэлектрическом волноводе несложно распространить на диэлектрические волноводы другой геометрии — прямоугольного сечения, круглого и т.п. — те, которые в настоящее время широко применяются на практике. В СВЧ диапазоне диэлектрические волноводы из органических диэлектриков с малыми потерями (полиэтилена, полистирола, тефлона и др.) иногда служат как соединительные вставки между отрезками металлических волноводов, поскольку их достаточно легко можно изгибать. Значительно

шире такие линии передачи используют в последнее время в ИК и видимой областях спектра, где их называют световодами. Развитая технология изготовления световодов с малыми диэлектрическими потерями позволяет использовать такие гибкие и компактные линии передач в качестве существенных элементов информационных сетей.

### 3.3 Поверхностная волна над металлической гребенкой

Гладкая диэлектрическая (с комплексным значением  $\varepsilon$ ) плоскость — не единственный объект, над которым могут распространяться поверхностные волны. В определенном смысле "гладкостью" по отношению к электромагнитному полю обладают поверхности с нанесенной на них периодической структурой. Например, несложно доказать, что электромагнитная волна с длиной волны  $\lambda$  зеркально отражается от плоскости с периодической структурой, если  $l < \lambda$ , где  $l$  — период структуры. Покажем далее на частном примере, что периодические металлические структуры на плоскости могут поддерживать и поверхностные волны. Такого типа структуры, по электромагнитным свойствам аналогичные диэлектрикам, иногда называют "искусственными диэлектриками" (в последнее время "метаматериалами" или "фотонными кристаллами", особенно если периодические структуры трехмерные). Параметры волн над периодическими структурами можно рассчитать (обычно численно), исходя из геометрии структур.

Рассчитаем параметры поверхностной волны над "гребенкой" с периодом  $l$ , шириной паза  $d$  и глубиной паза  $b$  (рис. 3.5). Гребенка выполнена из идеально проводящего материала, ее плоскость расположена при  $x = 0$ , а при  $x > 0$  находится свободное пространство. Рассматривается двумерный случай — по оси  $y$  гребенка бесконечна. При этом будем считать, что  $l \ll \lambda$ .

Вдоль оси  $z$  при  $x = 0$  граничные условия изменяются периодически: в "пазу" гребенки (от  $z_n$  до  $z_n + d$ ) — свободное пространство, а на вершине "зуба" гребенки — металл. Таким образом, при  $x = 0$  для поля нужно ввести периодические (с периодом  $l$  вдоль оси  $z$ ) граничные условия. Эти условия приводят к периодичности полей над гребенкой, например, для электрического поля

$$\vec{E}(x, z) = \vec{E}(x, z + l) \cdot e^{i\varphi} \quad , \quad (3.75)$$

и, как легко показать из волнового уравнения, фаза  $\varphi = hl$  между полями в соседних периодах может быть произвольной и эту произвольность можно выполнить за счет произвольности продольного волнового числа  $h$ .

Распределение полей  $\vec{E}(x, z)$  на периоде определяется из решения уравнений Максвелла и граничных условий. Если искать возможность распространения над гребенкой волны с фазовым множителем  $e^{ihz}$ , то из-за периодичности системы поле волны удобнее представить в виде ряда Фурье по периоду  $l$ . Сумма гармоник в этом ряду описывает распределение полей на периоде.

Таким образом, распространяющаяся волна записывается в виде ряда:

$$\vec{E}(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{e}_n(x) \cdot \exp\left\{i \frac{2\pi n}{l} z\right\} \cdot e^{ihz} \quad . \quad (3.76)$$

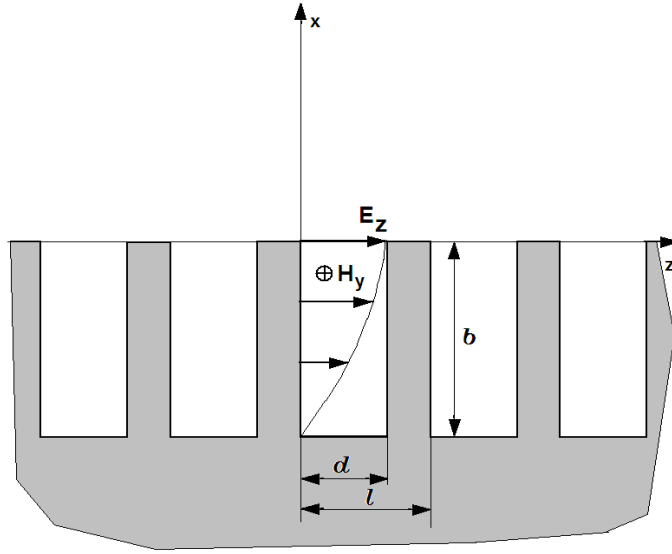


Рис. 3.5: Металлическая гребенка

Если, как обычно делают, объединить фазовые множители по знакам суммы, записав

$$h_n = h + \frac{2\pi n}{l}, (h_0 = h) \quad , \quad (3.77)$$

то каждый член суммы вида  $\vec{e}_n \cdot e^{ihnz}$  называют полем (в данном случае электрическим) пространственной гармоники волны, распространяющейся над гребенкой. При  $n = 0$  гармоника называется нулевой и, как можно показать, энергия всей волны распространяется с ее групповой скоростью. Гармоники с  $n > 0$  называют положительными, а с  $n < 0$  - отрицательными. Фазовая скорость положительных гармоник всегда положительна, а фазовая скорость отрицательных направлена в отрицательном направлении у тех гармоник, у которых  $2\pi|n|/l > h$ .

Каждая гармоника удовлетворяет уравнениям Максвелла, однако граничным условиям на гребенке удовлетворяет только их сумма вида (3.76). В частности, если изменять каким-то образом (как происходит в электронных приборах СВЧ) амплитуду одной из пространственных гармоник, то пропорционально будут изменяться все коэффициенты в ряде (3.76).

Для вычисления амплитуд пространственных гармоник и волнового числа  $h$  необходимо использовать граничные условия для полей на гребенке.

Рассмотрим волну с продольной по направлению распространения компонентой электрического поля и разложим эту компоненту в ряд Фурье с амплитудами  $a_n$ :

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot e^{-p_n x} e^{ihnz} \quad , \quad (3.78)$$

затем, используя уравнения Максвелла, выпишем другие компоненты поля:

$$E_x = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h_n}{p_n} \cdot a_n \cdot e^{-p_n x} e^{ih_n z} , \quad (3.79)$$

$$E_y = 0 , \quad (3.80)$$

$$H_x = H_z = 0 , \quad (3.81)$$

$$H_y = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k}{p_n} \cdot a_n \cdot e^{-p_n x} e^{ih_n z} , \quad (3.82)$$

и из волнового уравнения имеем

$$p_n^2 = h_n^2 - k^2 . \quad (3.83)$$

Для приближенного решения задачи вместо непосредственного учета граничных условий можно использовать метод "сшивания" полей на границе, которой в данном случае является плоскость  $z = 0$  — т.е. поверхность гребенки. Если известна структура полей по обеим сторонам границы, но неизвестны амплитуды компонентов поля, то эти амплитуды находят из условия непрерывности тангенциальных составляющих  $H_t$  и  $E_t$  на границе. Известным примером этого подхода является решение задачи о прохождении плоской волны через границу двух сред.

В данной задаче точно известно, что при  $d \leq z \leq l$  ( на "зубе" гребенки)

$$E_z = 0 , \quad (3.84)$$

а точное решение распределения полей в пазах гребенки является отдельной задачей, не имеющей аналитического решения. Но для приближенного расчета этих полей можно воспользоваться следующими соображениями. Паз можно рассматривать как отрезок бесконечного по оси  $y$  прямоугольного волновода длиной  $b$ , закороченного с одной стороны и открытого с другой. Вообще говоря, поле в этом отрезке волновода следует рассматривать как сумму всех волноводных волн, в том числе и нераспространяющихся. Но если ширина паза  $d \ll \lambda$ , то следует ожидать, что наибольший вклад в поле внесет основная распространяющаяся вдоль оси  $x$  волна типа  $H_{10}$ . При этом, поскольку та из сторон волновода, которая определяет критическую частоту этого типа волны, бесконечна, критическая частота волны  $H_{10}$  равна нулю. Значит, ее фазовая скорость в пазах (по оси  $x$ ) равна скорости света. Отсюда следует, что распределение полей в пазах  $0 \leq x \leq d$  (с учетом закоротки - дна паза) можно приближенно записать в виде:

$$E_z = B \cdot \sin k(x + b) , \quad (3.85)$$

$$H_y = -i B \cdot \cos k(x + b) . \quad (3.86)$$

Периодическое распределение  $E_z$  по координате  $z$  при  $x = 0$ , описываемое выражением (3.85) с учетом (3.84), раскладывается в ряд Фурье (член ряда  $n = 0$  выделен отдельным слагаемым):

$$E_z(x = 0) = e^{ihz} \cdot B \sin kb \cdot \left( \frac{d}{l} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi nd/l)}{\pi n} \cdot \exp\{i 2\pi n z/l\} \right) . \quad (3.87)$$

Ряд (3.78) при  $x = 0$  описывает то же поле  $E_z$ . Сшивание полей по этой компоненте электрического поля заключается в приравнивании коэффициентов в рядах Фурье (3.78) и (3.87) при одинаковых фазовых множителях. После этой процедуры для амплитуд пространственных гармоник имеем:

$$a_0 = B \cdot \sin kb \cdot \frac{d}{l} , \quad (3.88)$$

$$a_n = B \cdot \sin kb \cdot \frac{\sin(\pi nd/l)}{\pi n} . \quad (3.89)$$

Теперь необходимо сшить решения на границе по тангенциальной компоненте магнитного поля  $H_y$ . При  $z \geq 0$  эта компонента определена в виде ряда (3.82); подставив в него уже вычисленные коэффициенты (3.88) и (3.89) и положив  $z = 0$ , получим ряд в виде:

$$H_y(x = 0) = -i e^{ihz} \cdot B \sin kb \cdot \left( \frac{dk}{lp_0} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi n p_n} \cdot \sin(\pi nd/l) \cdot \exp\{i 2\pi n z/l\} \right) . \quad (3.90)$$

Тангенциальная компонента магнитного поля  $H_y$  приближенно определена (см. (3.86)) только внутри паза гребенки ( $0 \leq z \leq d$ ). Зависимость  $H_y(z)$  при  $x = 0, d \leq z \leq l$ , т.е. на вершине "зуба" гребенки, в отличие от компоненты  $E_z$ , заранее не известна. Поэтому разложения в ряд, подобному (3.87), для магнитного поля при  $z = 0$  непосредственно выписать нельзя. Можно только утверждать, что переходе через точку ( $z = d, x = 0$ ) компонента  $H_y$  не имеет разрыва. У гребенки с малым периодом ( $l \ll \lambda$ ) функция  $H_y(z)$  должна быть довольно гладкой, поскольку при этом, как видно из (3.77) и (3.83), коэффициенты в ряде (3.90) малы из-за наличия в них множителя  $k/p_n$ . В первом приближении весь ряд в (3.90) можно отбросить, посчитав компоненту  $H_y$  постоянной при  $x = 0$ :

$$H_y(x = 0) = -i e^{ihz} \cdot \frac{dk}{lp_0} \cdot B \sin kb . \quad (3.91)$$

Сравнив (3.91) и (3.86), имеем:

$$p_0 = k \cdot \frac{d}{l} \cdot \operatorname{tg} kb , \quad (3.92)$$

при этом из условия  $p_0 > 0$  необходимо, чтобы  $\operatorname{tg} kb > 0$ .

Полученное из второго граничного условия выражение (3.92) является характеристическим уравнением для вычисления затухания поверхностной волны в вакуум. С учетом формулы (3.83) из (3.92) рассчитывается замедление волны  $\xi$  - отношение фазовой скорости к скорости света - в зависимости от частоты. Эту зависимость обычно называют дисперсионной характеристикой замедляющей системы:

$$\xi(k) = \frac{v_{ph}}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + (d/l)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 kb}} . \quad (3.93)$$

Из требования  $p_0 > 0$  и периодичности функции  $\operatorname{tg} kb$  следует, что область существования функции  $\xi$  имеет вид отдельных зон по параметру  $kb$ , называемых областями

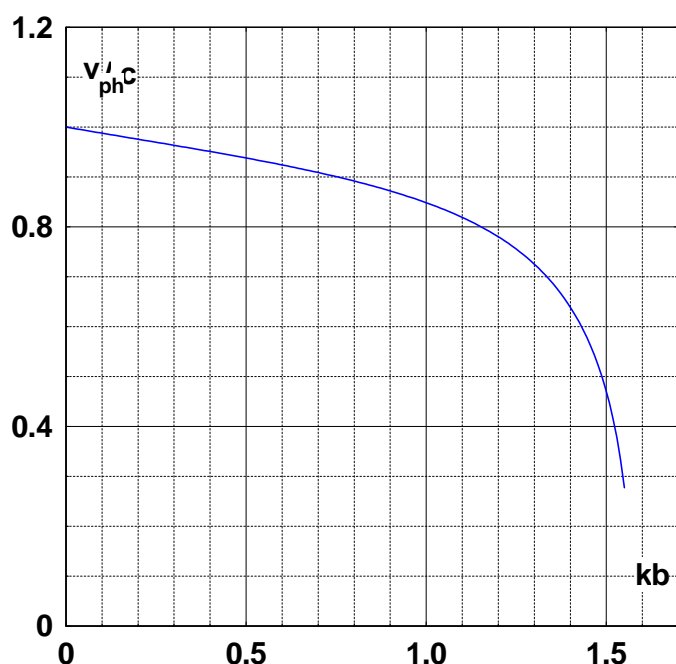


Рис. 3.6: Дисперсионная характеристика поверхностной волны над гребенкой

пропускания, ограниченных интервалами ( $\pi n < kb < \pi(n + 1/2)$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$ ). Основная зона пропускания при  $0 < kb < \pi/2$ , т.е. в длинах волн  $4b < \lambda < \infty$  обычно является рабочей областью гребенки (рис. 3.6).

Фазовая скорость поверхностной волны плавно изменяется от скорости света при нулевой частоте (теоретически), до нулевой скорости на границе области пропускания - при частоте  $\pi c/2b$ . Первая из границ области пропускания имеет простое физическое толкование - достаточно длинные волны, как известно и из оптики, не "замечают" неровностей поверхности, если период неровностей существенно меньше длины волны. Поверхностная волна в этом случае является практически плоской волной, скользящей вдоль поверхности.

Хотелось бы обратить внимание на аналогию между наличием зон существования (по частоте) поверхностной волны над гребенкой и квантовомеханическим описанием движения электронов в кристаллических веществах, которые представляются в виде трехмерных периодических структур. Аналогом глубины паза в гребенке является "глубина" периодического провала потенциала. Следующие друг за другом разрывные области (по импульсу электрона), в которых электрону разрешено иметь энергию, в физике твердого тела называют зонами Бриллюэна. Это следует из решения уравнения Шредингера, которое, по-существу, является волновым уравнением для электронных волн.

Полученные формулы справедливы лишь при условии  $hl \ll 1$ . Более строгая теория показывает, что поверхностная волна может распространяться над гребенкой лишь при

условии  $hl < \pi$ , т.е. при  $\lambda > 2l$ . Если  $l > 2b$ , то верхней частотной границей области пропускания является условие  $l = \lambda/2$  и в точке, соответствующей этому условию, кривая  $\xi(k)$  обрывается.

Медленные электромагнитные волны широко применяют в электронике СВЧ и ускорителях элементарных частиц. В приборах, использующих вакуумные электронные пучки, обмен энергией между электронным пучком и электромагнитной волной эффективно происходит тогда, когда фазовая скорость волны и скорость электронов близки друг к другу. В электронных приборах СВЧ, предназначенных для генерации и усиления электромагнитных волн, волна отбирает энергию у электронных пучков, а в ускорителях элементарных частиц пучок отбирает энергию у мощной электромагнитной волны. Для обоих этих процессов необходимы медленные электромагнитные волны, поскольку скорость частиц, в частности, электронов не может превышать скорости света. Диэлектрические поверхности с медленными поверхностными волнами плохо подходят для этих целей из-за неизбежного попадания электронов на поверхность, которая при этом заряжается, что кардинально искажает траектории электронов.

В технике СВЧ применяют разнообразные периодические замедляющие структуры - диафрагмированные волноводы, штыревые структуры, спиральные линии и т.п. Рассмотренная выше гребенка часто используется в генераторах и усилителях СВЧ с длительным взаимодействием — лампах бегущей волны (ЛБВ) и лампах обратной волны (ЛОВ). Несомненным достоинством периодических металлических структур, определяющим их достаточно широкое применение в технике СВЧ, является возможность решения обратной задачи — подбор (обычно численный) геометрии структуры для получения поверхностной волны с требуемыми параметрами в заданном диапазоне частот.

## Глава 4

# Колебательные системы СВЧ

Колебательной системой в электродинамике называют устройство, которое служит для накопления э.-м. энергии на одной частоте или в достаточно узком спектре частот. В радиотехнике для этой цели используют колебательный контур, состоящий из емкости  $C$  и индуктивности  $L$ , собственная частота  $\omega_0$  которого равна  $1/\sqrt{LC}$ . Для увеличения собственной частоты контура параметры  $C$  и  $L$  нужно уменьшать и при переходе к СВЧ уже в дециметровом диапазоне длин волн емкость контура становится настолько малой, что большое влияние на собственную частоту оказывают неизбежные паразитные емкости, а индуктивностью может служить отрезок провода. В этом случае собственная частота контура определяется взаимным расположением его элементов, что, во-первых, затрудняет его настройку, и, во-вторых, приводит к потерям энергии в контуре из-за паразитных связей с внешними цепями. Существенный вклад в потери начинает вносить также излучение из контура.

Этих недостатков в значительной степени лишены замкнутые металлические полости — объемные резонаторы, внутри которых заключены э.-м. поля. В качестве колебательных систем СВЧ широко используются резонаторы различных форм, самые простые из которых и наиболее распространенные — прямоугольные и цилиндрические резонаторы.

В отличие от колебательных контуров, в объемном резонаторе в большинстве случаев нельзя четко выделить области, где имеется только электрическое или только магнитное поле. Поэтому свойства резонаторов изучаются электродинамическими методами.

Важнейшими параметрами резонатора являются: распределение поля по его объему, собственная частота и добротность.

### 4.1 Прямоугольный резонатор

Э.-м. поле внутри прямоугольного резонатора достаточно легко рассчитать.

Пусть стенки резонатора ограничивают внутреннюю полость в форме параллелепипеда (рис. 4.1):

$$0 \leq x \leq a; \quad 0 \leq y \leq b; \quad 0 \leq z \leq l. \quad (4.1)$$



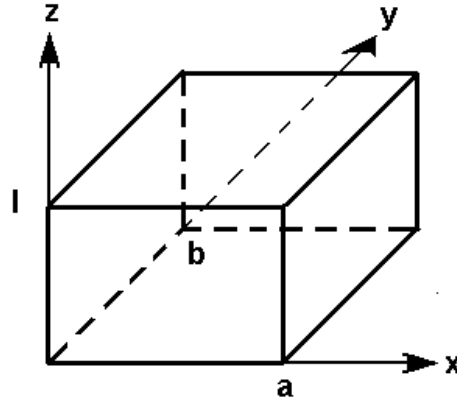


Рис. 4.1: Прямоугольный резонатор

При расчете распределения полей и собственных частот считаем, что стенки резонатора имеют бесконечную проводимость.

Если исходить из выводов, сделанных в разделе 2.6, то прямоугольный резонатор можно рассматривать как закороченный с двух сторон отрезок прямоугольного волновода. Однако, из-за простой формы резонатора волновое уравнение нетрудно решить и непосредственно. В декартовых координатах волновое уравнение записывается одинаково для любой компоненты э.-м. поля, например, для  $E_x$ :

$$\Delta_{xyz} E_x(x, y, z) + k^2 E_x(x, y, z) = 0 \quad . \quad (4.2)$$

Это уравнение легко решается методом Фурье, а постоянные разделения  $k_x^2$ ,  $k_y^2$  и  $k_z^2$  по координатам  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответственно, связаны между собой соотношением:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad . \quad (4.3)$$

Собственные значения  $k_x$ ,  $k_y$  и  $k_z$ , при которых уравнение вида (12.2) имеет нетривиальное решение, определяются граничными условиями. При идеальных граничных условиях

$$k_x = \frac{\pi}{a} m, \quad k_y = \frac{\pi}{b} n, \quad k_z = \frac{\pi}{l} p. \quad (4.4)$$

где  $m, n, p = 0, 1, 2, \dots$ , электрическое поле в резонаторе имеет вид:

$$E_x = A \cos \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi p}{l} z \quad , \quad (4.5)$$

$$E_y = B \sin \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi p}{l} z \quad , \quad (4.6)$$

$$E_z = C \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y \cos \frac{\pi p}{l} z \quad . \quad (4.7)$$

Магнитное поле определяется из (4.5) с использованием уравнений Максвелла.

Следует заметить, что константы  $A$ ,  $B$  и  $C$  в (4.5-4.7) не могут быть все произвольными, поскольку компоненты электрического поля связаны между собой уравнением:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad . \quad (4.8)$$

Подставив (4.5-4.7) в (4.8), имеем:

$$\frac{m}{a} A + \frac{n}{b} B + \frac{p}{l} C = 0 \quad . \quad (4.9)$$

Таким образом, ненулевые решения уравнений Максвелла без внешних источников поля, то есть собственные поля в резонаторе, могут существовать только при условии:

$$k_{mnp} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2} \quad , \quad (4.10)$$

вытекающем из (4.3) и (4.4). Условие (4.10) означает, что собственные колебания э.- м. поля в резонаторе с бесконечно проводящими стенками существуют только на фиксированных частотах  $\omega_{mnp} = c k_{mnp}$ , и эти частоты называют собственными частотами резонатора. Видно, что в отличие от обычного колебательного контура, резонатор имеет бесконечно много собственных частот и каждой собственной частоте соответствует по крайней мере одно распределение полей собственного колебания, характеризующегося тройкой целочисленных индексов  $m$ ,  $n$ ,  $p$ .

Собственные волны в волноводах характеризуются парой индексов  $m$ ,  $n$  (см. подраздел 2.1.1). Дополнительный индекс  $p$  у собственного поля в резонаторе появляется в связи с тем, что резонатор — область, ограниченная по трем координатам. По аналогии с волноводами весь набор собственных колебаний в резонаторе можно также разделить на Е- и Н- типы колебаний. Однако, поскольку в прямоугольном резонаторе нет естественно выделенной оси, то для однозначности идентификации необходимо указывать не только тип и индекс колебания, но и оси координат.

Из (4.9) и (4.10) следует, что если среди чисел  $m$ ,  $n$  и  $p$  нет нулей, то собственной частоте  $\omega_{mnp}$  соответствуют по крайней мере два различных распределения собственных полей, то есть в этом случае собственные колебания вырождены. Если же один из индексов  $m$ ,  $n$ , или  $p$  равен нулю, то, как следует из (4.9) и (4.10), соответствующее колебание не вырождено, и в (4.5-4.7) остается одна произвольная постоянная, определяющая амплитуду поля в резонаторе. На практике предпочитают возбуждать в резонаторе колебания с наименьшими индексами, а чаще всего — с минимальной собственной частотой, так называемое основное колебание.

Если  $a, b > l$ , то основным колебанием в прямоугольном резонаторе является колебание с  $m = 1, n = 1, p = 0$ , которое имеет следующее распределение полей:

$$E_z = C \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad , \quad (4.11)$$

$$H_x = \frac{\pi}{ikb} C \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \quad , \quad (4.12)$$

$$H_y = -\frac{\pi}{ika} C \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad , \quad (4.13)$$

$$H_z = E_x = E_y = 0 \quad . \quad (4.14)$$

Поскольку это колебание имеет только одну составляющую электрического поля  $E_z$ , то его естественно назвать колебанием типа  $E_{110}$ .

Собственная частота колебания  $E_{110}$  не зависит от размера резонатора  $l$  по оси  $z$ :

$$k = \pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} . \quad (4.15)$$

Заметим, что распределение полей колебания  $E_{110}$  можно представить как суперпозицию двух стоячих волноводных волн по осям  $x$  и  $y$ .

Обратим также внимание на то, что магнитные и электрические поля в резонаторе сдвинуты по фазе на  $\pi/2$  (см., например, (4.11-4.14)). Этого следовало ожидать, поскольку поля в резонаторе представляют собой суперпозицию стоячих волн (ср. раздел 2.6). Фазовый сдвиг на  $\pi/2$  между электрическим и магнитным полями означает также, что в резонаторе за период колебания энергия непрерывно переходит из магнитной в электрическую и наоборот, причем дважды за период энергия бывает только магнитной или только электрической. Этот процесс, естественно, наблюдается и в обычном колебательном контуре, когда электрическая энергия из конденсатора перекачивается в магнитную энергию в индуктивности и наоборот.

## 4.2 Цилиндрический резонатор

Этот резонатор представляет собой полый цилиндр радиуса  $a$  и длиной  $l$ , закороченный с торцов стенками (рис. 4.2). Рассматривая цилиндрический резонатор как отрезок

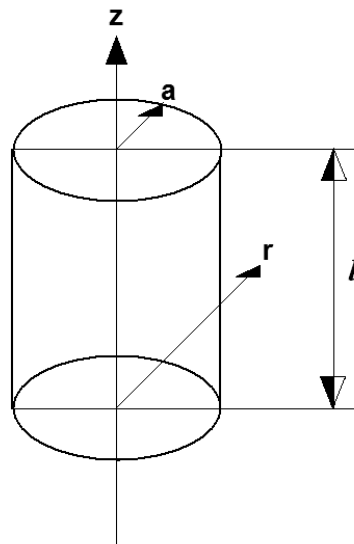


Рис. 4.2: Цилиндрический резонатор

волновода, получим, что поперечное распределение полей собственных колебаний в резонаторе то же, что распределение соответствующих собственных волн в волноводе,

а вдоль оси  $z$  поле представляет собой стоячую волну с узлами электрического поля на торцевых стенках. Вдоль резонатора должно укладываться целое число  $p$  полуволин  $\Lambda/2$  в волноводе, и частота собственных колебаний отсюда определяется соотношением:

$$k = \sqrt{g_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}, \quad (4.16)$$

где  $g_{mn}$  — поперечное число соответствующей волны в цилиндрическом волноводе.

Собственные колебания в цилиндрическом резонаторе обозначаются так же, как волны в волноводе, но с добавлением продольного индекса  $p$ :  $E_{mnp}$ ,  $H_{mnp}$ .

Однако, кроме собственных колебаний с частотами (4.16), сводящихся к стоячим волнам в круглом волноводе, в цилиндрическом резонаторе могут существовать колебания  $E_{mn0}$ , частоты которых не зависят от длины резонатора и равны критическим частотам волноводных волн  $E_{mn}$ . Это можно строго получить, решая уравнения Максвелла для замкнутой цилиндрической полости так же, как сделано выше для прямоугольной. Электрическое поле у колебаний  $E_{mn0}$  имеет единственную составляющую вдоль оси  $z$ , и поля от координаты  $z$  не зависят. Легко видеть, что магнитные колебания с  $p = 0$  в цилиндрическом резонаторе существовать не могут, поскольку продольная составляющая  $H_z$ , не зависящая от  $z$ , несовместима с граничным условием  $H_z = 0$  на торцевых стенках.

Основным колебанием в цилиндрическом резонаторе, в зависимости от соотношения между радиусом резонатора  $a$  и его длиной  $l$ , может быть или колебание  $E_{010}$ , или  $H_{111}$ .

Для примера рассмотрим распределение полей колебаний  $E_{010}$  и  $H_{011}$ , которые часто используют при работе с цилиндрическими резонаторами.

Колебание типа  $E_{010}$  имеет следующие компоненты э.-м. поля:

$$E_z = A J_0(2,405 \frac{r}{a}), \quad (4.17)$$

$$H_\varphi = -i A J_1(2,405 \frac{r}{a}). \quad (4.18)$$

Линии электрического поля представляют собой прямые, максимум электрического поля — на оси, а магнитное поле на оси равно нулю. Цилиндрический резонатор с колебанием  $E_{010}$ , а также резонаторы со сходным распределением полей (см. ниже) часто используются в электронике СВЧ — прямолинейный пучок заряженных частиц пропускают по оси резонатора и при этом на частицы действует только продольное электрическое СВЧ поле.

Из картины линий тока по стенкам резонатора с колебанием  $E_{010}$  можно сделать некоторые практические выводы. Поскольку ток протекает через стык торцевых стенок с боковой, то при изготовлении и сборке резонатора с этим типом колебаний в этом месте необходимо обеспечить хороший омический контакт.

В качестве другого примера рассмотрим колебание  $H_{01p}$  в цилиндрическом резона-

торе, э.- м. поля которого имеют составляющие:

$$E_{\varphi} = iC \frac{ka}{3,83} \cdot J_1\left(3,83 \frac{r}{a}\right) \cdot \sin \frac{\pi p}{l} z, \quad (4.19)$$

$$H_r = -C \frac{\pi pa}{3,83l} \cdot J_1\left(3,83 \frac{r}{a}\right) \cdot \cos \frac{\pi p}{l} z, \quad (4.20)$$

$$H_z = C \cdot J_0\left(3,83 \frac{r}{a}\right) \cdot \sin \frac{\pi p}{l} z. \quad (4.21)$$

Практический интерес в использовании этого типа колебания состоит в том, что поскольку оно сформировано волнами с малыми омическими потерями (см. раздел 2.5), то это колебание имеет также малые потери (см. далее раздел 3.4). С другой стороны, этот тип колебания является типичным примером вырожденного колебания. Как уже отмечалось в подразделе 2.1.1, волны  $H_{01}$  и  $E_{11}$  в цилиндрическом волноводе имеют одинаковые волновые числа. Соответственно, и в цилиндрическом резонаторе соответствующие типы колебаний имеют одинаковые собственные частоты, но различные распределения полей. Такое вырождение колебаний, как правило, приводит к значительным неудобствам при использовании резонатора, поскольку картина полей, возбуждаемых в резонаторе, представляет собой суперпозицию распределений полей вырожденных колебаний и, в частности, сильно зависит от небольших отклонений геометрии используемого резонатора от идеальной. При использовании вырожденных колебаний в цилиндрическом резонаторе одно из них стараются подавить. Поскольку у волны  $H_{01}$  в цилиндрическом волноводе имеются только азимутальные токи на стенках, то через стык торцевых стенок с боковой в резонаторе токи не протекают. Это обстоятельство существенно с практической точки зрения, поскольку при возбуждении в резонаторе колебаний типа  $H_{01p}$  не требуется обращать особого внимания на омический контакт в месте стыка. При возбуждении же колебаний типа  $E_{11p}$  по стенкам резонатора в месте стыка токи протекают и, следовательно, качество омического контакта в этом месте должно существенно влиять на поля этого колебания. Поэтому один из способов подавления колебаний  $E_{11p}$  при малом влиянии на колебания  $H_{01p}$  заключается в создании небольшого зазора между боковой и торцевой стенками цилиндрического резонатора. Заметим, что в этом случае торцевую стенку резонатора можно сделать в виде перемещаемого поршня, что позволяет изменять длину резонатора и, тем самым, перестраивать его частоту.

### 4.3 Объемные резонаторы других типов

Как уже отмечалось выше, прямоугольные и цилиндрические резонаторы можно рассматривать как закороченные отрезки волноводов. Аналогичным образом, отрезок коаксиальной линии может являться частью коаксиального резонатора. Если этот отрезок закорочен с двух сторон (рис. 4.3 а), то низшая частота  $f$  такой системы определяется только его длиной  $l$ :

$$f = \frac{c}{2l}, \quad (4.22)$$

где  $c$  — скорость света (рассматривается вакуумная коаксиальная линия), и такой резонатор называют полуволновым. В полуволновом коаксиальном резонаторе ток максимален на закороченных концах, и в этих местах необходимо обеспечить хороший омический контакт. Кроме полуволнового резонатора, достаточно часто используют более

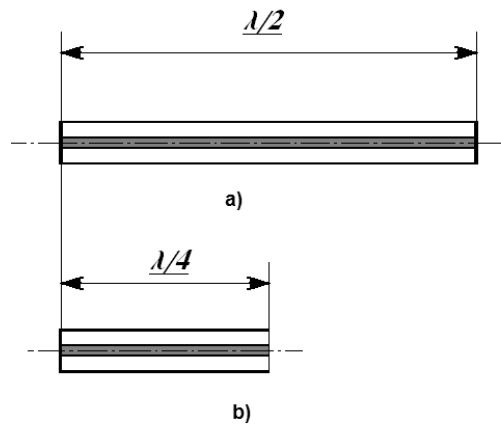


Рис. 4.3: Коаксиальный резонатор: а) полуволновый резонатор; б) четвертьволновый резонатор.

компактный четвертьволновый коаксиальный резонатор (рис. 4.3 б). В этом резонаторе коаксиальная линия на одном конце закорочена, а на другом — разомкнута. Волна, распространяющаяся по коаксиальной линии, полностью отражается как от закороченного, так и почти полностью от разомкнутого концов, причем на закороченном конце максимален ток, а на разомкнутом — напряжение. Низшая собственная частота такого резонатора:

$$f = \frac{c}{4l} \quad , \quad (4.23)$$

Рассмотрим теперь резонатор, поля в котором не сводятся к стоячим волнам в линиях передачи. Это тороидальный или квазистатический резонатор, широко используемый в электронике СВЧ. Тороидальный резонатор представляет собой замкнутый объем, ограниченный поверхностью тора и соединенными с ним двумя параллельными дисками (рис. 4.4).

Собственную частоту такого резонатора, конечно, можно найти непосредственно из решения волнового уравнения, однако из-за сложности геометрии резонатора точное решение этой задачи возможно только численными методами. С достаточной же для практики точностью собственную частоту тороидального резонатора можно найти, рассматривая распределение поле в резонаторе на основе аналогии с обычным квазистатическим контуром.

Можно приближенно считать, что электрическое поле в тороидальном резонаторе в основном заключено между дисками, как в плоском конденсаторе. Емкость этого конденсатора вычисляется по формуле:

$$C = \frac{S_0}{4\pi l} \quad , \quad (4.24)$$

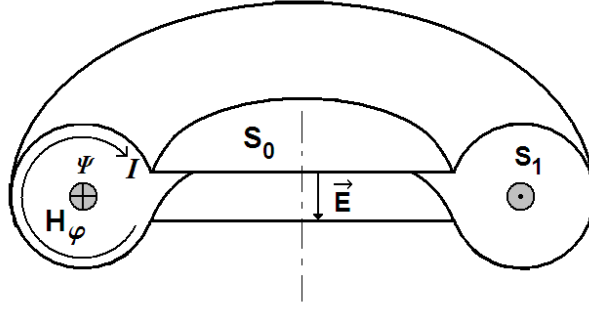


Рис. 4.4: Квазистатический тороидальный резонатор.

где  $S_0$  — площадь каждого диска, а  $l$  — зазор между ними.

В том же приближении азимутальное магнитное поле в основном сосредоточено внутри тора и силовые линии магнитного поля равномерно пронизывают сечение тора. Как известно, индуктивность определяется по формуле:

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad , \quad (4.25)$$

где  $\Psi$  — магнитный поток через поверхность, охватываемую током  $I$ . С другой стороны, магнитное поле внутри тора и ток, перетекающий с одного диска резонатора на другой, связаны законом полного тока:

$$\int_{S_1} H_\varphi dS = \frac{4\pi}{c} I \quad , \quad (4.26)$$

где  $S_1$  — площадь поперечного сечения тора.

Отсюда магнитный поток через сечение тора:

$$\Psi = \frac{2IS_1}{c^2\bar{r}} \quad , \quad (4.27)$$

где  $\bar{r}$  — средний радиус тора, и индуктивность

$$L = \frac{2S_1}{c^2\bar{r}} \quad . \quad (4.28)$$

Теперь из квазистатической формулы  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  для собственной частоты контура рассчитывается собственная длина волны тороидального резонатора:

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{S_0 S_1}{2\pi l \bar{r}}} \quad . \quad (4.29)$$

Из анализа формулы (4.29) следует, что, в отличие от прямоугольного и цилиндрического резонаторов, размеры квазистатического резонатора могут быть сделаны по крайней мере в несколько раз меньше собственной длины волны. Компактность резонатора существенна при работе в длинноволновой части диапазона СВЧ. В то же время,

в отличие от обычного колебательного контура, в тороидальном резонаторе нет потерь на излучение.

Результаты, полученные выше при расчете электродинамических свойств объемных резонаторов, можно кратко сформулировать следующим образом.

Внутри замкнутой области с идеально проводящими стенками — объемного резонатора — при определенных частотах, называемых собственными частотами резонатора, могут существовать э.-м. поля конечной амплитуды, называемые собственными колебаниями резонатора. Каждому собственному колебанию соответствует свое распределение электрических и магнитных полей (а также поверхностных токов на стенках) и своя собственная частота. Число собственных колебаний и собственных частот резонатора неограничено, но существует минимальная собственная частота, которой соответствует основное колебание.

## 4.4 Омические потери в объемных резонаторах

Расчет собственных полей и собственных колебаний в резонаторах проводился в предположении идеальной проводимости стенок резонатора. Конечная проводимость стенок приводит к тому, что средняя э.-м. энергия, однажды запасенная в собственном колебании резонатора, затухает во времени, поскольку она тратится на нагрев стенок. Обычно потери энергии пропорциональны квадрату поля (см. раздел 1.4), и запасенная энергия  $\bar{W}(0)$  затухает со временем по экспоненциальному закону

$$\bar{W}(t) = \bar{W}(0) e^{-2\omega''t} . \quad (4.30)$$

Соответственно, мгновенные значения затухающих полей собственных колебаний в резонаторе имеют вид:

$$E(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ E(\omega) e^{-i\omega t} \} e^{-\omega''t} . \quad (4.31)$$

Из вида выражения (4.31) следует, что при математическом описании экспоненциально затухающих во времени полей собственную частоту резонатора нужно считать комплексной:

$$\omega_s = \omega'_s - i\omega''_s . \quad (4.32)$$

Для краткости записи индекс  $s$  заменяет тройку чисел  $mnp$  в обозначениях типов колебаний  $E_{mnp}$  и  $H_{mnp}$ . Действительная часть комплексной частоты  $\omega'_s$  в (4.32) определяет, как и ранее, частоту гармонического колебания поля, а мнимая часть  $\omega''_s$  ( $\omega''_s \geq 0$ ) называется коэффициентом затухания колебаний.

Скорость затухания колебаний является одним из важных параметров резонатора; часто, кроме коэффициента затухания  $\omega''_s$ , пользуются и другими коэффициентами:

$$\delta_s = \omega''_s T = 2\pi \frac{\omega''_s}{\omega'_s} \quad (4.33)$$

— декрементом затухания и

$$Q_s = \frac{\pi}{\delta_s} = \frac{\omega'_s}{2\omega''_s} \quad (4.34)$$



— добротностью резонатора. Из всех этих коэффициентов на практике чаще всего используют понятие добротности колебания. Если воспользоваться законом сохранения энергии, то добротность нетрудно связать со средними за период колебания энергетическими характеристиками э.-м. поля:

$$Q_s = \frac{\omega'_s \bar{W}}{\bar{P}} \quad , \quad (4.35)$$

где  $\bar{W}$  — средняя энергия, запасенная в резонаторе, а  $\bar{P}$  — средняя мощность, теряемая в резонаторе.

Формулу для добротности в виде (4.35) можно использовать для расчета добротности колебаний, если  $Q_s \gg 1$ , то есть при относительно небольших потерях в резонаторе. В этом случае можно к тому же считать, что потери в стенках слабо изменяют распределение полей собственного колебания, полученное из расчета резонатора с идеально проводящими стенками.

Поскольку при колебаниях э.-м. поля в идеальном резонаторе электрическая энергия полностью перекачивается в магнитную и наоборот, то запасенная средняя электрическая энергия равна средней магнитной (что с достаточной точностью выполняется и в неидеальном резонаторе при  $Q_s \gg 1$ ). Поэтому, согласно (??), для средней энергии поля в резонаторе имеем:

$$\bar{W} = \frac{1}{16\pi} \int_V (|\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2) dV = \frac{1}{8\pi} \int_V |\vec{E}|^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int_V |\vec{H}|^2 dV \quad , \quad (4.36)$$

где интегрирование проводится по объему резонатора.

Согласно (1.126), средняя мощность, поглощенная в стенках резонатора, записывается в виде:

$$\bar{P} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} w \int_S |H_t|^2 dS \quad , \quad (4.37)$$

где  $w$  — поверхностный импеданс стенки,  $H_t$  — тангенциальная составляющая магнитного поля на стенке, а интегрирование проводится по внутренней поверхности резонатора.

Таким образом, выражение (4.35) с учетом (4.36) и (4.37) приобретает окончательный вид:

$$Q_s = \frac{2}{d} \frac{\int_V |\vec{H}|^2 dV}{\int_S |H_t|^2 dS} \quad , \quad (4.38)$$

где  $d$  — толщина скин-слоя (см. п. 1.4).

Необходимо заметить, что часто при измерениях получают существенно меньшую (до 50%) добротность резонатора, чем рассчитанную по формуле (4.38). Одной из пространственных причин такого расхождения является то, что толщину скин-слоя рассчитывают по формуле (1.114), исходя из табличных значений удельной проводимости металла стенок. Однако, удельная проводимость металла, измеряемая обычно на относительно низких частотах, не определяет полностью толщину скин-слоя. Характерная толщина скин-слоя на СВЧ составляет от долей микрона до десятка микрон. Поэтому микроскопические неоднородности поверхности металла, следы обработки, окисные

пленки, загрязнения поверхности и т.п. могут существенно увеличить эффективную толщину скин-слоя. Достаточно хорошее согласие с расчетом можно получить только при специальной обработке поверхности металла — например, алмазным инструментом, электрополировкой, соответствующей химической обработкой поверхности и т.п. При обычной (но достаточно тщательной!) механической обработке измеренная толщина скин-слоя на СВЧ превышает расчетную на 20 – 30%.

С учетом этого замечания формулу (4.38) можно применять для расчета добротности резонаторов на любых типах колебаний. Как следует из вида формулы (4.38), добротность резонатора зависит от распределения поля и для разных типов колебаний может быть существенно различной. В качестве примера выпишем выражение для добротности цилиндрического резонатора высотой  $l$  и радиусом  $a$  при возбуждении колебания  $E_{010}$ :

$$Q = \frac{al}{d(a+l)} \quad (4.39)$$

Для оценки добротности резонатора по порядку величины магнитные поля в (4.38) можно заменить их некоторым средним значением и тогда

$$Q \sim \frac{V}{d \cdot S} \quad (4.40)$$

Из (4.40) следует, что чем меньше площадь внутренней поверхности резонатора при неизменном объеме, то есть чем проще геометрия резонатора, тем выше его добротность. Например, как нетрудно убедиться непосредственным расчетом, добротность тороидального резонатора меньше добротности цилиндрического при одинаковых объемах.

У резонаторов простой геометрии (прямоугольных, цилиндрических и т.п.)  $V \sim a \cdot S$ , где  $a$  — характерный размер резонатора. В объемных резонаторах обычно возбуждают колебания с небольшими индексами  $mnp$ , и часто — основное колебание. В этом случае  $a \sim \lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны собственного колебания. Если учесть, что  $d \sim \sqrt{\lambda}$  (см. § 4), то из (4.40) следует, что

$$Q \sim \frac{a}{d} \sim \sqrt{\lambda} \quad (4.41)$$

Таким образом, чем выше диапазон частот, в котором используются объемные резонаторы, тем меньше их омическая добротность.

В пустом резонаторе единственной причиной омических потерь является конечная проводимость стенок. Однако, в некоторых случаях резонатор частично или полностью заполняют веществом и тогда к омическим потерям в стенках добавляются потери э.-м. поля в веществе. При таком заполнении распределение полей и собственные частоты резонатора, естественно, изменяются и иногда существенно. К сожалению, простой аналитический расчет даже прямоугольного и цилиндрического резонаторов с внесенным веществом удастся провести только в очень небольшом числе случаев, например, при сплошном заполнении резонатора однородным диэлектриком.

Заметим, что омическая добротность объемных резонаторов в СВЧ диапазоне, как нетрудно оценить из конкретных расчетных формул типа (4.38), существенно — на два-три порядка выше добротности стандартных колебательных контуров в радиодиапазоне.

## 4.5 Возбуждение объемных резонаторов

Так же, как собственные волны в волноводах, собственные колебания резонаторов с практической точки зрения являются абстракцией, поскольку в реальной ситуации колебания э.-м. поля в резонаторах возбуждаются внешними источниками. Эти вынужденные колебания происходят на действительной частоте  $\omega$  сторонних токов с плотностями  $\vec{j}^e$  и  $\vec{j}^m$ . Однако при известных параметрах собственных колебаний резонатора — распределении полей собственных колебаний  $\vec{E}_s$  и  $\vec{H}_s$  на собственных комплексных частотах  $\omega_s = \omega'_s - i\omega''_s$  ( $\omega''_s \geq 0$ ) — расчет вынужденных колебаний можно провести, разложив поля вынужденных колебаний в ряд по собственным колебаниям:

$$\vec{E} = \Sigma A_s \vec{E}_s \quad , \quad \vec{H} = \Sigma B_s \vec{H}_s \quad . \quad (4.42)$$

Коэффициенты возбуждения  $A_s$  и  $B_s$  определяются распределением сторонних токов и их частотой. При решении линейных уравнений с правой частью методом разложения по собственным функциям систему собственных функций необходимо ортонормировать. Для этого используется лемма Лоренца (2.110), причем поверхность интегрирования  $S$  проводится в глубине стенок резонатора. Это позволяет корректно получить условие ортогональности и для собственных полей резонатора при наличии потерь. Основываясь на этом, нетрудно получить, что условие ортогональности для собственных колебаний резонатора записывается в виде:

$$\int_V \vec{E}_s \vec{E}_{s'} dV = 0 \quad , \quad \int_V \vec{H}_s \vec{H}_{s'} dV = 0 \quad (\text{при } s \neq s') \quad , \quad (4.43)$$

где интегрирование проводится по объему  $V$  резонатора.

Норма собственного  $s$ -ого колебания имеет вид:

$$N_s = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{E}_s^2 dV = -\frac{1}{4\pi} \int_V \vec{H}_s^2 dV \quad . \quad (4.44)$$

Представления нормы через электрическое и магнитное поле отличаются знаком, поскольку эти поля в резонаторе сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Несложно получить, что для резонатора без потерь норма (4.44) пропорциональна средней энергии, запасенной в  $s$ -ом колебании, а именно  $\bar{W}_s = 1/2 \cdot |N_s|$  при единичной амплитуде поля.

Подставив (4.42) в уравнения Максвелла и воспользовавшись условиями (4.43) и (4.44), для амплитуд возбуждения  $A_s$  и  $B_s$  можно получить следующие выражения:

$$A_s = -\frac{i}{\omega^2 - \omega_s^2} \cdot \frac{1}{N_s} \cdot \int_V (\omega \vec{j}^e \vec{E}_s - \omega_s \vec{j}^m \vec{H}_s) dV \quad , \quad (4.45)$$

$$B_s = -\frac{i}{\omega^2 - \omega_s^2} \cdot \frac{1}{N_s} \cdot \int_V (\omega_s \vec{j}^e \vec{E}_s - \omega \vec{j}^m \vec{H}_s) dV \quad . \quad (4.46)$$

При этом выводе следует учитывать, что частота  $\omega_s$ , которая входит во временную зависимость собственных полей, — комплексная.

Формулы (4.45) и (4.46) содержат так называемый резонансный множитель  $1/(\omega^2 - \omega_s^2)$ , который в основном и определяет поведение коэффициентов возбуждения от частоты, особенно вблизи резонанса, когда  $\omega \simeq \omega'_s$ . При этом, как видно из (4.45) и (4.46),  $A_s \simeq B_s$  и эта амплитуда максимальна.

Здесь следует заметить, что в разложении (4.42) учтены только вихревые поля в резонаторе. Строго говоря, к этим полям должны быть добавлены потенциальные части электрического и магнитного полей, однако они не обладают резонансными свойствами и в резонаторах их нужно учитывать в достаточно ограниченном числе случаев.

Вблизи резонанса выражения (4.45) и (4.46) можно записать в более простом виде:

$$A_s \simeq B_s \simeq -\frac{i}{(\omega - \omega_s) 2N_s} \cdot \int_V (\vec{j}^e \vec{E}_s - \vec{j}^m \vec{H}_s) dV \quad , \quad (4.47)$$

а введя добротность резонатора  $Q_s$  (см. раздел 4.4) и  $\xi = (\omega - \omega'_s)/\omega'_s$  — относительную расстройку частоты — в виде:

$$A_s \simeq B_s \simeq \frac{2Q_s}{\omega'_s} \cdot \frac{1}{2iQ_s\xi - 1} \cdot \int_V (\vec{j}^e \vec{E}_s - \vec{j}^m \vec{H}_s) dV \quad . \quad (4.48)$$

Формула возбуждения резонатора (4.48) аналогична формулам возбуждения обычных радиотехнических контуров, что естественно, поскольку контур является частным случаем резонатора. Зависимость амплитуды возбуждения резонатора от частоты — лоренцевская резонансная кривая колебательной системы, а зависимость средней энергии в резонаторе от частоты определяется функцией:

$$|A_s|^2 \propto \frac{1}{1 + (2Q_s\xi)^2} \quad . \quad (4.49)$$

Таким образом, объемный резонатор, как и любая добротная колебательная система, эффективно "откликается" только на достаточно узкий спектр частот воздействия. Эффективную полосу частот возбуждения, при которых в резонаторе существуют поля заметной величины, обычно вводят через относительную расстройку  $\xi_{0.5}$  на половине высоты резонансной кривой (4.49) — полуширину резонансной кривой:

$$\left| \frac{A_s(\xi_{0.5})}{A_s(0)} \right|^2 = 0,5 \quad . \quad (4.50)$$

Как следует из (4.50), полуширина резонансной кривой связана с добротностью простым соотношением:

$$2\xi_{0.5} = \frac{1}{Q_s} \quad , \quad (4.51)$$

которое используется на практике для определения добротности по измеренной резонансной кривой.

Из (4.49) следует, что чем выше добротность резонатора, тем лучше его частотно-селективные свойства, но тем с большей точностью нужно поддерживать частоту источника при возбуждении резонатора. В предельном случае резонатора без потерь полоса частот, выделяемых резонатором, бесконечно узка, а для возбуждения резонатора необходим источник с абсолютно стабильной частотой.

Частотные свойства резонатора однозначно связаны с его способностью служить резервуаром э.-м. энергии. Как следует из (4.48), при неизменных токах возбуждения

$$|A_s| \propto Q_s \quad \text{и} \quad |A_s|^2 \propto Q_s^2 \quad . \quad (4.52)$$

Таким образом, в резонаторе большой добротности даже со слабыми источниками возбуждения можно получить значительные амплитуды полей, а также запастись заметную энергию.

Связь между частотными и энергетическими характеристиками резонатора отчетливо проявляется в процессах установления колебаний в резонаторе. При мгновенном выключении внешнего источника возбуждения колебания в резонаторе затухают экспоненциально (см. (4.30) и (4.31)), причем чем больше добротность резонатора, тем дольше процесс затухания. При мгновенном включении источника поля с частотой  $\omega = \omega'_s$  процесс установления стационарной амплитуды в резонаторе также имеет экспоненциальный характер:

$$A_s(t) = A_s(\infty)(1 - e^{-\omega''_s t}) \quad . \quad (4.53)$$

Кроме резонансного множителя, определяющего частотные свойства резонатора, в формулу (4.48) входит интеграл, определяющий эффективность возбуждения собственных колебаний сторонними токами. По виду этот интеграл аналогичен интегралу в формулах для возбуждения волноводов (см. раздел 2.4). Однако,  $\vec{E}_s$  и  $\vec{H}_s$  в формулах возбуждения волноводов описывают бегущие волны, а формулах для коэффициентов возбуждения — это поля, синфазные во всех точках резонатора.

Для эффективного возбуждения определенного типа колебаний в резонаторе к пространственному распределению и направлению сторонних токов предъявляются практически те же требования, что и для эффективного возбуждения собственных волн в волноводе. В частности, токи нужно располагать в областях максимальной интенсивности полей собственного колебания, ток должен быть параллелен вектору поля и т.п.

Для возбуждения резонаторов в основном используют сосредоточенные элементы связи — те же, что для возбуждения волн в волноводах, — штыри, петли, отверстия в стенках и т.п. (см. раздел 2.4).

При расчете вынужденных колебаний следует помнить, что объемный резонатор, в отличие от радиотехнического контура, имеет много собственных частот. Вынужденные колебания резонатора при фиксированной величине стороннего тока достаточно просто рассчитать, если резонансные кривые соседних колебаний можно считать неперекрывающимися. В противном случае, например, при вырождении колебаний, расчет амплитуд возбуждаемых полей может усложниться. Из (4.45) и (4.46) нетрудно получить, что, если резонансные кривые колебаний заметно перекрываются, то отношение амплитуд таких колебаний, одновременно возбуждаемых сторонним током фиксированной частоты, существенным образом зависит от разницы их частот  $\omega'_{s1}$  и  $\omega'_{s2}$ ; в связи с этим существенно возрастают требования к точности расчета. В частности, в этом случае расчет собственных частот в приближении идеальной геометрии резонатора становится недостаточным, поскольку геометрия реальных резонаторов всегда отлична от идеальной — из-за неизбежных неточностей при изготовлении резонатора, наличия в нем элементов связи, из-за конечной проводимости стенок и т.п. Точное решение электродинамической задачи при таких изменениях геометрии резонатора сложно и к нему прибегают очень редко, а обычно используют различные приближенные методы. К одному из этих методов относится расчет сдвига собственной частоты при незначительном изменении объема резонатора, основанный на использовании формул возбуждения в виде (4.45) и (4.46).

Пусть резонатор немного деформирован, но объем этой деформации  $V' \ll V$  — объема резонатора. При этом условии можно считать, что полная энергия поля в собственном колебании резонатора при деформации практически не изменится и плотность тока в месте деформации  $\vec{j}^e$  по абсолютной величине останется пропорциональной амплитуде поля собственного колебания недеформированного резонатора, но из-за изменения геометрии направление вектора плотности тока в этом месте изменится и ее приходится считать сторонней. Тогда из (4.46) непосредственно следует равенство:

$$\omega^2 - \omega_s^2 = -\frac{i\omega_s}{N_s} \int_{V'} \vec{j}^e \vec{E}_s dV, \quad (4.54)$$

в котором  $\omega$  — не частота внешнего возбуждения, а собственная частота резонатора, смещенная из-за его деформации.

Плотность тока в первом приближении можно считать пропорциональной невозмущенному полю в месте расположения деформации, но коэффициент пропорциональности зависит от геометрии деформации. В частности, при пологой деформации идеально проводящей стенки резонатора от объемной плотности  $\vec{j}^e$  тока естественно перейти к поверхностной  $\vec{i}^e$ , связанной с невозмущенным полем  $\vec{H}_s$  на стенке резонатора соотношением:

$$\vec{i}^e = -\frac{c}{4\pi} [\vec{n} \vec{H}_s]. \quad (4.55)$$

Интеграл, стоящий справа в (4.54), при этом сводится к поверхностному и, с учетом (4.55), несложно получить, что

$$\int \vec{j}^e \vec{E}_s dV = -\frac{c}{4\pi} \int_{S'} [\vec{n} \vec{H}_s] \vec{E}_s dS = -\frac{i\omega_s}{4\pi} \int_{V'} (\vec{E}_s^2 + \vec{H}_s^2) dV. \quad (4.56)$$

Используя (4.74), получим формулу для расчета сдвига собственной частоты при пологой деформации хорошо проводящей стенки резонатора:

$$\frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2} = \frac{\int_{V'} (|\vec{H}_s|^2 - |\vec{E}_s|^2) dV}{\int_V |\vec{H}_s|^2 dV}. \quad (4.57)$$

При преобразовании (4.56) к (4.57) учтено, что электрическое и магнитное поля в резонаторе сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ .

Из (4.57) следует, что сдвиг собственной частоты зависит от того, в каком месте деформируют стенку. Если в месте деформации невозмущенное магнитное поле больше электрического, то при уменьшении объема резонатора при деформации собственная частота увеличивается, в противном случае — уменьшается.

Изменение собственной частоты резонатора при деформации его стенок используется на практике для подстройки собственной частоты, например, деформируют боковую стенку резонатора, изготовив ее из тонкой упругой мембраны.

Заметим, что выражение для сдвига частоты (4.57) в резонаторе применимо и для колебательного контура. Уменьшение расстояния между пластинами конденсатора в контуре приводит к увеличению емкости, т.е. к уменьшению собственной частоты, а уменьшение объема катушки приводит к уменьшению ее индуктивности, т.е. к увеличению частоты.

Сдвиг частоты можно также рассчитать, если возмущением в резонаторе является диэлектрическое или металлическое тело, размеры которого существенно меньше длины волны. Электрическое поле, поляризующее диэлектрическое тело, можно в этом случае считать квазистационарным и в первом приближении равном невозмущенному полю  $\vec{E}_s(\vec{r}_0)$  в месте расположения тела. Дипольный момент этого малого тела:

$$\vec{p} = \beta \vec{E}_s(\vec{r}_0) \quad , \quad (4.58)$$

где  $\beta$  — коэффициент поляризуемости, зависящий от формы и материала тела; например, для диэлектрического шарика радиусом  $a$ :

$$\beta = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot a^3 \quad . \quad (4.59)$$

Подставив (4.58) в (4.54), получим для сдвига частоты:

$$\frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2} = - \frac{4 \pi \beta |\vec{E}_s(\vec{r}_0)|^2}{\int_V |\vec{E}_s|^2 dV} \quad . \quad (4.60)$$

Из формул (4.57) и (4.60) следует оценка относительного сдвига частоты при малом изменении объема резонатора:

$$\left| \frac{\Delta \omega_s}{\omega_s} \right| \simeq \frac{V'}{V} \quad , \quad (4.61)$$

откуда следует, что из-за большой добротности (обычно  $Q \geq 1000$ ), характерной для большинства резонаторов СВЧ диапазона, сдвиг собственной частоты нетрудно заметить при введении внутрь резонатора тела очень малых размеров. Связь (4.60) между сдвигом частоты и относительной величиной собственного поля в точке расположения небольшого возмущающего тела используют для измерения распределения полей в резонаторах. В этом методе, который называют методом пробного тела, обычно используют следующую схему измерений: небольшое пробное тело (в виде шарика или небольшой иглы) протягивают через резонатор на тонкой диэлектрической нити; резонатор возбуждают на склоне резонансной кривой источником постоянной частоты — при этом даже небольшой сдвиг собственной частоты приводит к существенному изменению амплитуды поля в резонаторе; зависимость амплитуды поля в резонаторе от положения пробного тела позволяет восстановить распределение поля в резонаторе вдоль направления протяжки пробного тела. Если пробное тело — диэлектрическое, то, согласно (4.60), определяется распределение электрического поля, если пробное тело — металлическое, то, как нетрудно показать, определяется комбинация электрического и магнитного полей. Сделав последовательно опыты с диэлектрическим и металлическим пробными телами, можно найти распределение и электрического и магнитного поля в резонаторе, часто с достаточной для практики точностью.

#### К выводу формул возбуждения резонаторов

Прежде всего, обратим внимание на то, что у собственных функций полей в резонаторах  $E_s, H_s$  частоты являются комплексными ( $\omega_s$ ), а суперпозиция этих полей  $(E, H)$  рассматривается при действительной частоте - частоте возбуждения  $\omega$ . При разложении возбуждаемого поля по собственным

функциям, в которых учитывается только зависимость от координат, это обстоятельство математически корректно. Поэтому нужно отдельно выписать две системы уравнений Максвелла для этих частот — комплексной и действительной:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_s + i k_s \vec{E}_s = 0 \quad , \quad (4.62)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_s - i k_s \vec{H}_s = 0 \quad , \quad (4.63)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} + i k \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^e \quad , \quad (4.64)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} - i k \vec{H} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}^m \quad . \quad (4.65)$$

При этом, естественно, токи возбуждения существуют только при действительной частоте.

Воспользуемся теперь известным векторным соотношением:

$$\operatorname{div}[\vec{A}\vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B} \quad . \quad (4.66)$$

Примем вначале

$$\vec{A} = \vec{E}_s, \quad \vec{B} = \vec{H} \quad . \quad (4.67)$$

Тогда

$$\operatorname{div}[\vec{E}_s \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}_s - \vec{E}_s \operatorname{rot} \vec{H} \quad . \quad (4.68)$$

и, используя (4.63) и (4.64), имеем:

$$\operatorname{div}[\vec{E}_s \vec{H}] = i k \vec{E} \vec{E}_s + i k_s \vec{H} \vec{H}_s - \frac{4\pi}{c} \vec{j}^e \vec{E}_s \quad . \quad (4.69)$$

Если же

$$\vec{A} = \vec{E}, \quad \vec{B} = \vec{H}_s, \quad (4.70)$$

то

$$\operatorname{div}[\vec{E} \vec{H}_s] = \vec{H}_s \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}_s \quad (4.71)$$

и из (4.62) и (4.65) получим:

$$\operatorname{div}[\vec{E} \vec{H}_s] = i k_s \vec{E} \vec{E}_s + i k \vec{H} \vec{H}_s - \frac{4\pi}{c} \vec{j}^m \vec{H}_s \quad . \quad (4.72)$$

Разложим теперь  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  по собственным функциям резонатора:

$$\vec{E} = \Sigma A_s \vec{E}_s \quad , \quad \vec{H} = \Sigma B_s \vec{H}_s \quad (4.73)$$

используем ортогональность собственных полей и с учетом нормы

$$N_s = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{E}_s^2 dV = -\frac{1}{4\pi} \int_V \vec{H}_s^2 dV \quad (4.74)$$

проинтегрируем обе части равенств (4.69) и (4.72) по объему резонатора. Слева интегралы равны нулю, а (4.69) и (4.72) превратятся в систему уравнений относительно  $A_s$  и  $B_s$ :

$$\omega A_s - \omega_s B_s = -i \frac{1}{N_s} \cdot \int_V \vec{j}^e \vec{E}_s dV \quad (4.75)$$

$$\omega_s A_s - \omega B_s = -i \frac{1}{N_s} \cdot \int_V \vec{j}^m \vec{H}_s dV \quad , \quad (4.76)$$

решив которую, получим (4.45) и (4.46).



## 4.6 Связь объемного резонатора с линиями передачи

Все рассмотренные выше характеристики резонатора - собственные поля и частоты, омическая добротность - относятся к его внутренним свойствам. Но, чтобы использовать резонатор, его необходимо связать по крайней мере с одной внешней линией передачи — для возбуждения резонатора внешним источником, а иногда для вывода мощности из резонатора, если внутри него имеется активная среда (например, электронный пучок в электронных СВЧ приборах). Когда резонатор с помощью элемента связи подсоединен к внешней линии, то, строго говоря, э.-м. поля следует рассматривать одновременно во всей системе: линии передачи, элементе связи и резонаторе. При этом резонатор перестает быть замкнутой системой и при строгой постановке задачи спектр его собственных колебаний перестает быть только дискретным. Однако на практике обычно используют резонаторы значительной добротности и работают вблизи резонанса. В этом случае поля в резонаторе существенно больше полей в линии передачи и приближенно можно считать, что спектр собственных колебаний остается дискретным и распределение полей собственных колебаний в резонаторе, связанном с внешней линией, практически не изменяется. Количественно связь резонатора с линией передачи можно описать различными способами, в частности, введя **коэффициент связи  $\beta$  резонатора с линией передачи**, который обычно определяется через энергетические характеристики резонатора. Очевидно, что если резонатор связан с линией, то часть энергии из резонатора по элементу связи может выходить наружу и это дополнительные потери мощности суммируются с омическими потерями в резонаторе.

Если в резонаторе запасена энергия  $\bar{W}$ , мощность внутренних потерь (в частности, омических) равна  $\bar{P}_0$ , а мощность, выходящая наружу в линию передачи через элемент связи —  $\bar{\Sigma}_w$ , то коэффициент связи определяется формулой:

$$\beta = \frac{\bar{\Sigma}_w}{\bar{P}_0} . \quad (4.77)$$

Через коэффициент связи вводится внешняя добротность резонатора

$$Q_e = \frac{Q_0}{\beta} , \quad (4.78)$$

где  $Q_0$  - собственная добротность резонатора, и полная или нагруженная добротность

$$Q_l = \frac{Q_0}{1 + \beta} . \quad (4.79)$$

Комплексная собственная частота резонатора, связанного с линией передачи, записывается в виде:

$$\tilde{\omega}_s = (1 + \alpha) \omega'_s - i(1 + \beta) \omega''_s , \quad (4.80)$$

где параметр  $\alpha$  определяет сдвиг действительной части собственной частоты, вызванный изменением геометрии резонатора из-за наличия элемента связи (см. (4.57)).

Смысл введения коэффициента связи наиболее очевиден для того случая, когда сторонние токи помещены внутри резонатора, и при этом в резонаторе запасена энергия  $\bar{W}$ .

Тогда энергетические характеристики резонатора и линии передачи связаны формулами, следующими из (4.35) и (4.77):

$$\bar{P}_0 = \omega_s'' \cdot 2\bar{W}, \quad \bar{\Sigma}_w = \beta\omega_s'' \cdot 2\bar{W} \quad (4.81)$$

и напомним, что

$$\omega_s'' = \frac{\bar{P}_0}{2\bar{W}} \quad (4.82)$$

Менее очевидными являются формулы возбуждения резонатора с использованием коэффициента связи  $\beta$ , когда внешний источник расположен в линии передачи вдали от резонатора (рис. 4.5). В таком возбуждении мощность, возбуждаемая в волноводе источником и затем распространяющаяся по волноводу, вообще говоря, не полностью поступает в

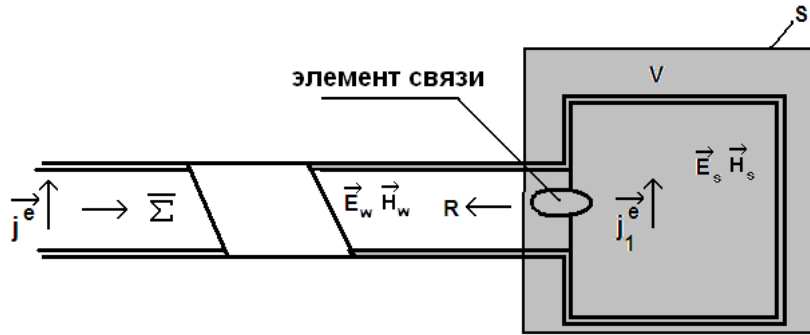


Рис. 4.5: Возбуждение резонатора через волновод

достаточно простых и общих формул, связывающих мощность, поглощаемую в резонаторе, мощность, отраженную от резонатора обратно в волновод, и поле, возбуждаемое в резонаторе, с мощностью волны в линии передачи, возбуждаемой плотностью  $\vec{j}^e$  стороннего электрического тока. То, что здесь и далее рассматриваются только электрические источники, для дальнейшего расчета несущественно. При таком выводе (см. [Л1, § 90]) используется только определение (4.77) коэффициента связи  $\beta$ , а сам элемент связи не конкретизируется.

Чтобы упростить написание дальнейших формул, выберем плотность тока  $\vec{j}^e$  такой, чтобы волна возбуждения в волноводе была единичной, т.е.

$$\bar{\Sigma} = \frac{N_w}{4}, \quad (4.83)$$

где  $N_w$  - норма волноводной волны (см. (2.124)). Поле в волноводе можно представить в виде прямой (+) и отраженной (-) от резонатора волн:

$$\vec{E}_w = \vec{E}_w^{(+)} + R\vec{E}_w^{(-)}, \quad \vec{H}_w = \vec{H}_w^{(+)} + R\vec{H}_w^{(-)}, \quad (4.84)$$

где  $R$  - коэффициент отражения от резонатора. При такой записи считается, что волна, отраженная от резонатора, обратно не возвращается.

Поле в резонаторе, возбуждаемое сторонним источником  $\vec{j}^e$  в волноводе:

$$\vec{E} = A_s \vec{E}_s \quad , \quad \vec{H} = A_s \vec{H}_s \quad . \quad (4.85)$$

Здесь следует отметить, что при строгом рассмотрении этой задачи необходимо учитывать не только основную волну (4.84) в волноводе, а полную систему собственных волн, в том числе и нераспространяющихся, которые всегда формируются вблизи элемента связи. А к полю в резонаторе (4.85) необходимо добавить вклад полей собственных колебаний, находящихся вне резонанса. Но далее мы будем пренебрегать этими уточнениями, считая, что на рабочей частоте в волноводе может распространяться только основная волна, а резонатор имеет большую добротность.

Средняя энергия поля в резонаторе

$$\bar{W} = \frac{1}{2} |A_s|^2 \cdot \frac{1}{4\pi} \int \vec{E}_s^2 dV = \frac{1}{2} |A_s|^2 N_s \quad , \quad (4.86)$$

Из (4.35) и (4.81) имеем для омических потерь:

$$\bar{P}_0 = \omega_s'' |A_s|^2 \cdot N_s \quad . \quad (4.87)$$

В приведенных выше формулах неизвестными являются коэффициент отражения от резонатора  $R$  и амплитуда поля в резонаторе  $A_s$ .

Для дальнейших расчетов воспользуемся леммой Лоренца, которая связывает интегральные характеристики произвольных полей  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ , возбуждаемых источниками  $\vec{j}_1^e$  и  $\vec{j}_2^e$  (см. раздел 2.3):

$$\frac{c}{4\pi} \cdot \oint_S ([\vec{E}_1 \vec{H}_2] - [\vec{E}_2 \vec{H}_1]) \vec{n} d\vec{S} = \int_V (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1) dV \quad . \quad (4.88)$$

За стороннюю плотность тока в (4.88)  $\vec{j}_2^e = \vec{j}^e$  принимается уже введенный источник в волноводе, возбуждающий в нем волну с мощностью  $\bar{\Sigma}$  (4.83), а под полем  $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$  в (4.88) понимаются поля  $(\vec{E}_w, \vec{H}_w)$  (4.84) и  $(\vec{E}, \vec{H})$  (4.85), каждое в своем месте.

Чтобы воспользоваться леммой Лоренца, в (4.88) необходимо ввести дополнительный источник  $\vec{j}_1^e$  и возбуждаемые им поля  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$ . Этот источник поместим внутри резонатора, выбрав его амплитуду "специальным" способом, чтобы в дальнейших формулах избежать лишних коэффициентов:

$$\vec{j}_1^e = \frac{i}{2\pi} \cdot \omega_s'' \vec{E}_s \quad . \quad (4.89)$$

Этот источник возбуждает в резонаторе вспомогательное поле

$$\vec{E}^{(0)} = A_s^{(0)} \vec{E}_s \quad , \quad \vec{H}^{(0)} = A_s^{(0)} \vec{H}_s \quad , \quad (4.90)$$

и для коэффициента возбуждения по формулам возбуждения резонатора (4.48) и с учетом (4.89) имеем:

$$A_s^{(0)} = - \frac{i}{2(\omega - \tilde{\omega}_s)} \cdot \frac{1}{N_s} \cdot \int \vec{j}_1^e \vec{E}_s dV = \frac{\omega_s''}{\omega - \tilde{\omega}_s} \quad . \quad (4.91)$$

Далее из (4.80) имеем:

$$\omega - \tilde{\omega}_s = \omega - (1 + \alpha) \omega'_s + i(1 + \beta) \omega''_s = (1 + \beta) \omega''_s \cdot (i + 2Q_L \xi_\beta) \quad , \quad (4.92)$$

где параметр

$$\xi_\beta = \frac{\omega - (1 + \alpha) \omega'_s}{(1 + \alpha) \omega'_s} \quad , \quad (4.93)$$

— относительная расстройка резонатора, связанного с волноводом.

Подставив (4.92) в (4.91), получим для амплитуды вспомогательного поля в резонаторе:

$$A_s^{(0)} = \frac{1}{(1 + \beta)(2Q_L \xi_\beta + i)} \quad . \quad (4.94)$$

При таком внутреннем возбуждении резонатора током (4.89) в волновод уходит волна:

$$\vec{E}_w^{(0)} = D \vec{E}_w^{(-)}, \quad \vec{H}_w^{(0)} = D \vec{H}_w^{(-)} \quad , \quad (4.95)$$

а ее мощность, определяемую коэффициентом связи  $\beta$ , можно найти и из (4.81) как

$$\bar{\Sigma}_w^{(0)} = 2\bar{W}^{(0)} \cdot \beta \omega''_s = \beta \omega''_s \cdot |A_s^{(0)}|^2 \cdot N_s \quad , \quad (4.96)$$

и напрямую из (4.95) как

$$\bar{\Sigma}_w^{(0)} = |D|^2 \cdot \frac{N_w}{4} \quad . \quad (4.97)$$

Приравняв (4.96) и (4.97) и используя (4.94), имеем:

$$|D|^2 = 4 \cdot \frac{N_s}{N_w} \cdot \beta \omega''_s \frac{1}{(1 + \beta)^2 ((2Q_L \xi_\beta)^2 + 1)} \quad . \quad (4.98)$$

Таким образом, полям  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  в (4.88) являются поля  $(\vec{E}^{(0)}, \vec{H}^{(0)})$  — в резонаторе и  $(\vec{E}_w^{(0)}, \vec{H}_w^{(0)})$  — в волноводе.

Последним этапом в этом расчете является корректный выбор границ интегрирования в (4.88). Для этого поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$  (правая часть выражения (4.88)), проведем снаружи резонатора (или внутри его стенок) и замкнем через некоторое сечение поперек волновода, расположенное несколько левее стенки с элементом связи (рис. 4.5).

Поскольку источник  $\vec{j}_2^e$  находится вне объема  $V$ , то интеграл справа в (4.88) с учетом (4.85) и (4.89) приобретает вид:

$$\int_V \vec{j}_1^e \vec{E} dV = i 2 \omega''_s A_s N_s \quad . \quad (4.99)$$

В левой же части (4.88) остается только интеграл по сечению волновода, через которое проходят волна, выходящая из резонатора и сформированная вспомогательным источником  $\vec{j}_1^e$ , а также возбуждающая и отраженные волны (4.84), обязанные источнику  $\vec{j}_2^e$ .

Расписав левое подинтегральное выражение (4.88) с учетом (4.84) и (4.85), а также условия ортогональности волн в волноводе (2.123) для интеграла по сечению волновода имеем :

$$D \cdot \frac{c}{4\pi} \cdot \oint_S ([\vec{E}_w^{(-)} \vec{H}_w^{(+)}] - [\vec{E}_w^{(+)} \vec{H}_w^{(-)}]) \vec{n} d\vec{S} = D N_w \quad . \quad (4.100)$$

Приравняв (4.99) и (4.100), получим:

$$i 2 \omega_s'' A_s N_s = D N_w \quad . \quad (4.101)$$

Перейдя в равенстве (4.101) к квадратам абсолютных величин, после элементарного преобразования получим:

$$\omega_s'' |A_s|^2 N_s = |D|^2 \cdot \frac{N_w^2}{4\omega_s'' N_s} \quad . \quad (4.102)$$

Слева, как следует из (4.87), стоят омические потери в резонаторе при возбуждении внешней волной.

Подставив в (4.102) вычисленную выше величину  $|D|^2$  из (4.98) и учтя (4.83), окончательно имеем для мощности омических потерь при возбуждении внешней волной:

$$P_a = \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2 ((2Q_L \xi_\beta)^2 + 1)} \cdot \bar{\Sigma} \quad , \quad (4.103)$$

для квадрата абсолютной величины поля внутри резонатора (из (4.87)):

$$|A_s|^2 = \frac{1}{\omega_s'' N_s} \cdot \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2 ((2Q_L \xi_\beta)^2 + 1)} \cdot \bar{\Sigma} \quad , \quad (4.104)$$

и, используя закон сохранения энергии, найдем коэффициент отражения (по мощности) волны от резонатора:

$$|R|^2 = \frac{1}{(2Q_L \xi_\beta)^2 + 1} \cdot \left[ (2Q_L \xi_\beta)^2 + \frac{(1 - \beta)^2}{(1 + \beta)^2} \right] \quad . \quad (4.105)$$

Из приведенных выше формул несложно вычислить и комплексный коэффициент отражения от резонатора по полю:

$$R = 1 - \frac{2\beta}{(1 + \beta)(1 - i2Q_L \xi_\beta)} \quad . \quad (4.106)$$

#### 4.6.1 Связь объемного резонатора с волноводом через отверстие в тонкой металлической перегородке

В качестве примера расчета возбуждения через конкретный элемент связи рассмотрим объемный резонатор, связанный с однородным волноводом через небольшое отверстие, расположенное в общей для них металлической перегородке (рис. 4.6). Источник внешнего сигнала мощностью  $\bar{\Sigma}$  расположен слева и на рисунке не показан. Аналитический

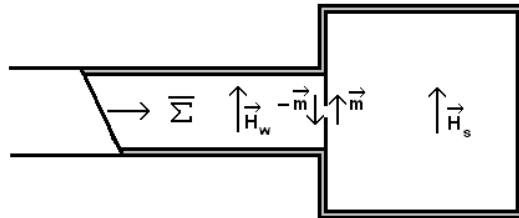


Рис. 4.6: Связь резонатора с волноводом через отверстие в перегородке

расчет проводится приближенно, с введением ряда упрощающих предположений. Считается, что источник полностью согласован с волноводом. В волноводe может распространяться волна только одного типа. Перегородка между резонатором и волноводом считается бесконечно тонкой и идеально проводящей. Радиус отверстия связи  $r$  в перегородке считается достаточно малым, т.е.  $r \ll \lambda$ , где  $\lambda$  - длина волны возбуждающего сигнала. При выполнении этого неравенства поле в волноводe и резонаторе вблизи такого отверстия можно считать квазистатическим, а возбуждением нераспространяющихся волн волноводного типа вблизи отверстия пренебрегается. Эти приближения, конечно, несколько ограничивают область применения получаемых результатов, однако аналитический вид получаемых зависимостей дает возможность достаточно просто рассмотреть физические аспекты возбуждения резонаторов.

Для упрощения формул ограничимся рассмотрением только магнитных волн в волноводe и таких собственных колебаний в резонаторе, которые не имеют нормальной составляющей электрического поля в месте расположения отверстия связи. Тогда в месте расположения отверстия связи справа от перегородки имеется магнитное поле в волноводe, а слева - магнитное поле в резонаторе, векторы которых параллельны перегородке в силу идеальной проводимости материала перегородки. Кроме того, исключим векторные обозначения, поскольку невозмущенные поля вблизи перегородки и в резонаторе ( $H_1$ ) и в волноводe ( $H_2$ ) имеют только одну компоненту. Рассмотрим другие случаи можно аналогичным образом.

Известно(см., например, [Л15]), что вектор статического магнитного момента отверстия  $\vec{m}$  параллелен плоскости экрана (считается, что сквозь вещество экрана магнитное

поле не проникает) и пропорционален разности невозмущенных магнитных полей с разных сторон экрана. Т.е. в нашем случае магнитные моменты со стороны резонатора

$$m_1 = m = \kappa(H_1 - H_2) \quad , \quad (4.107)$$

а со стороны волновода

$$m_2 = -m = -\kappa(H_1 - H_2) \quad , \quad (4.108)$$

где

$$\kappa = \frac{2r^3}{3\pi} \quad (4.109)$$

– коэффициент статической магнитной поляризуемости отверстия.

Рассмотрим отдельно возбуждение волновода и резонатора такими магнитными диполями.

Поле в волноводе существует в виде прямой и отраженной магнитных волн. В рассматриваемой модели возбуждения резонатора отраженная волна является суперпозицией волны, полностью отраженной перегородкой, и волны, возбужденной магнитным диполем, расположенным бесконечно близко к сплошной перегородке в месте расположения отверстия связи. Амплитуду этой суперпозиции можно характеризовать коэффициентом отражения  $R$  волны от резонатора. Такой же диполь, но противоположного знака, расположен у сплошной перегородки внутри резонатора.

При представлении отверстия в экране в виде магнитного диполя следует обратить внимание на следующий факт. При любом расположении диполя в волноводе он возбуждает две собственных волны в волноводе — прямую и встречную, даже если, как в данной ситуации, он расположен бесконечно близко к сплошной перегородке, т.е. он как бы "отражается" в перегородке. Прямая волна от этого диполя, отразившись от перегородки, удвоит формируемую им амплитуду уходящей от резонатора волны. Но отверстие в перегородке, замененное нами магнитным диполем, может формировать только уходящую волну. Таким образом, при решении задачи о возбуждении бегущих волн магнитным диполем, эквивалентным отверстию в перегородке, является диполь  $m/2$  (4.107).

С учетом сказанного выше и согласно формулам возбуждения волновода (2.128) и (2.129) амплитуда уходящей волны, возбуждаемой магнитным диполем, эквивалентным отверстию в перегородке, запишется в виде:

$$C_w = -\frac{i\omega}{N_w} \cdot 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot H_w = -\frac{i\omega}{N_w} \cdot m \cdot H_w \quad , \quad (4.110)$$

где  $H_w$  — магнитное поле собственной волны волновода в месте расположения отверстия связи.

Замечание, сделанное выше, существенно для возбуждения собственных полей в резонаторе, которые входят в формулу возбуждения не как прямая и отраженная волны по отдельности, а как их сумма. Поэтому "отражения" внутреннего магнитного диполя в проводящей стенке резонатора учитывать не нужно и резонатор возбуждается точечным магнитным диполем с моментом  $m/2$ . Согласно формулам (4.45-4.46) амплитуду колебаний поля в резонаторе можно записать в виде:

$$A_s = \frac{\omega}{\omega - \omega_s} \cdot \frac{m H_s}{4N_s} \quad . \quad (4.111)$$

Для определения полей в связанной системе "волновод-резонатор" необходимо найти решение системы из трех уравнений относительно  $A_s H_s$ ,  $R$  и  $m$ , два из которых описывают возбуждение полей в волноводе и резонаторе магнитным диполем, эквивалентным отверстию связи, а третье определяет величину этого магнитного диполя, формируемого теми же полями:

$$A_s H_s = \frac{\omega}{\omega - \omega_s} \cdot \frac{m H_s^2}{4N_s} , \quad (4.112)$$

$$R = 1 - i\omega \cdot \frac{m H_w^2}{N_w} \frac{1}{H_0} , \quad (4.113)$$

$$m = \kappa \cdot A_s H_s - \kappa \cdot (1 + R) H_0 , \quad (4.114)$$

здесь  $H_s$  - невозмущенное магнитное поле собственного колебания резонатора в месте расположения отверстия связи, а  $H_0$  — магнитное поле падающей из волновода волны на отверстии связи.

В этой задаче просматриваются три малые действительные параметра:

$$\epsilon = \omega'_s \kappa \cdot \frac{H_w^2}{N_w} \sim \frac{r^3}{\lambda S} \ll 1 , \quad (4.115)$$

где  $\lambda$  - длина волны, соответствующая рабочей частоте, а  $S$  - площадь сечения волновода,

$$\gamma = \kappa \cdot \frac{H_s^2}{4N_s} \sim \frac{r^3}{V} \ll 1 , \quad (4.116)$$

где  $V$  - объем резонатора,

$$\frac{\omega''_s}{\omega'_s} = \frac{1}{2Q_0} = \delta \ll 1 , \quad (4.117)$$

где  $Q_0$  - собственная добротность резонатора.

Заметим, что соотношения между этими малыми параметрами по порядку величины заранее не известны. Это определяется тем, что мы пользуемся приближенными электродинамическими соотношениями для описания полей около малого отверстия связи, пренебрегая возбуждениями нераспространяющихся волн в волноводе около малого отверстия. Далее мы найдем те соотношения между этими параметрами, при которых вид электродинамических характеристик при рассматриваемом способе возбуждения будет соответствовать общим формулам (4.103 - 4.106).

Решение системы (4.112-4.114) с введением обозначений (4.115-4.117) запишется в виде:

$$A_s H_s = -\gamma \cdot \frac{1}{\Delta_0} \frac{2\omega}{\omega - \omega_s} \cdot H_0 , \quad (4.118)$$

$$R = \frac{1}{\Delta_0} \cdot \left( 1 + i \frac{\omega}{\omega'_s} \cdot \epsilon - \frac{\omega}{\omega - \omega_s} \cdot \gamma \right) , \quad (4.119)$$

$$m = -\frac{2\kappa H_0}{\Delta_0} , \quad (4.120)$$

а детерминант имеет вид:

$$\Delta_0 = 1 - i\epsilon \cdot \frac{\omega}{\omega'_s} - \gamma \cdot \frac{\omega}{\omega - \omega_s} . \quad (4.121)$$



Равенство нулю детерминанта этой системы определяет, как известно, собственную частоту системы  $\tilde{\omega}$  без внешних источников, в данной задаче - при отсутствии падающей слева волны, а уходящая волна в волноводе возбуждается только магнитным диполем. Приравняв детерминант нулю, имеем уравнение:

$$\Delta_0 = 1 - i\epsilon \cdot Z - \gamma \cdot \frac{Z}{Z - 1 + i/2Q} = 0 \quad , \quad (4.122)$$

где

$$Z = Z' - iZ'' = \frac{\tilde{\omega}}{\omega'_s} = (1 + \alpha) - i \frac{(1 + \beta)}{2Q} \quad . \quad (4.123)$$

Заметим, что  $Z' \sim 1$ , а  $Z''/Z' \ll 1$ .

Приравняв нулю действительную часть в (4.122) и оставив только члены нулевого и первого порядка, для безразмерного сдвига собственной частоты резонатора приближенно получим:

$$\alpha \approx \gamma = \kappa \cdot \frac{H_s^2}{4N_s} \quad , \quad (4.124)$$

Приравняв нулю мнимую часть в (4.122), оставим члены первого и второго порядка и заменив приближенно  $Z' = 1 + \gamma$ , получим:

$$\beta \approx -2Q_0 \cdot \epsilon\gamma + \gamma \quad . \quad (4.125)$$

Как следует из (4.104), для получения заметной энергии в резонаторе при его возбуждении через линию передачи параметр  $\beta$  должен быть порядка единицы. Тогда из (4.125) следует необходимость того, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{1}{Q_0} \sim \epsilon\gamma \quad . \quad (4.126)$$

Таким образом, величина  $1/2Q_0$  должна быть второго порядка малости, т.е.  $Q_0 \gg 1$ , что, как уже отмечалось в разделе 4.4, для СВЧ диапазона в большинстве случаев выполняется. Тогда выражение (4.125), исключив из этой суммы малый параметр  $\gamma$ , можно записать в более простом виде:

$$\beta \approx -2Q_0 \cdot \epsilon\gamma \quad . \quad (4.127)$$

Подставив в (4.127) выражения (4.115) и (4.116), получим для коэффициента связи при возбуждении через малое отверстие:

$$\beta = Q_0 \cdot \omega'_s \kappa^2 \cdot \frac{H_w^2 H_s^2}{2N_w |N_s|} \quad . \quad (4.128)$$

В (4.128) учтено, что  $N_s$  - отрицательная величина, поскольку она рассчитывается через магнитное поле (см.(4.74)).

## 4.6.2 Анализ характеристик резонатора, связанного с линией передачи

Проанализируем полученные выше выражения (4.103-4.106), записав их для случая резонанса ( $\xi = 0$ ).

Мощность омических потерь

$$P_0 = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} \cdot \bar{\Sigma} \quad (4.129)$$

и коэффициент отражения от резонатора по полю:

$$R = \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (4.130)$$

и по мощности:

$$|R|^2 = \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 \quad (4.131)$$

зависят только от коэффициента связи  $\beta$ . Зависимости (4.129) и (4.131) представлены на графике (рис. 4.7).

Из (4.129) следует, что при  $\beta = 1$  поглощенная в резонаторе мощность максимальна и равна мощности, поступающей по волноводу. Тогда связь называют критической — это случай полного согласования волновода с резонатором. При этом, естественно,  $R = 0$ , как следует и из (4.130). Полное прохождение мощности в резонатор объясняется тем, что при критической связи волна, отраженная от перегородки, и волна, возбуждаемая в волноводе отверстием связи, равны по величине и противоположны по знаку. При интерференции они полностью гасят друг друга. При  $\beta < 1$  — связь докритическая, а при  $\beta > 1$  — закритическая. При переходе через критическую связь коэффициент отражения меняет знак.

На практике формулу (4.130) используют для измерения коэффициента связи резонатора с волноводом способами, которые изложены в разделе 2.7. Заметим, что согласно (2.161) при настройке частоты на вершину резонансной кривой в линии передачи, нагруженной на резонатор,  $\beta = \text{к.с.в.н.}$  или  $\beta = 1/\text{к.с.в.н.}$  (напомним, что по определению  $\text{к.с.в.н.} \geq 1$ ). Если измерения проводятся с помощью измерительной линии, то вывод о том, является ли связь докритической или закритической, несложно сделать по сравнению положения минимума (или максимума) сигнала с зонда измерительной линии в резонансе и при полной расстройке частоты резонатора. Если при полной расстройке положение максимума (или минимума) сигнала остается на месте, то  $\beta < 1$ , если же максимум и минимум меняются местами, то  $\beta > 1$ .

Выражение (4.104) для поля в резонаторе запишем в виде:

$$|A_s|^2 = \frac{2Q_0}{\omega'_s N_s} \cdot \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} \cdot \bar{\Sigma} \quad (4.132)$$

Из формулы (4.128) видно, что на коэффициент связи можно влиять как изменением геометрии элемента связи (параметра  $\kappa$  (4.109)), так и изменением собственной добротности резонатора. Если добротность резонатора неизменна, то из (4.132) следует,

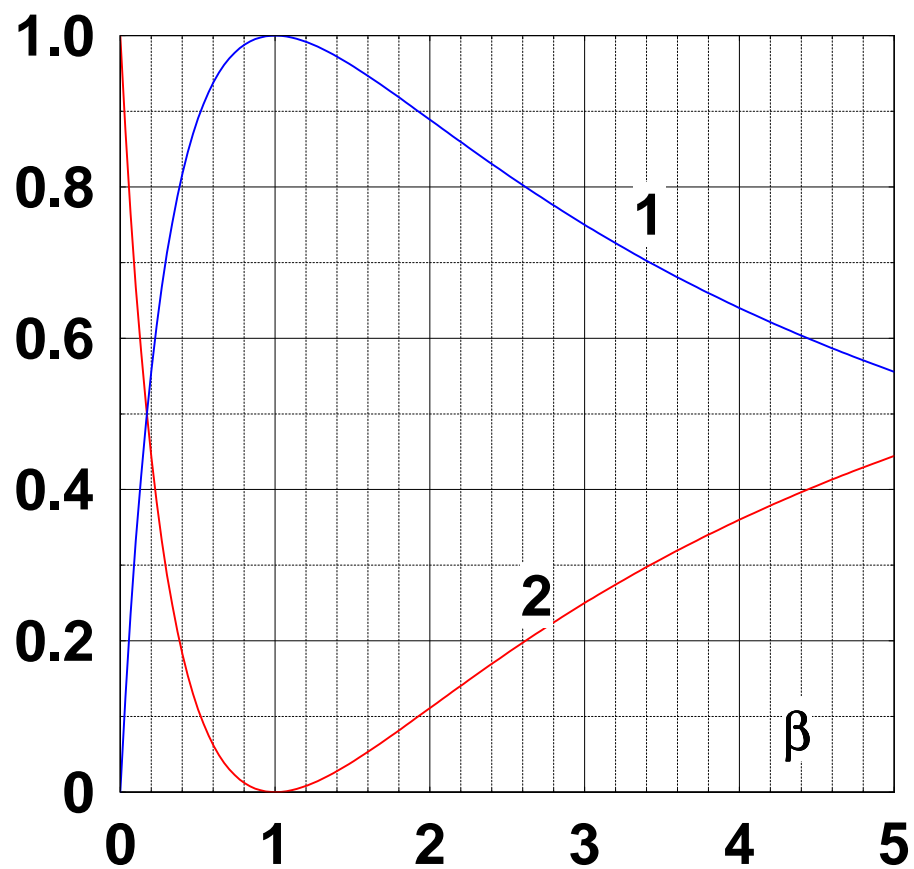


Рис. 4.7: Графики  $P_0/\bar{\Sigma}(\beta)$  – кривая 1 и  $|R|^2(\beta)$  – кривая 2

что при изменении  $\beta$  параметрами элемента связи поле в резонаторе зависит от  $\beta$  так же, как поглощенная мощность, в частности, при критической связи поле в резонаторе максимально.

Если же переменным параметром является собственная добротность резонатора, то формулу (4.132), поставив в нее (4.128), удобнее представить в виде:

$$|A_s|^2 = \frac{16\bar{\Sigma}^2}{(\omega'_s)^2 \kappa^2 H_s^2 H_w^2} \cdot \frac{\beta^2}{(1 + \beta)^2} \cdot \cdot \quad (4.133)$$

При увеличении добротности поле в резонаторе плавно возрастает и в предельном случае отсутствия потерь в резонаторе ( $Q \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ ) асимптотически стремится к величине:

$$|A_s|^2 = \frac{16\bar{\Sigma}^2}{(\omega'_s)^2 \kappa^2 H_s^2 H_w^2} \cdot \quad (4.134)$$

Как следует из формул (4.129) и (4.130), мощность, поглощаемая в резонаторе, однозначно определяется по коэффициенту отражения при известной мощности источника. Для расчета же абсолютной величины напряженности поля в резонаторе необходимо измерить собственную добротность резонатора.

Связь резонатора с линией передачи через элементы связи другого типа: петли, зонды, щели и т.п. рассчитывается аналогичным образом. При этом у резонаторов большой добротности для любого типа связи  $\beta \sim Q_0$ .

Полученные результаты несложно распространить на случаи связи резонатора с несколькими линиями передачи. Например, при использовании резонатора "напроход", когда мощность поступает в резонатор по одной линии, а часть выходит наружу по другой, как часто делают для измерения сигнала с резонатора. Этот случай рассматривается далее (см. подраздел 4.7.2).

Формулы для коэффициента связи, подобные (4.128), во многих случаях используются только для оценки, а точный коэффициент связи подбирают опытным путем, например регулировкой глубины погружения в резонатор петли или зонда. Объясняется это, в частности, тем, что  $\beta$  может сильно зависеть от геометрии элемента связи (например, как видно из (4.109) и (4.128), при связи через отверстие  $\beta \sim r^6$ ), что предъявляет жесткие требования как к точности предварительных расчетов, так и к точности изготовления элементов связи нерегулируемой конструкции.

### 4.6.3 Связь радиочастотного контура с линией передачи

Естественно, что понятие коэффициента связи вводится не только для объемных СВЧ резонаторов, но и в радиочастотном диапазоне, где колебательными системами служат контуры со сосредоточенными параметрами: индуктивностью и емкостью. При этом рассмотрение проводится квазистатическими методами — через использование токов в цепи и напряжений на элементах.

Рассмотрим радиочастотный контур из последовательно соединенных индуктивности  $L$ , емкости  $C$  и сопротивления  $r$ . Контур связан взаимной индуктивностью  $M$  с

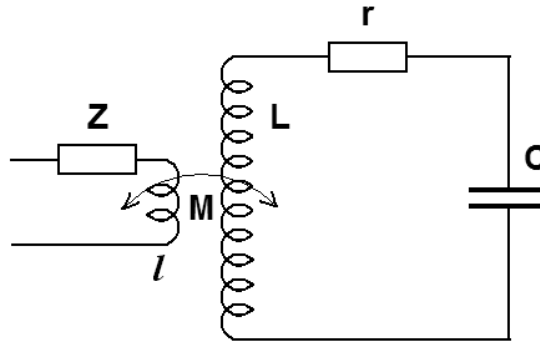


Рис. 4.8: Схема возбуждения колебательного контура

катушкой связи индуктивностью  $l$ , являющейся нагрузкой внешней цепи с волновым сопротивлением  $Z$  (рис. 4.8).

Запишем уравнения Кирхгофа для контура и внешней цепи без внешних источников. Здесь, как обычно в радиотехнических расчетах, будем считать, что зависимость от времени —  $e^{i\omega t}$ .

Эти уравнения:

$$I_c \left( i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + r \right) + i\omega M I_l = 0, \quad (4.135)$$

$$i\omega M I_c + (Z + i\omega l) I_l = 0, \quad (4.136)$$

где  $I_c$  и  $I_l$  - токи в контуре и во внешней линии.

Собственная комплексная частота связанного с внешней линией контура определяется из равенства нулю детерминанта системы (4.135-4.136), что сводится к уравнению:

$$\omega^2(Ll - M^2) - i\omega(LZ + lr) - rZ - \frac{l}{C} + i \cdot \frac{Z}{\omega C} = 0. \quad (4.137)$$

Введя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (4.138)$$

$$X = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (4.139)$$

$$\eta = \frac{\omega_0 l}{Z} \ll 1, \quad (4.140)$$

$$\frac{r}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q_0} \ll 1, \quad (4.141)$$

$$1 - \frac{M^2}{lL} = K, \quad (4.142)$$

из (3) получим уравнение для комплексного  $X = X' + iX''$ ,  $X'' \ll X'$ :

$$X^3 \cdot \eta K - iX^2 \cdot \left(\frac{\eta}{Q_0} + 1\right) - X \cdot \left(\eta + \frac{1}{Q_0}\right) + i = 0. \quad (4.143)$$

Разделив (4.143) на мнимую и действительную части и оставив только члены нулевого и первого порядка в каждом из уравнений, получим из уравнения для мнимой части:

$$X' = 1, \quad (4.144)$$

а из уравнения для действительной части:

$$2X'' = \eta(1 - K) + \frac{1}{Q_0} = \eta \cdot \frac{M^2}{lL} + \frac{1}{Q_0}. \quad (4.145)$$

Введем нагруженную добротность как  $Q = X'/2X''$  и, перейдя к первоначальным параметрам по (4.138-4.142), получим из (4.145):

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} \left(1 + \frac{\omega_0^2 M^2}{rZ}\right), \quad (4.146)$$

откуда коэффициент связи

$$\beta = \frac{\omega_0^2 M^2}{rZ} = Q_0 \cdot \frac{\omega_0 M^2}{LZ}. \quad (4.147)$$

Как и следовало ожидать, параметры колебательной системы и подводящей линии входят одинаковым образом в выражения (4.128) и (4.147) для коэффициента связи. Коэффициент магнитной поляризуемости отверстия связи в резонаторе  $\kappa$  аналогичен взаимной индуктивности  $M$ , относительный поток энергии в волноводе — волновому сопротивлению  $Z$ , а относительная запасенная энергия в резонаторе — индуктивности контура  $L$ , и эта аналогия очевидна и из энергетических соотношений.

## 4.7 Некоторые вопросы использования объемных резонаторов

Область использования объемных резонаторов можно условно разделить на две части. Одна из них - техника СВЧ, самыми важными потребителями которой являются связь,

радиолокация, а из научных приложений - радиоастрономия. В технике СВЧ резонаторы являются СВЧ элементами приемных и передающих цепей. Они используются в качестве фильтров, накопителей энергии, резонансных нагрузок и т.п., выполняя по существу ту же самую роль, которую в радиодиапазоне выполняют колебательные контуры. Другая область использования резонаторов отличается тем, что поле в резонаторе взаимодействует с введенным в резонатор веществом, и под веществом в данном случае следует считать не только твердое тело, жидкость и газ, но и плазму, электронные и ионные пучки и т.п. Введенное в объем резонатора вещество можно назвать нагрузкой резонатора, поскольку между полем резонатора и веществом обычно происходит обмен энергией, в частности, часть мощности из резонатора может поглощаться в нагрузке.

Необходимость использования резонаторов для технических и научных целей в этой области возникает обычно по двум уже отмеченным выше (см. начало гл. 4) причинам. Во-первых, на нагрузку в резонаторе СВЧ поле воздействует в узком диапазоне частот, определяемом собственной частотой резонатора и его добротностью. Во-вторых, в СВЧ резонаторах значительной добротности существенно увеличивается амплитуда поля по сравнению с полем в подводящей линии. В большинстве случаев применения резонаторов в той или иной степени используют оба эти фактора. Например, в опытах по измерению СВЧ характеристик веществ помещение образца в резонатор позволяет упростить исследование частотных зависимостей вещества и одновременно увеличивает чувствительность измерений; для получения электронных или ионных пучков релятивистских и ультрарелятивистских энергий в современных ускорителях требуются СВЧ поля с напряженностью сотни Кв/см и более, что сложно получить без резонаторов; во многих электронных приборах для генерации и усиления СВЧ колебаний резонаторы являются основными элементами; резонаторы являются частью установок для создания и использования как высокотемпературной, так низкотемпературной плазмы и т.п. Каждая из этих областей использования резонатора имеет свою специфику и при описании взаимодействия поля с веществом в резонаторе учитываются несколько факторов.

Прежде всего, как уже рассматривалось выше (см. раздел 4.5), при внесении в резонатор любого дополнительного элемента изменяется как собственная частота резонатора, так и распределение полей собственных колебаний. В аналитической форме расчет собственной частоты и распределения полей, в том числе и в нагрузке, удается сделать для нагрузок простой геометрии, в частности, при заполнении всего объема резонатора однородной средой, или когда размеры внесенного тела существенно меньше рабочей длины волны (см. раздел 4.5). Другим фактором является учет зависимости электромагнитных свойств нагрузки от поля. Эта зависимость может иметь достаточно сложный характер у многих сред, в частности, у плазменных образований, электронных и ионных пучков, некоторых магнитных материалов и т.п., и в общем случае эта зависимость нелинейная и иногда нестационарная. Особенно значительные сложности для расчета возникают в случае, когда характерное время нестационарного процесса в нагрузке меньше времени установления колебания в резонаторе. Однако, у многих диэлектриков и магнетиков, а в частности, металлов, электромагнитные свойства, т.е. диэлектрическая и магнитная проницаемости слабо зависят от поля. В этом случае собственную частоту в резонаторе с нагрузкой можно считать постоянной, а потери в нагрузке  $\bar{P}_L$  пропорциональны омическим потерям  $\bar{P}_0$  в стенках резонатора. Далее мы подробнее рассмотрим этот случай. Заметим однако, что приближенно полученные

далее результаты можно применить и к нагрузкам со слабой нелинейностью  $\bar{P}_L(\bar{P}_0)$ , в частности, когда потери на основной частоте существенно превышают потери на гармониках, формирующихся из-за нелинейности.

### 4.7.1 Резонатор с внутренней нагрузкой

Рассмотрим некоторые общие свойства резонаторов с внутренней нагрузкой.

Мощность, подходящая по линии к резонатору, разделяется на три части: часть мощности отражается от резонатора, а поступившая в резонатор мощность идет на неизбежный омический нагрев стенок и в нагрузку, являющуюся дополнительным источником потерь. Для расчета соотношений между этими величинами введем  $\beta_L$  — коэффициент связи резонатора с волноводом при наличии нагрузки, и, как и раньше, через  $\beta$  обозначим коэффициент связи пустого резонатора. Использование этого коэффициента связи имеет практический смысл, поскольку обычно сначала изготавливается резонатор с элементом связи, а затем туда помещается нагрузка.

Мощность нагрузки резонатора обозначается через  $P_L$ . Если  $\bar{\Sigma}$  — мощность, подводимая к резонатору по волноводу, то имеем на резонансной частоте:

$$P_L + P_0 = \frac{4\beta_L}{(1 + \beta_L)^2} \cdot \bar{\Sigma} \quad (4.148)$$

где  $P_0$  — мощность омических потерь.

Введем отношение мощности в нагрузке к мощности омических потерь:

$$\eta = \frac{P_L}{P_0} \quad (4.149)$$

и из (4.77) следует соотношение:

$$\beta_L = \frac{\beta}{1 + P_L/P_0} = \frac{\beta}{1 + \eta} \quad (4.150)$$

Здесь необходимо отметить следующее. Как уже упоминалось выше (см. конец разделов 4.4 и 4.5), при помещении нагрузки в резонатор его собственная частота сдвигается. Поскольку понятие коэффициента связи введено для резонатора на собственной частоте  $\omega'_s$ , то сравнение  $\beta$  и  $\beta_L$ , в частности, использование формулы (4.150), корректно только при относительно небольшом сдвиге частоты и слабой зависимости  $\beta(\omega)$ . Если элемент связи не имеет собственных резонансных свойств, то обычно зависимость  $\beta(\omega)$  слабая (см., например, (4.128)), и для многих практических применений учет этой зависимости несуществен.

Собственная добротность резонатора должна включать потери в нагрузке, и поэтому  $Q_0$  следует заменить на

$$Q_L = \frac{Q_0}{1 + \eta} \quad (4.151)$$

Подставив (4.150) в (4.148), получим формулы для полной мощности, поглощенной в резонаторе с нагрузкой:

$$P = P_L + P_0 = \frac{4\beta(1 + \eta)}{(1 + \beta + \eta)^2} \cdot \bar{\Sigma} \quad (4.152)$$



для мощности омических потерь:

$$P_0 = \frac{4\beta}{(1 + \beta + \eta)^2} \cdot \bar{\Sigma} \quad , \quad (4.153)$$

и мощности в нагрузке:

$$P_L = \frac{4\beta\eta}{(1 + \beta + \eta)^2} \cdot \bar{\Sigma} \quad , \quad (4.154)$$

выраженные через коэффициент связи пустого резонатора  $\beta$  и параметр  $\eta$ .

Из (4.148) и (4.150) можно получить также полезную формулу

$$P_L = 2\sqrt{\beta\bar{\Sigma}P_0} - (1 + \beta)P_0 \quad , \quad (4.155)$$

напрямую связывающую мощность, выделяемую в нагрузке, с мощностью омических потерь и мощностью возбуждения.

Отметим, что формулы (4.152-4.154) следуют, по существу, только из закона сохранения энергии для электромагнитного поля. Они справедливы и для не очень сильной нелинейной зависимости мощности нагрузки от поля.

Из выражений (4.152-4.154) видно, что при фиксированной мощности возбуждения мощность в нагрузке и поле в резонаторе определяются двумя безразмерными независимыми параметрами  $\beta$  и  $\eta$ .

Проанализируем эти выражения для практических целей. Эти цели могут быть разными для разных применений резонатора, и одна из встречающихся - получение максимальной мощности в нагрузке при заданной входной мощности.

Продифференцировав по  $\beta$  выражение (4.154), получим связь между  $\eta$  и  $\beta$  для получения максимальной мощности  $P_L^{max}$  в виде:

$$\beta_m = \eta_m + 1 \quad , \quad (4.156)$$

откуда видно, что в этом случае коэффициент связи резонатора без нагрузки должен быть больше единицы. Таким образом, подставив (4.156) в (4.154), для максимальной мощности в нагрузке имеем:

$$P_L^m = \frac{\beta_m - 1}{\beta_m} \cdot \bar{\Sigma} \quad , \quad (4.157)$$

и при этом мощность омических потерь :

$$P_0^m = \frac{1}{\beta_m} \cdot \bar{\Sigma} \quad . \quad (4.158)$$

Сложив (4.157) и (4.158), получим, что вся поступающая мощность входит в резонатор, где поглощается стенками резонатора и нагрузкой, то есть  $\beta_L = 1$ . То есть при выборе коэффициента связи согласно (4.156) в нагрузке резонатора выделяется максимальная мощность и при этом резонатор согласован с линией передачи.

Из (4.157) следует, что при увеличении  $\beta$  можно увеличить долю мощности в нагрузке, но при этом, однако, уменьшается нагруженная добротность резонатора и выбор связи определяется компромиссом между достижимой мощностью в нагрузке и шириной частотной полосы резонатора. Заметим, что если добротность падает до такого

уровня, что нельзя пользоваться условием  $Q \gg 1$ , то используемые выше расчетные формулы оказываются несправедливыми.

Дополнительно выпишем выражение для квадрата абсолютной величины поля в резонаторе с нагрузкой, которое следует из (4.132) при подстановке (4.150) и (4.151):

$$|A_s|^2 = \frac{2Q_0}{\omega'_s N_s} \cdot \frac{4\beta}{(1 + \beta + \eta)^2} \cdot \bar{\Sigma} \quad . \quad (4.159)$$

Применим полученные формулы для отдельных случаев использования резонаторов.

## 4.7.2 Резонатор, связанный с двумя линиями передачи

Рассмотрим резонатор, соединенный с двумя линиями передачи. В наиболее распространенном на практике случае по одной из линий в резонатор поступает мощность  $\bar{\Sigma}$ , а по другой выходящая мощность  $\bar{\Sigma}_2$  поступает в нагрузку (т.н. включение резонатора "на проход"). Нагрузкой может быть, например, детектор для регистрации поля в резонаторе, а типы линий передачи и элементы связи могут быть различными, в зависимости от целей использования такой схемы.

Обозначим коэффициент связи со стороны питающей линии как  $\beta_1$  и, согласно (4.77),

$$\beta_1 = \frac{\bar{\Sigma}_1}{\bar{P}_0} \quad , \quad (4.160)$$

где  $\bar{\Sigma}_1$  - мощность, выходящая через этот элемент связи в линию.

Коэффициент связи со стороны нагрузки, соответственно, равен:

$$\beta_2 = \frac{\bar{\Sigma}_2}{\bar{P}_0} \quad . \quad (4.161)$$

Заметим, что в определении (4.77) коэффициента связи предполагается, что поле в резонаторе и, соответственно, мощность омических потерь являются фиксированными, как в случае, когда резонатор возбуждается внутренними сторонними токами. Поэтому в резонаторе с двумя элементами связи потери на излучение наружу через один из элементов не зависят от наличия другого. Полная добротность резонатора с двумя элементами связи определяется всей теряемой мощностью и, следовательно, можно записать:

$$Q_L = \frac{Q_0}{1 + \beta_1 + \beta_2} \quad . \quad (4.162)$$

Легко видеть, что для расчета возбуждения резонатора со стороны линии с коэффициентом связи  $\beta_1$  (который можно назвать **локальным**), когда постоянной считается падающая мощность, можно использовать формулы предыдущего подраздела, считая, что выходящая из резонатора мощность через второй элемент связи  $\beta_2$  является дополнительной нагрузкой резонатора, т.е. ,  $\beta_2 = \eta$  (4.149).

Для использования резонатора локальные коэффициенты связи  $\beta_1$  и  $\beta_2$  можно предварительно рассчитать, но иногда при этом трудно получить хорошую точность, а при

измерении каждого из этих коэффициентов стандартными способами (см. раздел 2.7) для рабочего резонатора необходимо исключить потери излучения через другой элемент связи. На практике, в рабочем резонаторе с обоими элементами связи легче непосредственно измерить **полные** коэффициенты связи  $\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_2$  со стороны каждой из линий передачи, которым соответствует коэффициент  $\beta_L$  в формуле (4.150), т.е.

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\beta_1}{1 + \bar{\Sigma}_2/P_0} = \frac{\beta_1}{1 + \beta_2} \quad (4.163)$$

$$\mathcal{B}_2 = \frac{\beta_2}{1 + \bar{\Sigma}_1/P_0} = \frac{\beta_2}{1 + \beta_1} \quad (4.164)$$

Используя формулу (4.154), получим для мощности  $P_2$ , выходящей через второй элемент связи, при возбуждении резонатора через первый элемент связи:

$$P_2 = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1 + \beta_1 + \beta_2)^2} \cdot \bar{\Sigma} \quad (4.165)$$

Из симметрии этого уравнения относительно  $\beta_1$  и  $\beta_2$  следует, что мощность, проходящая через резонатор, не зависит от того, через какой элемент связи проводится возбуждение – в соответствии с теоремой взаимности (раздел 2.3).

Используя (4.163) и (4.164), выпишем формулы, связывающие полные и локальные коэффициенты связи:

$$\beta_1 = \frac{\mathcal{B}_1(1 + \mathcal{B}_2)}{1 - \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}, \quad (4.166)$$

$$\beta_2 = \frac{\mathcal{B}_2(1 + \mathcal{B}_1)}{1 - \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}, \quad (4.167)$$

и, подставив эти выражения в (4.165), получим:

$$P_1 = P_2 = \frac{4\mathcal{B}_1 \cdot \mathcal{B}_2}{(1 + \mathcal{B}_1) \cdot (1 + \mathcal{B}_2)} \cdot \bar{\Sigma} \quad (4.168)$$

Нагруженная добротность (4.162), выраженная через полные коэффициенты связи, представляется в виде:

$$Q_\beta = Q_0 \cdot \frac{1 - \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}{(1 + \mathcal{B}_1) \cdot (1 + \mathcal{B}_2)} \quad (4.169)$$

Если резонатор в схеме "на проход" используется в качестве частотного фильтра – для пропускания сигналов в узкой полосе частот, то часто требуется получить максимальную величину мощности в выходной линии передачи. Как следует из формул предыдущего подраздела, коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  для этого должны быть связаны условием:

$$\beta_1^m = 1 + \beta_2 \quad , \quad (\beta_1^m > 1) \quad , \quad (4.170)$$

и при этом

$$\mathcal{B}_1 = 1 \quad , \quad (4.171)$$

$$\mathcal{B}_2^m = \frac{\beta_2}{2 + \beta_2} = \frac{\beta_1^m - 1}{\beta_1^m + 1} \leq 1 \quad , \quad (4.172)$$

а пропускаемая мощность

$$P_2^m = \frac{\beta_1^m - 1}{\beta_1^m} \cdot \bar{\Sigma} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + 1} \cdot \bar{\Sigma} = \frac{2\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_2 + 1} \cdot \bar{\Sigma} \quad , \quad (4.173)$$

при добротности резонатора:

$$Q = \frac{Q_0}{2\beta_1^m} = \frac{Q_0}{2(\beta_2 + 1)} \quad . \quad (4.174)$$

В принципе, как следует из (4.173), через резонатор, включенный "на проход", можно пропустить значительную долю мощности, увеличивая  $\beta_2$  и, соответственно,  $\beta_1^m$ , однако при этом из-за уменьшения добротности увеличивается полоса пропускаемого сигнала.

Проведенные расчеты нетрудно обобщить на любое число линий передачи, связанных с резонатором.

### 4.7.3 Измерение СВЧ свойств вещества в резонаторе

Характеристиками конденсированного вещества (газов, жидкостей, твердых тел) в СВЧ диапазоне являются комплексные (и, вообще говоря, тензорные) диэлектрическая  $\varepsilon$  и магнитная  $\mu$  проницаемости образцов. Как уже отмечено выше (см. начало раздела 4.6), использование резонаторов для изучения этих параметров позволяет существенно поднять чувствительность измерений за счет увеличения величины СВЧ поля в образце вещества, а также за счет возможности прецизионного измерения частотных сдвигов в резонаторах большой добротности.

Такие опыты обычно проводят, дополнительно изменяя определенные внешние параметры: температуру образцов, давление, внешнее магнитное поле и т.п. Образец может занимать весь объем или часть объема резонатора или же помещаться в виде небольшого образца (например, кристалла) в определенном месте резонатора. Если изучаются магнитные свойства, то образец желательно помещать в максимум магнитного СВЧ поля, а при изучении электрических свойств — в максимум электрического. Изменение характеристик резонатора при внесении в него образца рассчитывается известными электродинамическими методами, в частности, если образец мал по сравнению с длиной волны, используют приближенные методы, изложенные выше в разделе 3.5.

На рис. 4.9 в качестве примера изображена типичная СВЧ схема измерения магнитного резонанса в кристаллах. При магнитном резонансе в кристаллах обычно существенно возрастают потери (мнимая часть магнитной проницаемости).

Кристалл прикрепляется (обычно приклеивается) к стенке резонатора (часто используется мода  $H_{011}$ ) в области максимального СВЧ магнитного поля. Резонатор помещается в зазор электромагнита с регулируемым постоянным магнитным полем. Сигнал в резонатор поступает от СВЧ генератора регулируемой частоты по волноводу, подсоединенному к резонатору с элементом связи в виде отверстия в тонкой диафрагме. Между генератором и резонатором вставляются аттенюатор и направленный ответвитель. К ответвителю присоединяется детекторная головка с квадратичным детектором для измерения сигнала, отраженного от резонатора. Для регистрации поля в резонаторе служит дополнительный волновод с детекторной головкой и при этом коэффициент

связи резонатора с трактом регистрации выбирают так, чтобы  $\beta_2 \ll 1$ , и тогда можно считать, что  $U \propto E^2 \propto H^2 \propto P_0$ . В этом случае в других расчетах допустимо использовать только коэффициент связи  $\beta$  пустого резонатора. Для исследования свойств магнитного кристалла измеряют или проходящий, или отраженный сигналы (иногда оба) в зависимости от внешнего магнитного поля на фиксированной частоте возбуждения, или в зависимости от частоты при постоянном магнитном поле. В последнем случае резонатор необходимо подстраивать.

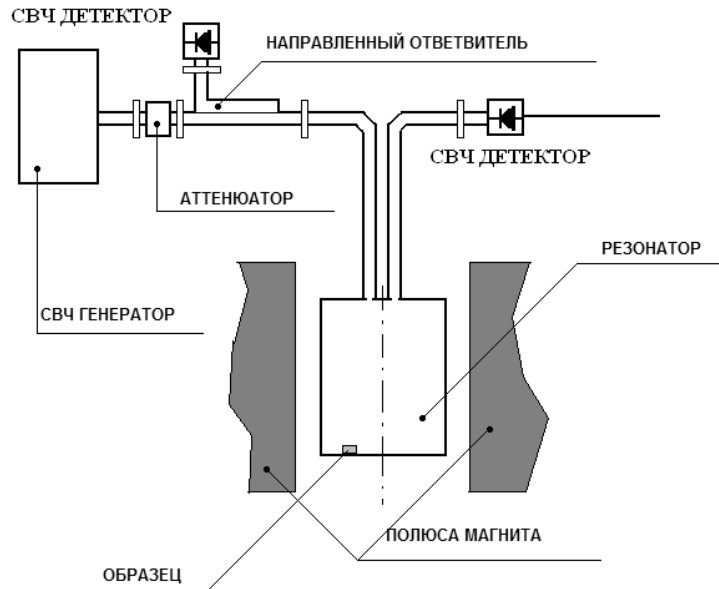


Рис. 4.9: Схема СВЧ измерений магнитных свойств образцов в резонаторе

Мощность потерь в исследуемом образце можно представить в виде:

$$P_L = \chi P_0 \quad , \quad (4.175)$$

где  $\chi$  — коэффициент, определяемый свойствами образца, его геометрией и местом расположения в резонаторе. Вообще говоря, образец может иметь нелинейные свойства по полю и тогда  $\chi = \chi(P_0)$ . В большинстве опытов именно из величины  $\chi$  и зависимости этого коэффициента от внешних параметров — постоянного магнитного поля, температуры и т.п. получают информацию о свойствах вещества.

Для образца без нелинейности при фиксированном  $P_0$  и поддержании частоты входного сигнала на вершине резонансной кривой имеем из (4.150) и (4.155):

$$\chi = \sqrt{\frac{4\beta\bar{\Sigma}}{P_0}} - (1 + \beta) \quad . \quad (4.176)$$

Таким образом, измерение абсолютной величины  $\chi$  сводится к измерению отношения мощностей  $\bar{\Sigma}/P_0$  и коэффициента связи  $\beta$ .

Если образец мал и при его помещении в резонатор частота резонатора меняется незначительно (см. раздел 4.5), то измерения отношения мощностей можно избежать, если измерять сигнал детектора при наличии образца в резонаторе —  $U \propto P_0^L$  и без образца —  $U_0 \propto P_0(\chi = 0)$ . Тогда из (4.176):

$$\chi = (1 + \beta) \left( \sqrt{\frac{U_0}{U}} - 1 \right) . \quad (4.177)$$

При измерениях магнитных резонансов величиной  $U_0$  часто допустимо считать сигнал с детектора в нерезонансном магнитном поле, когда поглощение в образце незначительно.

Вместо схемы "на проход" можно измерять коэффициент отражения от резонатора. Нетрудно получить, что коэффициент отражения:

$$|R|^2 = \left( 1 - \frac{\beta}{1 + \chi} \right)^2 / \left( 1 + \frac{\beta}{1 + \chi} \right)^2 , \quad (4.178)$$

откуда следует, что

$$\chi = \beta \cdot \frac{1 + R}{1 - R} - 1 . \quad (4.179)$$

При таких измерениях сигнал на детекторе вне резонансной кривой максимален.

Заметим, что при использовании формулы (4.179) необходимо измерять не только абсолютную величину коэффициента отражения  $R$ , но и его знак.

#### 4.7.4 Ускорение элементарных частиц с использованием СВЧ резонаторов

В ускорителях элементарных частиц (электронов, протонов) резонаторы СВЧ используются для увеличения напряженности электрического поля вдоль пути движения частицы, чтобы увеличить набор энергии частицей за один проход резонатора. Динамика ускорения частиц в СВЧ резонаторе — достаточно сложный процесс, однако расчет этого движения в настоящее время является вполне стандартной процедурой. При надлежащем выборе режима работы ускорителя выходной пучок формируется в виде регулярной последовательности компактных сгустков частиц (банчей), расположенных на расстоянии, равной длине возбуждающей СВЧ волны. Длина каждого сгустка в несколько раз меньше длины СВЧ волны и энергия частиц не сильно изменяется вдоль сгустка.

Будем считать, что ускоряемый пучок приобретает в резонаторе среднюю энергию  $e\bar{U}$ , где

$$\bar{U} = \xi \sqrt{P_0} , \quad (4.180)$$

поскольку напряженность электрического поля в резонаторе  $E \propto \sqrt{W} \propto \sqrt{P_0}$ . Коэффициент  $\xi$  определяется динамикой процесса ускорения и зависит от конкретного типа ускорителя. Как следует из (4.158), при максимально возможной эффективности

отбора мощности из резонатора ускоряемым пучком (4.157), энергия пучка составляет

$$\bar{U} = \xi \sqrt{\frac{\bar{\Sigma}}{\beta_m}} \quad , \quad (4.181)$$

а средний ток, вычисляемый из оценочного соотношения  $P_L^{max} = \tau \bar{I} \bar{U}$ , где параметр  $\tau$  определяется скважностью тока, равен:

$$\bar{I} = \frac{1}{\xi \tau} \frac{\beta_m - 1}{\sqrt{\beta_m}} \cdot \sqrt{\bar{\Sigma}} \quad . \quad (4.182)$$

При заданной мощности возбуждения для повышения мощности в электронном пучке, согласно (4.157), нужно увеличивать коэффициент связи.

Как видно из (4.181) и (4.182), при увеличении  $\beta$  свыше единицы эффективная энергия пучка уменьшается, а ток растет. Таким образом, отсюда следует, что, вообще говоря, при использовании СВЧ резонаторов более сильноточные ускорители на меньшую энергию по выходной мощности оказываются эффективней высоковольтных ускорителей. Однако, возможность увеличения эффективности ускорителей увеличением коэффициента связи имеет серьезные ограничения, поскольку динамика процесса ускорения обычно существенно зависит от напряженности электрического поля. В этом случае вместо простых формул (4.181) и (4.182) получаются более сложные выражения.

Одним из эффективных электронных ускорителей является циклический ускоритель - микротрон, в котором ускоряемые релятивистские электроны, многократно проходят через ускоряющий СВЧ резонатор, обходя его по круговым орбитам в постоянном магнитном поле. Специфической чертой процесса ускорения в микротроне является то, что пучок доходит до последней орбиты только при фиксированной амплитуде поля в резонаторе, то есть при фиксированных потерях  $P_0$ . В этом пучке в формуле (4.155) можно варьировать только коэффициент связи  $\beta$ . Оптимальный при этих условиях коэффициент связи, соответствующий  $dP_L/d\beta = 0$ , определяется формулой:

$$\beta = \frac{\bar{\Sigma}}{P_0} \quad . \quad (4.183)$$

При этом

$$P_L^m = \bar{\Sigma} - P_0 \quad , \quad (4.184)$$

$$\eta = \frac{\beta - 1}{\beta} \quad , \quad (4.185)$$

а

$$\beta_L = 1 \quad , \quad (4.186)$$

то есть вся мощность, поступающая в резонатор от СВЧ источника, поглощается пучком и стенками резонатора.

## Глава 5

# Квазиоптические методы в коротковолновых диапазонах СВЧ

При укорочении длины волны излучения — при переходе от сантиметрового в миллиметровый, субмиллиметровый и далее в ИК диапазон — размеры электродинамических устройств могут превышать длину волны и иногда существенно. Для расчета распространения э.-м. волн в оптическом диапазоне ( $\lambda \ll a$ ) уже давно используют лучевые методы, а чтобы учесть изменения фазы волны, в частности, при рассмотрении дифракционных явлений, используют принцип Гюйгенса, развитием которого являются дифракционные методы Френеля и Фраунгофера. Решение же электродинамических задач непосредственно из уравнений Максвелла в коротковолновых диапазонах во многих случаях приводит к громоздким вычислениям. Приближенные методы, которые называют квазиоптическими, позволяют достаточно простыми методами получать конечный результат, особенно для задач распространения волн и проблем дифракции. Дополнительно следует отметить, что квазиоптические методы вполне успешно используются в длинноволновых диапазонах, поскольку применимость той или иной методики вычислений зависит не от абсолютной длины волны, а от ее отношения к характерному линейному масштабу задачи. Квазиоптические методы применяются, например, в задачах дифракции радиочастотных волн на больших телах. Далее, однако, внимание будет уделяться тем устройствам, которые применяются в миллиметровом и более коротковолновых диапазонах. Несмотря на то, что квазиоптические методы в коротковолновой части СВЧ диапазона позволяют с достаточной точностью рассчитывать квазиоптические устройства, во многих случаях качественную картину квазиоптических полей можно представить, используя лучевую трактовку распространения волн, аналогично тому, как это делается в оптике.

### 5.1 Параболическое уравнение и гауссовы пучки излучения

Основным объектом изучения в квазиоптике являются пучки излучения, ограниченные по поперечным координатам, и при этом характерные поперечные размеры пучка  $a \gg \lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны излучения.



Любую из компонент поля (например,  $E_y$ ) в пучке, распространяющемся в свободном пространстве вдоль оси  $x$ , можно представить в виде:

$$E_y = \Phi(x, y, z)e^{ikx} \quad , \quad (5.1)$$

выделив в виде множителя при амплитудной функции  $\Phi(x, y, z)$  фазовое изменение свободно распространяющейся волны.

В направлении распространения (по оси  $x$ ) поля в широком волновом пучке изменяются слабее, чем в поперечном направлении, поэтому можно считать,  $\Phi(x, y, z)$  — медленно меняющаяся функция по координате  $x$ . Если в волновое уравнение (1.93) подставить поле в виде (5.1), то производной  $\partial^2\Phi/\partial x^2$  в этом уравнении можно пренебречь по сравнению с остальными членами. Для функции  $\Phi(x, y, z)$  получается приближенное параболическое уравнение:

$$\Delta_{yz}\Phi + 2ik\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \quad , \quad (5.2)$$

которое для практически важных задач в квазиоптике решается более простыми методами, чем точное волновое. В частности, снижение порядка дифференциального уравнения позволяет в граничных условиях исключить первую производную.

Параболическим уравнением описывается также теплопроводность и диффузия вещества, поэтому иногда его называют уравнением диффузии. И, по аналогии, картину распространения квазиоптических пучков трактуют как диффузию поля, причем учитывается только более сильная "поперечная диффузия" (поперек распространения волны). Кроме этого, параболическое уравнение широко используется в нерелятивистской квантовой механике — это уравнение Шредингера.

Рассмотрим подробнее некоторые решения параболического уравнения в двумерном случае:

$$E_y = \Phi(x, y)e^{ikx} \quad . \quad (5.3)$$

Как известно, однородным линейным уравнениям с частными производными удовлетворяют наборы собственных функций, конкретный выбор которых определяется граничными условиями задачи. При рассмотрении уравнений Максвелла решение задач часто сводится к волновому уравнению. В бесконечном пустом пространстве (см. раздел 1.3) простейшими собственными решениями волнового уравнения являются парциальные плоские волны и любое поле можно разложить в ряд или представить в виде интеграла по этим волнам, у которых параметром являются волновые вектора  $\vec{k}$ .

Аналогичным образом, параболическому уравнению (здесь — двумерному)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \quad , \quad (5.4)$$

удовлетворяют решения в виде совокупности парциальных плоских волн, амплитудные части которых представляются также в экспоненциальном виде:

$$\Phi_0(x, y) = \exp\{ipx +igy\} \quad . \quad (5.5)$$

Подстановка (5.5) в (5.4) дает связь между продольной  $p$  и поперечной  $g$  компонентами волнового вектора амплитудной части волны:

$$p = -\frac{g^2}{2k} \quad . \quad (5.6)$$

Продольная компонента  $p$  - небольшое изменение основного продольного волнового числа  $k$  плоской волны, а поперечное волновое число  $g$  мало по сравнению с  $k$  в силу условия  $a \gg \lambda$ .

Таким образом, волновой вектор плоской параболической волны, удовлетворяющей параболическому уравнению, имеет вид:

$$\vec{k}_p (k_{px} = k - \frac{g^2}{2k}, k_{py} = g) \quad . \quad (5.7)$$

В отличие от условия

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 \quad , \quad (5.8)$$

для волнового уравнения, при квазиоптическом рассмотрении равенство (5.8) выполняется только приближенно (с точностью до членов четвертого порядка малости) при условии  $g/k \ll 1$ , а именно, из (5.7) следует:

$$k_{px}^2 + k_{py}^2 = k^2 \left( 1 + \frac{g^4}{4k^4} \right) \quad . \quad (5.9)$$

Таким образом, решения уравнения (5.4) в виде плоских волн

$$\Phi_g(x, y) = A_g \exp\left\{i \left(k - \frac{g^2}{2k}\right) x + i g y\right\} \quad . \quad (5.10)$$

приближенно справедливы для волн с относительно малым углом распространения по отношению к основному направлению (оси  $x$ ). Любое поле, удовлетворяющее уравнению (5.4) при постановке конкретных граничных условий, может быть выражено в виде суммы парциальных волн (5.10) с разными значениями  $g$  и амплитуд  $A_g$ . Для конкретной задачи эти амплитуды определяются из граничных условий и условий возбуждения. При непрерывном изменении волнового числа  $g$  сумма волн заменяется интегралом по поперечному волновому числу вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, g) \exp\left\{i \left(k - \frac{g^2}{2k}\right) x + i g y\right\} dg \quad . \quad (5.11)$$

Другим решением двумерного параболического уравнения является цилиндрическая волна

$$W = \frac{1}{\sqrt{kx}} \exp\left\{ik \cdot \frac{y^2}{2x^2}\right\} \quad , \quad (5.12)$$

расходящаяся из начала координат. Это приближенное решение асимптотически (при больших  $x$ ) совпадает с точным решением для цилиндрической волны, получаемой из волнового уравнения.

К практически важным собственным квазиоптическим волнам относится так называемый гауссовый пучок. Энергия волны, распространяющейся в виде гауссова пучка, сосредоточена вблизи оси его распространения, где относительно слабо зависит от поперечной координаты, а затем резко спадает при удалении от оси. По этой причине в инфракрасной и более длинноволновых областях — терагерцовой, миллиметровой и

вплоть до сантиметрового диапазона — электромагнитную энергию предпочитают передавать по пространству в виде гауссовых пучков.

Рассмотрим в качестве примера двумерный гауссовый пучок электромагнитных волн, распространяющийся вдоль оси  $x$  и поляризованный по оси  $y$ .

Медленно меняющаяся (по оси  $x$ ) функция  $\Phi_g(x, y)$ , описывающая гауссовый пучок, выражается формулой:

$$\Phi_g(x, y) = E_0 \cdot \frac{ka_0}{\sqrt{V}} \cdot \exp \left\{ -\frac{k^2 y^2}{2V} \right\} , \quad (5.13)$$

где

$$V = k^2 a_0^2 + ikx \quad . \quad (5.14)$$

Характерный размер пучка  $a_0$  является задаваемым параметром, но его выбор ограничен условием  $ka_0 \gg 1$ , соответствующим пределам применимости параболического приближения. В том, что (5.13) удовлетворяет уравнению (5.4), нетрудно убедиться прямой подстановкой.

Другое представление гауссова пучка:

$$\Phi_g(x, y) = E_0 \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x - ib}} \cdot \exp \left\{ \frac{iky^2}{2(x - ib)} \right\} , \quad (5.15)$$

где

$$b = k a_0^2 \quad . \quad (5.16)$$

Для упрощения дальнейшего анализа функции (5.13) полезно перейти к безразмерным координатам, используя при этом переход характерный размер пучка  $a_0$  и длину волны  $\lambda = 2\pi/k$ :

$$X = \frac{x}{ka_0^2} \quad , \quad Y = \frac{y}{a_0} \quad , \quad (5.17)$$

в которых уравнение (5.4) приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + 2i \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0 \quad . \quad (5.18)$$

а для поля гауссового пучка имеем:

$$E_y = E_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + iX}} \cdot \exp \left\{ -\frac{Y^2}{2(1 + iX)} \right\} \cdot e^{i(ka_0)^2 X} = |E_y| \cdot e^{i\Phi_g} \quad . \quad (5.19)$$

Абсолютная величина поля в гауссовом пучке:

$$|E_y| = E_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + X^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{Y^2}{2(1 + X^2)} \right\} = E_0 \cdot \sqrt{\frac{ka^2}{(ka^2 + x^2)^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{ky^2}{2(ka^2 + x^2)} \right\} \quad . \quad (5.20)$$

Из (5.19) видно, что пучок симметричен относительно осей  $x$  и  $y$  и при  $x = 0$  он имеет минимальные характерные размеры  $a_0$  ("перетяжка" пучка или плоскость фокусировки) и амплитуда поля пучка по оси  $Y$  описывается функцией Гаусса:

$$|E_y|(Y, X = 0) = E_0 \cdot \exp \left\{ -\frac{Y^2}{2} \right\} = E_0 \cdot \exp \left\{ -\frac{y^2}{2a^2} \right\} \quad . \quad (5.21)$$

Максимум функции Гаусса находится на оси  $x$  и абсолютный максимум поля в пучке находится при  $x = 0, y = 0$ .

При своем распространении из  $-\infty$  (по  $x$ ) пучок сохраняет гауссово амплитудное распределение поля  $E_y(y)$  при любом  $x$ . При этом изменение характерной ширины ("границы") пучка, определяемой по спаду поля от максимума в  $\sqrt{e}$  раз, достаточно точно можно описать формулой:

$$a(x) = a_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2 a_0^4}} \quad (5.22)$$

Вблизи перетяжки граница пучка при его распространении расширяется по параболическому закону, а на больших расстояниях поле в основном заключено внутри конуса с углом при вершине  $1/ka_0$ .

Чтобы выделить фазу волны, полезно сделать еще одну замену:

$$X = \operatorname{tgu} \quad . \quad (5.23)$$

Заметим, что при  $x \rightarrow \pm \infty$  переменная  $u \rightarrow \pm \pi/2$ .

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1+iX}} = \sqrt{\cos u} \cdot e^{-iu/2} \quad , \quad (5.24)$$

а

$$-\frac{Y^2}{2(1+iX)} = -\frac{1}{2}Y^2 \cos^2 u + \frac{i}{2}Y^2 \cos u \sin u \quad . \quad (5.25)$$

Тогда поле (5.19) запишется в виде:

$$E_y = E_0 \cdot \sqrt{\cos u} \cdot \exp \left\{ -\frac{Y^2}{2} \cos^2 u \right\} \cdot e^{i\Phi_g} \quad . \quad (5.26)$$

где

$$\Phi_g = -\frac{u}{2} + \frac{Y^2}{2} \cos u \sin u + (ka)^2 \operatorname{tgu} \quad . \quad (5.27)$$

Условие  $\Phi_g = \text{const}$  определяет из (11) поверхность равных фаз  $Y_g(X)$ .

Выражение (5.27) можно также записать как:

$$\Phi_g = kx - \frac{\operatorname{arctg} X}{2} + \frac{Y^2 X}{2(1+X^2)} \quad , \quad (5.28)$$

где первое слагаемое является определяющим для фазы, а второе слагаемое приводит только к небольшим изменениям фазовой скорости при  $Y = 0$  — вдоль оси пучка.

Если представить фазу в виде

$$\Phi_g = hx \quad , \quad (5.29)$$

то при  $y = 0$  фазовая скорость запишется в виде:

$$\frac{v_{ph}}{c} = \left( 1 - \frac{\operatorname{arctg}(x/ka^2)}{2kx} \right)^{-1} \quad (5.30)$$

Она максимальна при  $x = 0$ , несколько превышая скорость света:

$$\frac{v_{ph}^{max}}{c} = \left(1 - \frac{1}{2k^2 a^2}\right)^{-1}, \quad (5.31)$$

и стремится к скорости света при  $x \rightarrow \infty$ .

При рассмотрении фазового портрета пучка в области, удаленной от оси пучка, вторым слагаемым в (5.28) можно пренебречь.

Условие  $\Phi_0 = \text{const}$  определяет из (5.28) линию равных фаз  $Y_0(X)$ . Видно, что при  $x = 0$  фаза  $\Phi_0 = 0$ , и при этом линия равной фазы — прямая линия. Выясним, какую форму  $Y_0(X)$  имеют линии равных фаз при распространении пучка от начала координат  $x = 0$ .

Линия постоянной фазы  $\Phi_g$  и ее положение  $X_0$  на оси пучка свяжем приближенным соотношением

$$\Phi_0 = (ka_0)^2 X_0, \quad (5.32)$$

и, введя отклонение от этого положения как

$$\Delta X = X_0 - X, \quad (5.33)$$

получим из (5.28):

$$Y(\Delta X, X_0) = ka_0 \cdot \sqrt{\frac{2\Delta X (1 + (X_0 - \Delta X)^2)}{X_0 - \Delta X}}. \quad (5.34)$$

Линии равных фаз вогнуты в сторону начала координат и их кривизна уменьшается по как в направлении распространения пучка, так и при удалении от оси.

Вблизи оси пучка линии равных фаз близки к параболам:

$$Y(\Delta X, X_0) \approx ka_0 \cdot \sqrt{\frac{2\Delta X (1 + X_0^2)}{X_0}}. \quad (5.35)$$

Представим теперь поле (5.19) гауссового пучка в виде интеграла по плоским волнам вида (5.7):

$$E_y = E_0 \cdot e^{i(ka)^2 X} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G(x, g) e^{igY} dg. \quad (5.36)$$

Сделав преобразование Фурье, получим

$$G(x, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{g^2}{2}(1 + iX)\right\}, \quad (5.37)$$

и, таким образом, компоненты Фурье гауссова пучка также являются функциями Гаусса по поперечному волновому числу  $g$ :

$$E_y = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{g^2}{2}\right\} e^{i\Psi(g)} dg, \quad \Psi(g) = (k^2 a^2 - \frac{g^2}{2})X + gY. \quad (5.38)$$

Перейдя к размерным координатам (5.17), получим

$$\Psi(g) = \left(k - \frac{g^2}{2ka^2}\right)x + \frac{g}{a}y \quad . \quad (5.39)$$

Выражение (5.39) удовлетворяет условию  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  с точностью до членов порядка  $(g/k^2a^2)^4$ .

Проведенное рассмотрение двумерных гауссовых пучков имеет в значительной мере методический характер. На практике для передачи энергии квазиоптическим способом используют в большинстве случаев гауссовы пучки кругового сечения. Математическое описание таких пучков будет проведено в следующем разделе при рассмотрении свойств открытых резонаторов.

## 5.2 Открытые резонаторы

Объемные резонаторы, рассмотренные в главе 4, являются основным типом колебательных систем в ДМ, СМ и ММ диапазонах СВЧ. Однако на более высоких частотах — в коротковолновой части ММ диапазона, СММ диапазоне, ИК диапазоне объемные резонаторы в значительной мере утрачивают свои частотно-селектирующие свойства. Если при увеличении рабочей частоты продолжать использовать основной тип колебаний резонатора, то, как следует из соотношения (4.41), омическая добротность резонатора падает. При этом нужно учитывать, что на практике она падает сильнее, чем  $\sqrt{\lambda}$ , поскольку из-за уменьшения толщины скин-слоя сильнее проявляются потери, связанные с неидеальностью поверхности стенок резонатора. Кроме того, объемные резонаторы на коротких волнах должны иметь такие малые размеры, что их изготовление становится сложной задачей.

В принципе, при увеличении рабочей частоты размеры резонатора можно оставлять неизменными и использовать высшие типы колебаний резонатора. Добротность высших типов колебаний при неизменных размерах  $a$  резонатора возрастает при увеличении частоты, поскольку

$$Q \sim \frac{V}{Sd} \sim \frac{a}{d} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sim \sqrt{\omega} \quad . \quad (5.40)$$

Однако, число высших типов колебаний объемного резонатора, приходящихся на фиксированный интервал  $\Delta\omega$  частот, также возрастает при увеличении частоты. В асимптотическом случае  $\omega \rightarrow \infty$  для числа собственных колебаний  $\Delta N$  в интервале  $(\omega, \omega + \Delta\omega)$  справедлива формула Рэлея-Джинса:

$$\Delta N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 \Delta\omega \quad . \quad (5.41)$$

Из (5.40) и (5.41) видно, что при увеличении частоты число собственных колебаний на элементарном частотном интервале растет существенно быстрее, чем омическая добротность колебаний. Спектр собственных колебаний сгущается, а резонансные кривые соседних колебаний начинают перекрываться, что в конечном счете приводит к потерям частотно-селектирующих свойств резонатора.

Компромиссным решением задачи создания колебательных систем для очень коротких волн является выбор такой геометрии резонатора, когда существенной добротностью обладают только те колебания, собственные частоты которых находятся достаточно далеко друг от друга. Такой спектр колебаний имеют так называемые открытые резонаторы, характерные размеры которых в большинстве случаев существенно превышают длину волны колебаний.

Прообразом открытого резонатора является интерферометр Фабри-Перо, который давно используют в оптике как спектральный прибор высокого разрешения. Интерферометр Фабри-Перо образован двумя зеркалами — оптически обработанными плоскими пластинами, частично прозрачными для света. Плоскости зеркал выставлены параллельно друг другу с точностью до долей длины волны. Свет, сформированный оптической системой в почти параллельный пучок, падает на одно полупрозрачное зеркало, частично проходит через него и затем последовательно отражается от внутренних плоскостей зеркал. В оптических расчетах при лучевой трактовке э.-м. волн зеркала можно считать бесконечными, и нетрудно рассчитать, что, если длина волны  $\lambda$  падающего света и расстояние  $2l$  между зеркалами связаны соотношением:

$$2l = q \frac{\lambda}{2} \quad , \quad (5.42)$$

где  $q \gg 1$  — целое число, то при последовательном отражении волн между зеркалами формируется стоячая волна, и часть излучения на длине волны  $\lambda$  через выходное полупрозрачное зеркало поступает на приемник света. Условию (5.42) могут удовлетворять только те волны, которые распространяются под малыми углами к оси резонатора и претерпевают внутри большое число отражений. Таким образом, интерферометр Фабри-Перо представляет собой типичную колебательную систему, которая выделяет э.-м. поле определенной частоты.

В настоящее время в связи с интенсивным освоением коротковолновой части ММ диапазона, СММ диапазона и особенно в связи с созданием лазеров открытые резонаторы различных типов широко используются в технике СВЧ, ИК области спектра и в оптике.

Электродинамический расчет открытых резонаторов основан на использовании параболического уравнения и несколько отличается от расчета объемных резонаторов, во-первых, из-за необходимости учета излучения из резонатора в свободное пространство, и, во-вторых, из-за того, что размеры открытого резонатора обычно существенно превышают длину волны  $\lambda$  собственного колебания.

### 5.2.1 Открытые резонаторы с плоскими зеркалами

Рассмотрим собственные колебания полей в системе, состоящей из двух идеально проводящих металлических зеркал, расположенных на расстоянии  $2l$  — открытый резонатор с плоскими зеркалами (рис. 5.1). Из сравнения этого открытого резонатора с интерферометром Фабри-Перо следует, что в первом приближении длины волн собственного колебания резонатора определяются выражением (5.42) и распределение поля в резонаторе можно считать "прямоугольным" — оно постоянно внутри резонатора в любой из плоскостей  $(x, y)$  и скачком падает до нуля при пересечении границы резонатора.

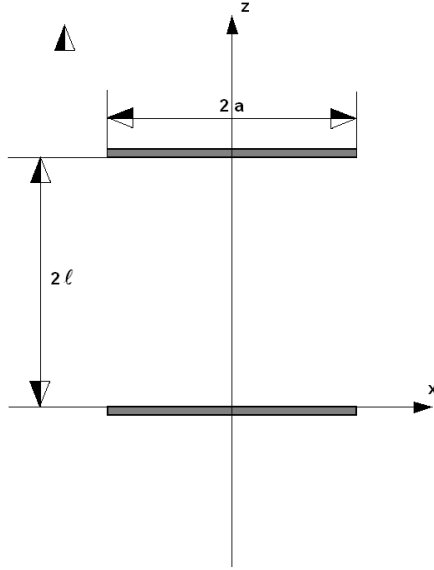


Рис. 5.1: Открытый резонатор с плоскими зеркалами (двумерный случай)

Электродинамический расчет открытых резонаторов позволяет получить собственные частоты и распределения полей собственных колебаний, которые, как будет видно из дальнейшего, существенно отличаются от "прямоугольного" распределения, и, кроме того, корректно учесть поле, излучаемое из резонатора в свободное пространство.

Расчет основан на результатах строгой теории отражения волноводных волн от открытого конца волновода, развитой Л.А. Вайнштейном [Л9, гл. I и II]. В этой теории показано, что при частотах, близких к критическим для волновода ( $k \simeq g, h/g \ll 1$ ), волноводная волна, падающая из волновода на его открытый в свободное пространство конец, может практически полностью отражаться назад. Этот вывод справедлив и для многомодового волновода, в том числе и для двумерного, то есть для прямоугольного волновода, один из поперечных размеров которого бесконечно большой.

Будем считать открытый резонатор на (рис. 5.1) сначала двумерным: размер зеркал по оси  $x$  равен  $2a \gg \lambda$ , расстояние между зеркалами —  $2l \gg \lambda$ , а по оси  $z$  зеркала считаются бесконечными. Рассмотрим такой резонатор как отрезок двумерного волновода, в котором волны распространяются вдоль оси  $x$ . Из-за условия  $2a \gg \lambda$  в таком волноводе могут распространяться волноводные волны высших типов, у которых индекс  $q$  по оси  $z$  достаточно велик. Теория показывает, что при  $h/g \ll 1$  Е- и Н-волны имеют практически одинаковый коэффициент отражения от открытого конца волновода. Е-волны высших типов имеют составляющие  $E_x, E_y, H_z$ , причем

$$|E_x| \simeq |H_y|, \quad |E_z| \ll |E_x|, \quad (5.43)$$

а Н-волны — составляющие  $H_x, E_z, H_y$ , и

$$|E_y| \simeq |H_x|, \quad |H_z| \ll |H_x|. \quad (5.44)$$



Коэффициент отражения  $R_{\parallel}$  одинаков для компонент поля  $E_x, E_y$  ( $\vec{E}_{\parallel}$ ) и  $H_x, H_y$  ( $\vec{H}_{\parallel}$ ), параллельных зеркалам, и в первом приближении:

$$R_{\parallel} \simeq -1 \quad , \quad (5.45)$$

а для перпендикулярных компонент  $E_z$  и  $H_z$ :

$$R_{\perp} \simeq +1 \quad . \quad (5.46)$$

Таким образом, собственные колебания в открытом резонаторе можно представить так же, как в объемном, в виде суперпозиции стоячих волн, только, в отличие от объемных резонаторов, стоячие волны вдоль оси  $x$  обусловлены отражением волн от открытого конца волновода, а не от металлических стенок.

В приближенном расчете распределения полей в открытом резонаторе можно пренебречь составляющими  $E_z$  и  $H_z$ , а для компонент  $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}$  и  $\vec{H}_{\parallel} = \vec{H}$  положить  $R_{\parallel} = -1$ . При этом получим, что в открытом резонаторе амплитуды полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  вдоль оси  $x$  изменяются по одинаковому закону. В частности, на зеркале

$$\vec{H}(z=0) = \vec{H}_0 \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) \quad , \quad (5.47)$$

где индекс  $m = 1, 2, 3, \dots$  можно назвать поперечным индексом собственного колебания двумерного открытого резонатора.

При условии полного отражения волн от краев зеркал собственная частота колебания двумерного открытого резонатора определяется из соотношения  $h^2 + g^2 = k^2$ , которое для колебаний с продольным индексом  $q$  и поперечным индексом  $m$  запишется в виде:

$$k = \pi \sqrt{\left(\frac{q}{2l}\right)^2 + \left(\frac{m}{2a}\right)^2} \quad . \quad (5.48)$$

Если учесть, что  $q \gg 1$ , то для низших типов колебаний ( $m \simeq 1$ ) открытого резонатора выражение (5.48) можно записать в приближенном виде:

$$kl = \pi \left( \frac{q}{2} + \frac{\pi l}{8ka^2} m^2 \right) \quad . \quad (5.49)$$

Таким образом, при переходе от бесконечных зеркал к конечным собственные частоты интерферометра Фабри-Перо (5.42), как следовало ожидать, расщепляются на ряд частот, соответствующих различным распределениям полей в поперечном сечении открытого резонатора. Выражение (5.49) нетрудно модифицировать для случая резонатора с зеркалами, ограниченными по двум координатам.

В технике СВЧ, так же, как и ИК области спектра и оптике, часто используют резонаторы с круглыми зеркалами — в виде дисков. В этом резонаторе поля естественно рассматривать в виде суперпозиции цилиндрических волн, распространяющихся между зеркалами от оси к краям и наоборот. При условии  $2l, 2a \gg \lambda$ , где  $2a$  — диаметр зеркала, такие цилиндрические волны имеют тот же коэффициент отражения от краев, что и в двумерном резонаторе. Для собственных частот трехмерных колебаний в открытом резонаторе с круглыми зеркалами (дисковом резонаторе), которые рассматриваются в цилиндрической системе координат  $(\varphi, r, z)$ , нетрудно получить приближенное

выражение, аналогичное (5.49):

$$kl = \pi \left( \frac{q}{2} + \frac{\nu_{mn}^2 l}{2\pi k a^2} \right) , \quad (5.50)$$

где  $m$  — азимутальный, а  $n$  — радиальный индексы колебания,  $\nu_{mn}$  —  $n$ -й положительный корень уравнения:

$$J_m(\nu) = 0 , \quad (5.51)$$

где  $J_m$  — функция Бесселя порядка  $m$ , где индекс  $m$  характеризует азимутальные вариации поля ( $m = 0$  — азимутально однородное распределение), а индекс  $n$  — радиальные вариации поля.

Естественно, что при точном равенстве  $R_{||} = -1$  для всех типов волн спектр собственных частот открытого резонатора не может быть реже спектра объемного резонатора той же геометрии и размеров. Разрежение спектра собственных частот открытого резонатора с плоскими зеркалами происходит из-за того, что, как показано в строгой теории, коэффициент отражения волноводной волны от краев зеркал сильно зависит от продольного волнового числа  $h$  этой волны. Модуль коэффициента отражения близок к единице при  $h/g \simeq 0$  и резко падает при увеличении  $h$ . Если рассматривать лучевую картину полей, последовательно отражающихся от зеркал резонатора, то лучи, падающие на зеркало под углами, мало отличающимися от нормального, из-за дифракции на крае зеркала поворачивают на небольшой угол внутрь резонатора и не выходят наружу. Поскольку  $h$  растет с увеличением поперечных индексов  $m$  и  $n$ , то, чем выше тип колебаний (по этим индексам), тем сильнее излучается энергия из открытого резонатора в свободное пространство. Эти потери э.-м. энергии являются специфическими для открытых систем. Они называются дифракционными потерями и определяют дифракционную добротность колебаний в открытых резонаторах. Среди собственных колебаний с одинаковыми продольными индексами  $q$  максимальную добротность имеет основное колебание с индексами  $m = 0, n = 1$ .

Строгий расчет при условии  $2l, 2a \gg \lambda$  приводит к формуле для собственных частот, аналогичной (5.49) и (5.50):

$$kl = \pi \left( \frac{q}{2} + p_{mn} \right) , \quad (5.52)$$

однако параметр  $p_{mn}$  ( $|p_{mn}| \leq 0,5$ ) в этой формуле — комплексный и им учитываются не только конечные размеры зеркал, но и фаза и модуль коэффициента отражения волн от краев резонатора.

Например, в открытом резонаторе с круглыми зеркалами, распределение магнитного поля собственных колебаний на зеркалах в котором описывается формулой:

$$\vec{H}_{mn}(r, \varphi) = \vec{H}_0 J_m \left( \sqrt{4\pi p_{mn} \frac{k}{2l}} r \right) \cos m\varphi , \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.53)$$

$$\vec{H}_{mn}(r, \varphi) = \vec{H}_0 J_m \left( \sqrt{4\pi p_{mn} \frac{k}{2l}} r \right) \sin m\varphi , \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (5.54)$$

параметр  $p_{mn}$  записывается в виде:

$$p_{mn} = \frac{\nu_{mn}^2}{\pi (M + \beta + i\beta)^2} , \quad (5.55)$$

где

$$M = \sqrt{\frac{2ka^2}{l}} , \quad \beta = 0,824 , \quad (5.56)$$

Действительная часть параметра  $p$  определяет сдвиг собственной частоты колебания типа  $mng$  относительно приближенной частоты, получаемой из формулы (5.42), а мнимая часть определяет дифракционные потери этого колебания:

$$\operatorname{Re} p_{mn} = p'_{mn} = \frac{\nu_{mn}^2 M (M + 2\beta)}{\pi [(M + \beta)^2 + \beta^2]^2} \simeq \frac{\nu_{mn}^2}{\pi M^2} , \quad (5.57)$$

$$\operatorname{Im} p_{mn} = p''_{mn} = \frac{\nu_{mn}^2 \beta (M + \beta)}{\pi [(M + \beta)^2 + \beta^2]^2} \simeq \frac{\nu_{mn}^2 \beta}{\pi M^3} , \quad (5.58)$$

Дифракционная добротность колебания определяется формулой:

$$Q_d = \frac{q}{4p''_{mn}} . \quad (5.59)$$

Формулы (5.57) и (5.58) количественно подтверждают тот факт, что чем больше поперечные индексы колебания, тем меньше его дифракционная добротность. Такое поведение колебаний в открытом резонаторе иллюстрируется рис. 5.2, где схематически изображена зависимость поля от частоты для резонансов собственных колебаний  $01q - - - 04q$  при фиксированном продольном индексе  $q$ . Резонансные кривые сдвинуты по частоте и частично перекрываются. Дифракционная добротность и, соответственно, амплитуда резонанса падает с увеличением индекса  $n$  колебания и вдали от основного резонанса наложение полей резонансов с большими индексами можно рассматривать как проявление сплошного (по частоте) "фонового" поля.

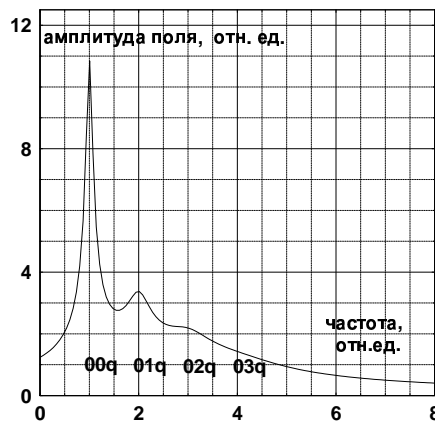


Рис. 5.2: Резонансные кривые открытого резонатора с плоскими зеркалами

Таким образом, главное отличие открытых резонаторов от объемных заключается в том, что даже при отсутствии омических потерь собственные колебания в открытых резонаторах имеют комплексные частоты и чем больше поперечные индексы колебаний, тем больше дифракционные потери.

Используя приведенные выше формулы, можно выбрать параметры резонатора  $a$  и  $l$  так, чтобы значительную дифракционную добротность имели только несколько колебаний с небольшими индексами  $m$  и  $n$ . Поля остальных, высших типов колебаний будут при этом присутствовать в резонаторе в виде относительно слабого фона.

Из выражений (5.58) и (5.59) нетрудно получить асимптотические (при  $M \gg 1$ ) формулы для дифракционной добротности, которые полезно использовать при первоначальном выборе размеров резонатора для работы в заданном диапазоне длин волн:

$$Q_d \simeq \frac{32 \pi^2 \sqrt{\pi}}{\nu_{mn}^2 \beta} \cdot \frac{a^3}{\lambda^{5/2} l^{1/2}} . \quad (5.60)$$

Приведем примеры результатов расчета дифракционной добротности колебания  $01q$  в открытых резонаторах с круглыми зеркалами. Открытый резонатор СВЧ диапазона, используемый как волномер:  $a = 10$  см,  $l = 10$  см,  $\lambda = 1$  см,  $Q_d = 10^4$ . Открытый резонатор СММ диапазона:  $a = 3$  см,  $l = 50$  см,  $\lambda = 0,118$  мм,  $Q_d = 10^8$ .

Омическая добротность открытого резонатора также может достигать значительной величины, поскольку объем резонатора можно сделать достаточно большим, а омические потери происходят только на зеркалах. Из выражения (4.38) нетрудно получить, что омическая добротность одинакова у всех типов колебаний и равна:

$$Q_0 = \frac{l}{d} , \quad (5.61)$$

где  $d$  — толщина скин-слоя.

Открытые резонаторы с плоскими зеркалами иногда применяются в диапазоне от ММ волн до световых, однако при их использовании серьезной трудностью является критичность электродинамических параметров резонаторов к небольшому изменению геометрии — к перекосу зеркал и к параллельному сдвигу [Л9, гл. II]. Например, в открытых резонаторах ММ диапазона плоскости зеркал нужно выставлять параллельно друг другу с точностью до долей угловой минуты. При увеличении рабочей частоты допуски на параллельность зеркал становятся все более жесткими.

### 5.2.2 Открытые резонаторы со сферически вогнутыми зеркалами

Гораздо большей дифракционной добротностью и одновременно существенно меньшей критичностью к перекосам обладают открытые резонаторы с вогнутыми зеркалами — цилиндрическими и сферическими (рис. 5.3).

Далее мы рассмотрим открытые резонаторы со сферическими зеркалами, наиболее часто применяемые на практике, когда зеркала имеют одинаковые радиусы кривизны  $R$  и расположены на расстоянии  $2l$  друг от друга, причем  $R \geq l$ . Возможность длительного удержания электромагнитного излучения в системе из двух вогнутых зеркал

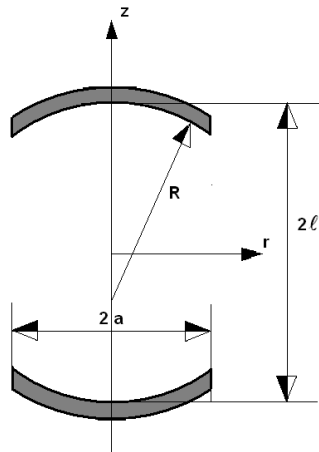


Рис. 5.3: Открытый резонатор со сферически вогнутыми зеркалами

следует и из геометрической оптики, когда излучение рассматривают в виде прямолинейно распространяющихся лучей. Можно показать, что при последовательном отражении от вогнутых поверхностей сферических зеркал параксиальный луч может не выйти за границу некоторой области вблизи оси симметрии системы. Граница этой области, называемая каустической поверхностью или каустикой, является огибающей этого семейства лучей и имеет форму однополостного гиперболоида вращения. То же самое происходит при распространении лучей между двумя вогнутыми цилиндрическими зеркалами, когда эти лучи не выходят из плоскости, перпендикулярной цилиндрическим поверхностям. В этом двумерном случае каустикой является не поверхность, а линия в виде гиперболы.

Если открытый резонатор с вогнутыми зеркалами рассматривать с электродинамической точки зрения, так же, как открытый резонатор с плоскими зеркалами, то при  $R, l \gg \lambda$  его можно считать многомодовым волноводом с сечением, плавно уменьшающимся от оси резонатора к краям зеркал. Поля волноводных волн, распространяющихся поперек резонатора, отражаются от некоторого критического сечения такого волновода и поэтому оказываются запертыми в области вблизи оси резонатора.

Последовательный электродинамический расчет открытых резонаторов со сферически вогнутыми зеркалами проведен также Л.А.Вайнштейном (Л. [9]) для параксиальных полей в предположении  $2l \gg \lambda$ . При этом использовалось параболическое уравнение (квазиоптическое приближение) и не учитывалась дифракция на краях зеркал. Использовалась сфероидальная система координат, в которой поверхностями равного уровня по одной координате являются сплюснутые эллипсоиды вращения, а по другой — однополостные гиперболоиды вращения, третья координата — азимутальный угол. Зеркала, естественно являющиеся поверхностями равных фаз, в параксиальном

приближении не отличаются от сферических.

Собственное колебание такого резонатора определяется, как всегда в трехмерном случае, тремя индексами: азимутальным  $m$ , радиальным  $n$  и продольным  $q \gg 1$ . Собственная частота  $k_{mnq}$  колебания типа  $mnq$  (часто используют обозначение  $TEM_{mnq}$ ) определяется из выражения:

$$2k_{mnq}l = \pi q + 2(m + 2n + 1) \arcsin \sqrt{\frac{l}{R}} . \quad (5.62)$$

Дополнительный сдвиг частоты (по отношению к интерферометру Фабри-Перо) резонатора с вогнутыми зеркалами (второй член в правой части (5.62)) возникает из-за кривизны зеркала и он существенно больше, чем в резонаторе с плоскими зеркалами (ср. (5.50)). Большинство собственных колебаний при этом вырождено, причем  $(m + 2n + 2)/2$  раз, если  $m$  – четное или нуль, и  $(m + 2n + 1)/2$  раз, если  $m$  – нечетное. Колебания  $00q$  и  $10q$  в этом смысле невырождены. И все колебания дважды вырождены по поляризации.

При фиксированном  $q$  наименьшей частотой обладает колебание  $00q$ , которое называют основным, а колебания высших типов при фиксированном  $q$  образуют неубывающую последовательность собственных частот – серию. Частоты колебаний типа  $mnq$ , для которых выполняется неравенство  $2(m + 2n + 1) \cdot \arcsin \sqrt{l/R} \geq \pi$ , превышают частоту основного колебания следующей серии  $00(q + 1)$ , т.е. при этом происходит перекрытие серий собственных частот колебаний, относящихся к соседним индексам –  $q$  и  $q + 1$ .

В сфероидальной системе координат распределения тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на поверхностях равных фаз (эллипсоидах вращения) совпадают между собой и определяются скалярными выражениями:

$$\Psi_{mn}(\tau, \varphi) = \Psi_{mn}(\tau) \cos m\varphi , \quad (m = 0, 1, 2, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots) , \quad (5.63)$$

$$\Psi_{mn}(\tau, \varphi) = \Psi_{mn}(\tau) \sin m\varphi , \quad (m = 1, 2, \dots , n = 0, 1, 2, \dots) , \quad (5.64)$$

где  $\tau$  – безразмерное расстояние от оси резонатора в сфероидальной системе координат, а

$$\Psi_{mn}(\tau) = \tau^m L_n^{(m)} \left( \frac{\tau^2}{2} \right) \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{4} \right\} , \quad (5.65)$$

и

$$L_n^{(m)}(x) = (-1)^n x^{-m} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{m+n} e^{-x}) \quad (5.66)$$

– полиномы Лагерра.

Приведем распределение полей нескольких колебаний:

$$\Psi_{00}(\tau) = \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{4} \right\} , \quad (5.67)$$

$$\Psi_{01}(\tau) = \left( \frac{\tau^2}{2} - 1 \right) \cdot \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{4} \right\} , \quad (5.68)$$

$$\Psi_{10}(\tau, \varphi) = \tau \cdot \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{4} \right\} \sin \varphi (\cos \varphi) . \quad (5.69)$$

Поверхностями равных фаз являются, в частности, поверхность зеркала и средняя плоскость между зеркалами. Для этих частных случаев безразмерное расстояние  $\tau$  связано с расстоянием  $r$  от оси резонатора следующими формулами:

$$\tau = r \sqrt[4]{\frac{4k^2(R-l)}{R^2 l}} \quad , \quad (\text{на зеркале}) \quad , \quad (5.70)$$

$$\tau = r \sqrt[4]{\frac{4k^2}{(R-l)l}} \quad , \quad (\text{в средней плоскости}) \quad , \quad (5.71)$$

На рис. 5.4 для примера показано радиальное распределение полей (в относительных единицах) колебаний  $00q$ ,  $01q$  и  $10q$ . Видно, и особенно отчетливо у основного ко-

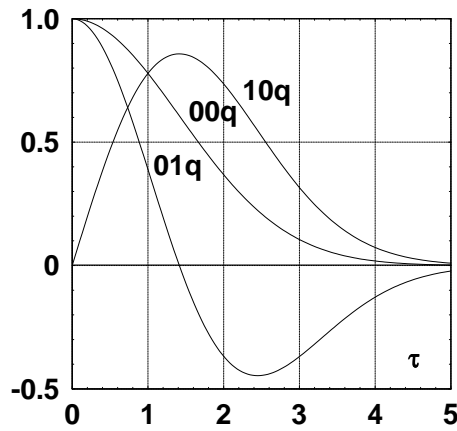


Рис. 5.4: Радиальное распределение полей основных колебаний в открытом резонаторе со сферическими зеркалами.

лебания  $00q$ , что поля собственных колебаний имеют достаточно резкую внешнюю границу. Характерные радиальные размеры этой границы полей, описываемых выражениями (5.63) – (5.66), можно рассчитать, введя параметры  $\tau_{mn}$ , определяемые как корни уравнения:

$$\frac{\tau^2}{4} + \frac{m^2}{\tau^2} - (m + 2n + 1) = 0 \quad . \quad (5.72)$$

Для азимутально-симметричных колебаний ( $m = 0$ ) это уравнение имеет один корень, а для колебаний с  $m \neq 0$  — два корня  $\tau_{mn}$  и  $\tau'_{mn}$ , причем  $\tau_{mn} > \tau'_{mn}$ . Радиальное распределение полей при  $\tau < \tau_{mn}$  ( $m \neq 0$ ) имеет осциллирующий характер, а при  $\tau > \tau_{mn}$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) — экспоненциально затухает. Сравнение с геометрическим ходом лучей в резонаторе показывает, что параметр  $\tau_{mn}$  с точностью до длины волны определяет положение внешней каустики в резонаторе, а параметр  $\tau'_{mn}$  — положение внутренней каустики у несимметричных колебаний, поле у которых равно нулю на оси резонатора. Согласно (5.65) и (5.66), спад поля к оси резонатора вблизи внутренней каустики имеет не экспоненциальный, а степенной характер. Поле азимутально-симметричных колебаний максимально на оси резонатора и эти колебания имеют только внешнюю

каустическую поверхность в форме однополостного гиперболоида вращения, что совпадает с результатами лучевого рассмотрения полей.

Из (5.65) и (5.66) определяется радиус внешней каустической поверхности на вогнутом зеркале:

$$a_{mn} = \frac{\tau_{mn}}{\sqrt{2k}} \sqrt[4]{\frac{R^2 l}{R-l}} \quad , \quad (5.73)$$

и в средней плоскости резонатора:

$$b_{mn} = \frac{\tau_{mn}}{\sqrt{2k}} \sqrt[4]{l(R-l)} \quad . \quad (5.74)$$

Выпишем параметры  $\tau_{mn}$  и  $\tau'_{mn}$  для нескольких колебаний:

Тип колебания ( $mn$ )	00	10	20	01	30	11	40	21	02
$\tau_{mn}$	2,00	2,73	3,24	3,46	3,646	3,97	4,00	4,378	4,472
$\tau'_{mn}$		0,732	1,236		1,645	0,504	2,00	0,914	

Таким образом, в продольном направлении поле собственных колебаний имеет значительное число осцилляций  $q \gg 1$  с характерным размером  $\Lambda \simeq \lambda$  — длине волны колебания, а в поперечных сечениях поле изменяется достаточно плавно и его эффективные размеры, превышающие длину волны и в большинстве сечений существенно, определяются каустическими поверхностями.

Характерные размеры внешней границы поля в резонаторе с достаточной точностью определяются из формул (5.73) и (5.74). На рис. 5.5 в качестве примера графически представлены зависимости радиуса каустик  $a_{00q}$  и  $b_{00q}$  основного колебания  $TEM_{00q}$  от расстояния между зеркалами при фиксированном радиусе кривизны (от относительного расстояния  $l/R$ ).

При небольшом расстоянии между зеркалами размеры каустик на зеркалах и в средней плоскости невелики и сравнимы по величине. При увеличении расстояния радиус обеих каустик растет, и при  $2l = R$  (так называемое конфокальное расположение зеркал) радиус каустики в средней плоскости резонатора достигает максимума. При дальнейшем увеличении расстояния между зеркалами радиус каустики в средней плоскости резонатора уменьшается, а радиус каустики на зеркале продолжает расти, причем этот рост становится особенно резким при приближении к так называемому концентрическому расположению зеркал ( $l = R$ ). При  $l \geq R$  формулами (5.73) и (5.74) пользоваться нельзя, поскольку каустики в резонаторе не существует, а собственные колебания в резонаторе удерживаются на краях зеркал, как в случае резонатора с плоскими зеркалами. Заметим также, что формулами (5.73) и (5.74) нельзя пользоваться также при  $l/R \ll 1$  (прежде всего, из-за невозможности реализовать такую геометрию) и при  $l/R \simeq 1$  — из-за выхода за рамки приближения в методе расчета полей.

В реальном резонаторе с зеркалами конечных размеров пространственное распределения полей и частоты собственных колебаний, вообще говоря, несколько иные из-за того, что часть энергии колебаний излучается наружу, то есть у колебаний существуют



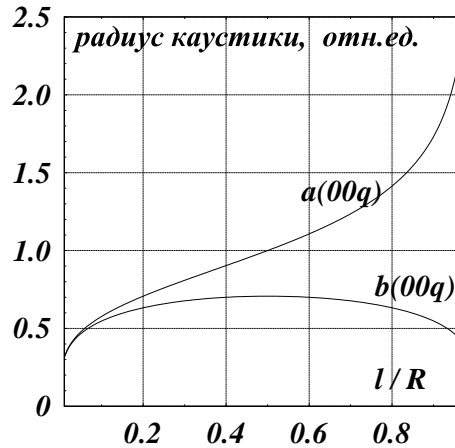


Рис. 5.5: Размер каустики в открытом резонаторе со сферическими зеркалами.

дифракционные потери, определяющие разрежение спектра частот собственных колебаний. К сожалению, расчет дифракционных потерь в резонаторе с вогнутыми зеркалами не удастся провести аналитически и его придется проводить численно. Однако, поскольку поля собственных колебаний имеют достаточно резкие границы, то качественное поведение дифракционных потерь в зависимости от геометрии резонатора и длины волны можно выяснить из соотношения между размерами каустики и диаметром зеркал.

Когда диаметр внешней каустики существенно меньше диаметра зеркала, то из-за экспоненциального затухания поля за каустикой дифракционными потерями обычно можно пренебречь по сравнению с другими видами потерь, например, омическими. Из опытов следует, что в этом случае дифракционная добротность существенно (на несколько порядков) больше, чем дифракционная добротность аналогичного резонатора с плоскими зеркалами. При увеличении размера каустики, вплоть до диаметра зеркала, дифракционные потери могут стать определяющими. Однако следует иметь в виду, что в этом случае на распределение полей сильно влияет наличие краев зеркал, поэтому приведенными выше формулами, в частности, формулой (5.73), можно пользоваться только для грубых оценок.

Как следует из (5.73), чем больше поперечные индексы  $m$  и  $n$ , тем больше радиус внешней каустики. Поэтому при фиксированных размерах зеркал краевые эффекты в первую очередь влияют на колебания высших типов. Таким образом, в открытых резонаторах с вогнутыми зеркалами собственные колебания разбиваются на две группы. Те колебания, каустики которых удалены от краев зеркал, имеют значительную добротность. Колебания высших типов, каустики которых располагаются близко к краям зеркал, а особенно те, каустики которых выходят за пределы зеркал, имеют существенно меньшую добротность и не могут возбуждаться в резонаторе со сколь-нибудь значительной амплитудой. Эти колебания, так же, как в резонаторе с плоскими зеркалами, образуют непрерывный "фон" электромагнитного излучения в открытом резонаторе.

Кроме резонаторов, образованных двумя одинаковыми вогнутыми зеркалами существуют и их некоторые модификации.

Наиболее часто используют резонатор из вогнутого и плоского зеркал, который из соображений симметрии практически полностью эквивалентен по электродинамическим свойствам резонатору из двух зеркал (рис. 5.6). Его спектр определяется фор-

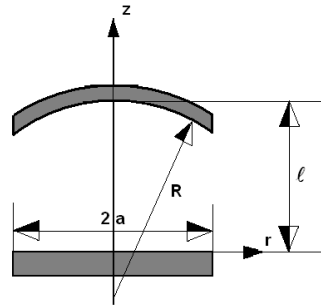


Рис. 5.6: Открытый резонатор со сферически вогнутым и плоским зеркалами

мулой:

$$kl = \pi q + (m + 2n + 1) \arcsin \sqrt{\frac{l}{R}} . \quad (5.75)$$

Продольный индекс  $q$  в этом резонаторе равен половине этого индекса в эквивалентном резонаторе с двумя сферическими зеркалами (ср. (5.62) ).

Поскольку размер каустики в центральной плоскости резонатора сферическими зеркалами меньше, чем на вогнутом зеркале (см. (5.73) и (5.74)), то размер плоского зеркала можно сделать меньше, чем вогнутого, не внося заметных дифракционных потерь.

Для некоторых применений, например, в лазерной технике, используют резонаторы со сферическими зеркалами разной кривизны (радиусы  $R_1$  и  $R_2$ ), причем одно из них может быть и выпуклым. Возможность формирования колебаний, ограниченных каустиками, можно проанализировать как лучевыми, так и квазиоптическими методами. Такие колебания существуют в отдельных областях по параметрам  $(2l, R_1, R_2)$ . Например, в лучевой трактовке полей в открытом резонаторе с вогнутыми зеркалами получено [Л9, § 36], что колебания, ограниченные каустиками существуют при  $0 < 2l < R_1$  и  $R_2 < 2l < R_1 + R_2$ , а в области  $R_1 < 2l < R_2$  каустик не образуется.

### 5.2.3 Открытые резонаторы с колебаниями "шепчущей галереи"

К таким резонаторам относятся цилиндрические и бочкообразные открытые резонаторы. В обоих типах резонаторов имеются собственные колебания, поля которых сосредоточены вблизи внутренней стенки, и они представляют интерес для рассмотрения. Термин колебания "шепчущей галереи" используют по аналогии с давно замеченным аномально хорошим распространением звука вдоль вогнутых стен больших помещений.

Цилиндрическим открытым резонатором называют отрезок металлической трубы длиной  $L$  и радиусом  $a$ , открытый с обеих концов (рис. 5.7), все размеры которого существенно превосходят длину волны. Возможность формирования устойчивых внутренних полей проще всего понять из лучевой трактовки поля. Если луч распространяется в плоскости сечения трубы ( $z = \text{const}$ ) и падает на цилиндрическую поверхность под небольшим углом, то он может многократно от нее отражаться, формируя около внутренней поверхности цилиндра область, заполненную электромагнитным полем. При этом, как следует из формул отражения Френеля, чем под меньшим углом падают лучи на поверхность, тем меньше потери энергии при отражении. Если лучи распространяются так, что несколько выходят из плоскости сечения, то излучение через торцевую поверхность цилиндра (вдоль оси  $z$ ) при определенных условиях может быть незначительным за счет отражения волноводных волн от границы "край цилиндра - свободное пространство", аналогично тому, как это происходит в открытых резонаторах с плоскими зеркалами.

Следующим шагом, связывающим лучевую трактовку с электродинамическим расчетом полей и собственных частот — выделение лучей, которые при полном обходе резонатора преобразуются сами в себя, включая воспроизведение фазы. Это налагает "квантовые" условия на выбор углов падения лучей на цилиндрическую поверхность и приближенно определяет собственные частоты мод в резонаторе.

Электродинамическая задача о собственных частотах и полях в таком резонаторе решается в цилиндрической системе координат  $(\varphi, r, z)$ . В квазиоптическом приближении поле в резонаторе описывается скалярной функцией  $\Phi(\varphi, r, z)$ , из которой, в зависимости от граничных условий, получают два набора собственных полей: поля с  $z$ -компонентой электрического поля ( $E$ -моды) и поля с  $z$ -компонентой магнитного поля ( $H$ -моды). Эти наборы мод соответствуют различным поляризациям лучей. Скалярная функция записывается в виде:

$$\Phi(\varphi, r, z) = C \cdot J_m(gr) \cdot f(z) \cdot e^{\pm im\varphi} \quad , \quad (5.76)$$

Основные свойства собственных колебаний резонатора, поля которых сосредоточены около внутренней стенки, определяются радиальной частью функции (5.76), которая является функцией Бесселя, а радиальное волновое число  $g_{mn}$  выражается через нули функций  $J_m$  ( $E$ -волны) или нули производных функций  $J'_m$  ( $H$ -волны):

$$g_{mn}^{(E)} = \frac{\nu_{mn}}{a} \quad , \quad (5.77)$$

$$g_{mn}^{(H)} = \frac{\nu'_{mn}}{a} \quad , \quad (5.78)$$

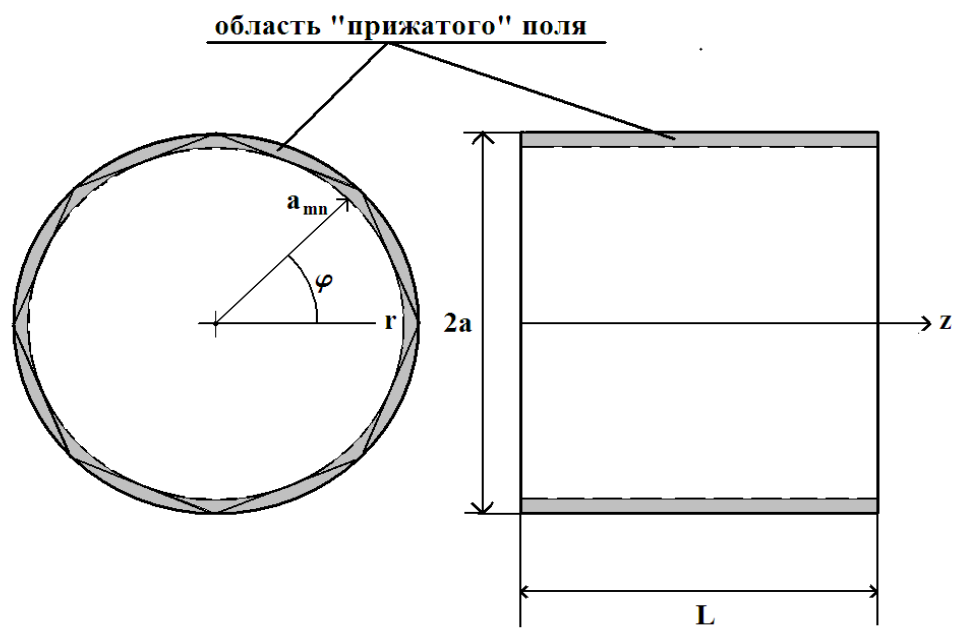


Рис. 5.7: Цилиндрический открытый резонатор

При этом "прижатым" модам соответствуют функции Бесселя с индексами  $m \gg 1$ . Такие функции медленно (как  $(gr)^m$ ) растут от центра и затем, достигая максимума, начинают осциллировать. Радиус, с которой начинаются эти осцилляции, и, по существу, границу области, с которой начинается "прижатое" поле, можно вычислить следующим образом. Несложно показать, что функция Бесселя  $J_m(gr)$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dJ_m}{dr} \right) + \left( g^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) J_m = 0 \quad , \quad (5.79)$$

которое подстановкой  $gr = \exp\{\rho\}$  преобразуется к линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 J_m}{d\rho^2} + (g^2 r^2 - m^2) J_m = 0 \quad . \quad (5.80)$$

Если ввести радиус

$$a_{mn} = \frac{m}{a} = \frac{ma}{\nu_{mn}} \quad \left( \text{или} = \frac{ma}{\nu'_{mn}} \right) \quad , \quad (5.81)$$

то, в соответствии с известным свойством собственных решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка, при  $0 < r < a_{mn}$  функция  $J_m$  монотонно возрастает ( $J_m = 0$  при  $r = 0$ ), а при  $r > a_{mn}$  — осциллирует.

Поэтому введенный радиус  $a_{mn}$  можно считать ограничивающим изнутри область "прижатого" поля  $mn$ -моды и, как можно показать, он с точностью до длины волны совпадает с радиусом внутренней каустики семейства отражающихся лучей, получающейся при лучевом рассмотрении.

Продольные функции  $f(z)$  представляют собой стоячие волны ( $q$  полуволн, где  $q = 1, 2, 3, \dots$ ) между торцами резонатора и при  $a, L \gg \lambda$  поля по оси  $z$  можно рассматривать практически так же, как в открытом резонаторе с плоскими зеркалами в виде бесконечных полос (см. подраздел 5.2.1). Волны отражаются от границы "край трубы - свободное пространство" и отличие коэффициента отражения от единицы определяет радиационные потери различных продольных мод.

Следует заметить, что рассмотрение цилиндрического резонатора имеет в определенной мере только методический интерес, поскольку спектр "прижатых" мод оказывается достаточно густым из-за того, что моды с различными индексами  $m$  и  $n$  мало различаются по дифракционным потерям (см. Л9, гл. V). Кроме того, так же, как в открытом резонаторе с плоскими зеркалами, наличие дифракционных потерь в цилиндрическом открытом резонаторе не позволяет получить высокой добротности колебаний.

Потери на излучение с торцов резонатора можно значительно уменьшить, если плавно сузить сечение трубы к открытым концам (по оси  $z$ ), т.е. придать резонатору форму бочки и открытые резонаторы такого типа называют бочкообразными. Часть собственных волн будет отражаться от критического сечения такого многомодового волновода, что существенно уменьшает их излучение в свободное пространство. За критическим сечением поля уменьшаются экспоненциально, что при лучевой трактовке соответствует появлению каутической поверхности со стороны свободного пространства. Таким образом, переход от цилиндрического к бочкообразному открытому резонатору аналогичен

переходу от открытого резонатора с плоскими зеркалами к резонатору со сферически вогнутыми зеркалами.

Радиальное и азимутальное поведение "прижатых" полей в цилиндрическом и бочкообразном резонаторах качественно мало отличаются. В частности, как нетрудно получить из лучевой трактовки полей, внутренняя каустическая поверхность, ограничивающая поле "прижатых" мод в цилиндрическом резонаторе, может существовать и в бочкообразном резонаторе.

В строгой постановке электродинамической задачи собственные частоты и поля собственных колебаний в бочкообразном резонаторе определяются из решения квазиоптического уравнения в сфероидальной системе координат, которая использовалась выше для расчета характеристик резонатора со сферически вогнутыми зеркалами (см. подраздел 5.2.2). Внутренняя поверхность бочкообразного резонатора при этом является также частью эллипсоида вращения. Однако, из-за другой топологии резонатора собственные колебания "шепчущей галереи" ( $m > 1$ ), ограниченные каустиками, в бочкообразном резонаторе могут существовать при любом соотношении между радиусом кривизны  $r_0$  бочкообразного зеркала в плоскости симметрии резонатора ( $z = 0$ ) и радиусом  $a$  зеркала в той же плоскости. При этом, если  $r_0 > a$ , то используются вытянутые (по оси  $z$ ) сфероидальные координаты, если  $r_0 < a$ , то сплюснутые сфероидальные координаты, а при  $r_0 = a$  — сферические координаты.

Далее  
и  
рис. 5.8.

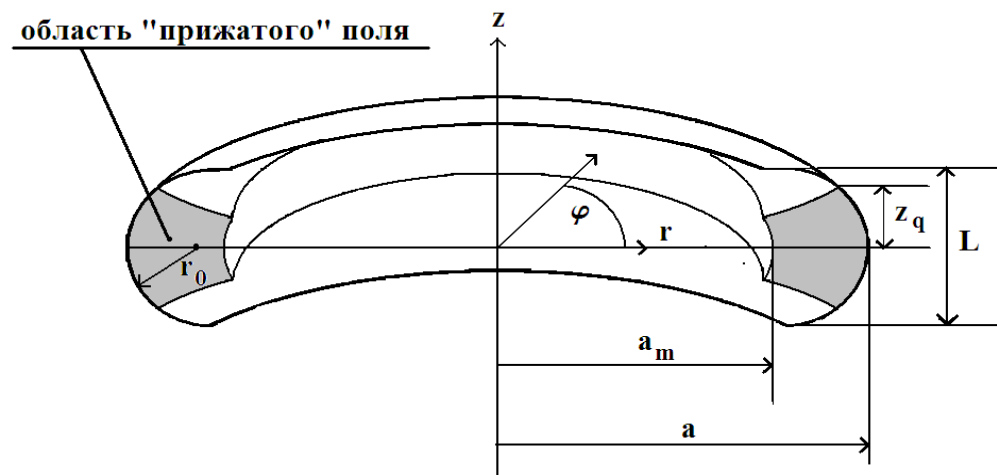


Рис. 5.8: Бочкообразный открытый резонатор

Во всех формулах не учитываются дифракционные потери, так же, как в открытом резонаторе с сферическими зеркалами и, кроме того, считается, что  $m \gg 1$ .

Радиальное распределение полей между внутренней каустикой и отражающей по-

верхностью резонатора ( $a_m n < r < a$ ) описывается функцией Эйри, которая в этой области ведет себя подобно функциям Бесселя  $J_m$  при  $m \gg 1$ . Она резко спадает до нуля при  $r < a_{mn}$ , а при  $a_{mn} < r < a$  имеет осциллирующий характер со спадающей амплитудой при увеличении радиуса  $r$ . Граничные условия требуют, чтобы или самая функция Эйри (Е-моды) или ее производная (Н-моды) обращались в нуль на отражающей поверхности. Корни функции Эйри порядка  $n$  (или ее производной), функционально связанные с корнями функции Бесселя ( $\nu_{mn}$  или  $\nu'_{mn}$ ), определяют собственные частоты мод ( $E_{mn}$  или  $H_{mn}$ ) резонатора.

Собственные частоты колебаний типа  $E_{mnq}$  удовлетворяют соотношению:

$$k_{mnq} a = \nu_{mn} + \frac{(q - 1/2) \alpha}{\sin \theta} \quad , \quad (5.82)$$

где  $a$  - радиус внутренней поверхности резонатора в плоскости  $z=0$ , а угол  $\alpha$  определяется соотношением:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{a}{r_0}} \cdot \sin \theta \quad , \quad (5.83)$$

где  $\theta$  — угол скольжения лучей, отражающихся от стенок резонатора в плоскости  $z = 0$ , и

$$\cos \theta = \frac{m}{\nu_{mn}} \quad . \quad (5.84)$$

Для собственных частот колебаний типа  $H_{mnq}$  корень функции Бесселя  $\nu_{mn}$  в (5.82) следует заменить на  $\nu'_{mn}$  - корень производной функции Бесселя.

Радиус внутренней каустики  $a_{mn}$  удовлетворяет соотношению:

$$a_{mn} = a \cos \theta = a \cdot \frac{m}{\nu_{mn}} \quad , \quad (5.85)$$

Из-за вогнутости отражающей поверхности резонатора (относительно оси  $z$ ) поля собственных колебаний, характеризующимися индексами  $q = 1, 2, 3, \dots$  (5.82)) локализованы около плоскости симметрии резонатора ( $z=0$ ) и имеют достаточно резкую границу. При удалении от плоскости симметрии резонатора распределение поля описывается произведением гауссовой функции и полиномов Эрмита от сфероидальной координаты  $\tau$ . У основного колебания ( $q=1$ ) распределение гауссово —  $\exp\{-\tau^2/2\}$ , у следующих:  $\tau \cdot \exp\{-\tau^2/2\}$  ( $q=2$ ),  $(\tau^2 - 1) \cdot \exp\{-\tau^2/2\}$  ( $q=3$ ), и так далее с увеличением показателя степени при координате  $\tau$ . Так же, как в открытом резонаторе со сферически вогнутыми зеркалами (см. подраздел 5.2.2.), достаточно резкой внешней границе поля можно поставить в соответствие каустическую поверхность, определяемую при лучевым рассмотрении.

Положение внешних (по оси  $z$ ) каустик на отражающей поверхности резонатора определяется формулой:

$$z_{mnq} = \pm \sqrt{\frac{a \sin \theta}{k_{mn} \sin 2\alpha} \cdot 4(q - \frac{1}{2})} \quad , \quad (5.86)$$

откуда видно, что при увеличении продольного индекса  $q$  каустики отдаляются от центральной плоскости резонатора. Кроме того, как следует из (5.82 - 5.84), размер каустики увеличен у колебаний с индексами  $m \ll ka$  и  $n \gg m$ . Колебания, каустики которых

расположены достаточно далеко от края резонатора, определяемого поперечным размером  $L$  (рис. 5.8), имеют малые дифракционные потери и их добротность заметно превышает добротность колебаний в аналогичном цилиндрическом резонаторе. А за счет колебаний с большим размером каустик и, соответственно, с большими дифракционными потерями, происходит значительное разрежение спектра собственных частот.

Омическая добротность и цилиндрического и бочкообразного открытых резонаторов достаточно точно оценивается из лучевого рассмотрения с использованием коэффициентов отражения Френеля. Для колебаний Е-типа добротность не зависит от индексов  $m, n$ :

$$Q_E = \frac{a}{d}, \quad (5.87)$$

а для колебаний Н-типа:

$$Q_H = \frac{2(a - a_{mn})}{d}, \quad (5.88)$$

где  $d$  — толщина скин-слоя.

Собственные колебания "шепчущей галереи" могут существовать не только в резонаторах с металлическими отражающими поверхностями, но и внутри диэлектрических стержней и дисков. Как легко понять из лучевого рассмотрения, такие колебания должны формироваться лучами, падающими на внутреннюю поверхность диэлектрических тел под углами, большими угла полного внутреннего отражения. Рассмотрение картины полей и собственных частот колебаний в диэлектрических резонаторах проводится методами, рассмотренными выше, но подробный расчет свойств таких резонаторов выходит за рамки настоящего курса.

## 5.2.4 Связь открытых резонаторов с линиями передачи

Теория возбуждения открытых резонаторов во многом аналогична теории возбуждения объемных резонаторов. Отличие заключается в том, что из-за связи открытых систем со свободным пространством в теории их возбуждения необходимо учитывать нерезонансную часть поля, на фоне которой проявляются резонансные свойства открытой колебательной системы. Однако, если дифракционная добротность колебания достаточно велика, то из полного возбужденного поля резонансную часть выделить нетрудно. Возбуждение же поля вблизи резонансной частоты описывается теми же формулами, что получены для объемных резонаторов (см. раздел. 4.6).

Поскольку в настоящее время открытые резонаторы используются в очень широком диапазоне длин волн — от миллиметровой до световой области, то разработаны различные способы связи открытых резонаторов с различными передающими линиями.

В "классическом" СВЧ диапазоне — включая ММ волны — распространены волноводные линии передачи, и для связи открытых резонаторов с волноводами часто применяют те же сосредоточенные элементы связи — отверстия, щели, — что и в объемных резонаторах. Однако, сосредоточенный элемент связи на зеркале резонатора излучает заметную часть энергии, поступающей из волновода, непосредственно в свободное пространство, что уменьшает эффективность возбуждения резонансных колебаний. Кроме того, элемент связи на зеркале является неоднородностью в резонаторе, но, в отличие от объемного резонатора, эта неоднородность не только смещает собственную частоту



(см. (4.57) и (4.60)), но и переизлучает часть энергии резонансного колебания в свободное пространство, что, естественно, уменьшает добротность колебания. В связи с этим, выражения, полученные в разделе 4.6 для связи резонатора с волноводом, для открытого резонатора должны быть изменены. Например, при связи открытого резонатора с волноводом через небольшое отверстие коэффициент связи записывается в виде:

$$\beta = Q \kappa^2 \left( \frac{\omega^3}{3c^3} \cdot \frac{H_s^2}{N_s} + \omega \frac{H_0^2 |H_s|^2}{8P_0 N_s} \right) . \quad (5.89)$$

где первое слагаемое обязано излучению из отверстия связи в свободное пространство. Обозначения в (5.89) те же, что в подразделе 4.6.1.

Более эффективным является распределенное возбуждение открытых резонаторов, когда когерентные источники возбуждения занимают значительную часть объема резонатора или значительную часть поверхности зеркал, причем, по возможности, распределение внешних токов должно быть близко к распределению соответствующих компонент полей возбуждаемого колебания. Этот способ возбуждения эффективен и в объемных резонаторах (см. раздел 4.6), а в открытых резонаторах он к тому же позволяет в значительной степени избежать нежелательного излучения в свободное пространство.

Если сторонние токи в распределенном элементе связи создаются квазиплоской волной, формируемой внешним источником, то такой метод возбуждения называют квазиоптическим.

В наиболее распространенном квазиоптическом способе возбуждения открытых резонаторов элементом связи служит одно из зеркал резонатора, которое делают слегка прозрачным для излучения. В СВЧ диапазоне и в СММ области длин волн полупрозрачным зеркалом может служить тонкая металлическая сеточка с периодом, меньшим длины волны. В более коротковолновой области и особенно в видимом диапазоне полупрозрачные зеркала изготавливают из диэлектриков. Для открытых резонаторов, используемых в лазерах, диэлектрическое покрытие обычно делают многослойным для селективного пропускания на рабочей длине волны.

Рассмотрим простейшую конфигурацию открытого резонатора (типа Фабри-Перо), облучаемого снаружи плоской волной с частотой  $k$  (рис. 5.9). Прозрачность непоглощающего входного зеркала -  $t$  (по полю), коэффициент отражения -  $r$ . Второе глухое зеркало расположено на расстоянии  $l$  и в его коэффициенте отражения  $R_l$  ( $\text{Im}R_l = 0$ ) учитываются все внутренние потери в резонаторе. Собственная добротность резонатора  $Q_0 \gg 1$ , и, соответственно,  $r, R_l$  близки к единице, а  $|t| \ll 1$ .

Падающая волна имеет единичную амплитуду, а между зеркалами формируются прямая плоская волна с амплитудой  $A$ , встречная волна с амплитудой  $B$  и отраженная от входного зеркала волна с амплитудой  $R$ . Считаем, что поперечные размеры всех волновых пучков одинаковы и мощность падающей волны можно также считать равной единице при единичном сечении пучка.

Собственная добротность резонатора определяется известным образом:

$$Q_0 = \frac{\omega W}{P_0}, \quad (5.90)$$

где  $W$  – средняя энергия, запасенная в резонаторе, а  $P_0$  – мощность внутренних потерь. Расчет сводится к решению системы линейных уравнений, описывающих преобразования амплитуд падающих и отраженных волн на зеркалах (см. рис. 5.9).

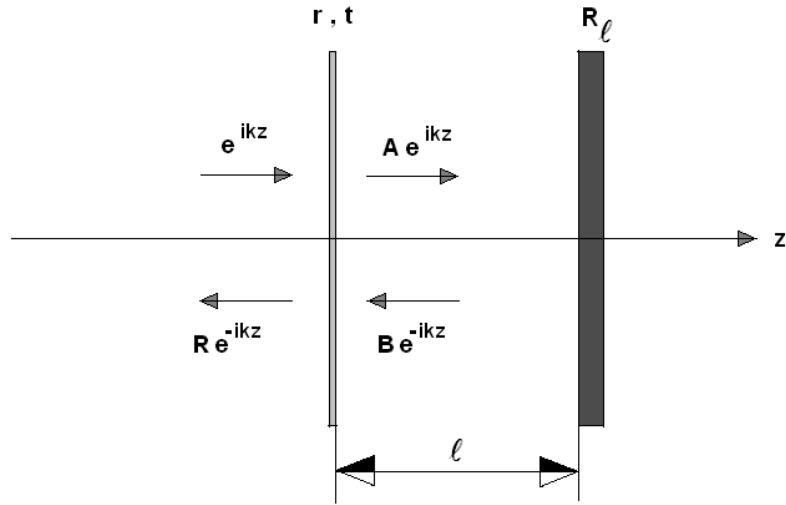


Рис. 5.9: Открытый резонатор с полупрозрачным зеркалом

В расчете внутренних полей в резонаторе считаем входное зеркало непрозрачным и непоглощающим, а  $A \approx B$  (при  $R_l \approx 1$ ) и тогда амплитуда стоячей волны между зеркалами равна  $2A$ . Имеем

$$W = \frac{q}{4k} \cdot |A|^2, \quad (5.91)$$

$$P_0 = (1 - R_l^2) \cdot \frac{c}{8\pi} \cdot |A|^2, \quad (5.92)$$

и

$$Q_0 = \frac{2\pi q}{1 - R_l^2} \simeq \frac{\pi q}{1 - R_l}, \quad (5.93)$$

Для расчета связи несложно найти, что

$$A = \frac{t}{\Delta}, \quad (5.94)$$

$$B = \frac{tR_l}{\Delta} \cdot e^{2ikl}, \quad (5.95)$$

$$R = r + \frac{t^2 R_l}{\Delta} \cdot e^{2ikl}, \quad (5.96)$$

где

$$\Delta = 1 - rR_l e^{2ikl}. \quad (5.97)$$

Рассмотрим случай резонанса

$$2k_0 l = 2\pi q \quad (5.98)$$

и тогда

$$\Delta = \Delta_0 = 1 - rR_l \quad . \quad (5.99)$$

Поскольку мощность  $P_0$  поглощается только на глухом зеркале, то

$$P_0 = \frac{|t|^2}{\Delta_0^2} \cdot (1 - R_l^2) \quad . \quad (5.100)$$

Входное зеркало не имеет потерь и поэтому

$$r^2 = 1 - |t|^2 \quad , \quad (5.101)$$

и если считать входное зеркало тонким, а  $\text{Im } r = 0$ , то, согласно (2.152), имеем:

$$t^2 = -|t|^2 = r^2 - 1 \quad . \quad (5.102)$$

С учетом этого из формулы (5.96) отраженную от резонатора мощность (коэффициент отражения) запишем в виде:

$$|R|^2 = \frac{(-|t|^2 R_l + r \Delta_0)^2}{\Delta_0^2} = \frac{(r - R_l)^2}{(1 - r R_l)^2} \quad (5.103)$$

Нетрудно проверить, принимая во внимание (5.90) (5.100) и (5.103), что закон сохранения энергии выполняется:

$$P_0 + |R|^2 = 1. \quad (5.104)$$

Омическую добротность рассматриваемого резонатора можно вычислить и другим способом. Вблизи резонанса значительной добротности, как известно (см.(4.48)), зависимость амплитуды поля от расстройки частоты  $\xi = dk/k_0$  выражается как

$$A \sim \frac{1}{1 - i 2Q_0 \xi} = \frac{1}{\Delta(r=1)} \quad . \quad (5.105)$$

Преобразуем детерминант (5.97) к резонансному виду, разложив фазовый множитель в  $\Delta(r=1)$  вблизи резонансного значения (5.116). Тогда

$$\Delta(r=1) \approx 1 - R_l - i R_l \cdot 2\delta k_0 l = (1 - R_l) \left( 1 - i \cdot \frac{R_l}{1 - R_l} \cdot 2 \frac{dk}{k_0} \pi q \right) \quad , \quad (5.106)$$

откуда следует, что

$$Q_0 \simeq \frac{R_l \cdot \pi q}{1 - R_l}, \quad (5.107)$$

что в принятом приближении совпадает с выражением (5.93).

Введя коэффициент связи резонатора  $\beta$  со свободным пространством согласно формуле (4.131), полученной выше:

$$|R|^2 = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2, \quad (5.108)$$

из (5.103) получим

$$\beta = \frac{1 - r}{1 + r} \cdot \frac{1 + R_l}{1 - R_l} \quad , \quad (5.109)$$

или приближенно

$$\beta \simeq \frac{1-r}{1-R_l}, \quad (5.110)$$

Заметим, что  $\beta = 1$  при условии  $r = R_l$  и тогда  $R = 0$ , т.е. это случай полного согласования открытого резонатора с квазиоптической волной.

Выполняется также и формула (4.129), определяющая мощность потерь в резонаторе в зависимости от коэффициента связи:

$$P_0 = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}, \quad (5.111)$$

что нетрудно проверить, используя формулы (5.99), (5.109) и (5.100).

Теперь, используя (5.109) с учетом (5.93) и (5.102), имеем для коэффициента связи:

$$\beta = \frac{Q_0}{2\pi q} \cdot \frac{1-r}{1+r} \cdot (1+R_l)^2 \approx \frac{Q_0}{\pi q} \cdot (1-r) \approx \frac{Q_0}{2\pi q} \cdot |t|^2, \quad (5.112)$$

и мы видим, что, как и в случае объемного резонатора (ср.(4.128)), коэффициент связи пропорционален собственной добротности.

Заметим, что формула (5.112) более удобна для практического применения, чем (5.110), поскольку в нее входят параметры  $Q_0$  и  $|t|^2$ , которые нетрудно измерить.

Из (5.93) и (5.109) можно найти детерминант (5.96)

$$\Delta_0 \simeq (\beta + 1) \cdot \frac{\pi q}{Q_0} \quad (5.113)$$

и, учитывая (5.94), (5.112) и (5.113), поле в резонаторе

$$|A|^2 = |t|^2 \cdot \frac{Q_0^2}{(\pi q)^2 \cdot (1+\beta)^2} = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} \cdot \frac{Q_0}{2\pi q}. \quad (5.114)$$

Заметим, что этот расчет (при сделанных в начале предположениях) справедлив для открытых резонаторов с зеркалами любой формы (например, вогнутых), поскольку изменение сечения волны при ее распространении между зеркалами не влияет на полученные выше результаты.

В другом, менее распространенном способе возбуждения распределенным элементом связи является тонкое полупрозрачное зеркало (обычно диэлектрическая пленка), расположенное под углом  $45^\circ$  к оси резонатора и оптической оси возбуждающей волны. Часть энергии входного пучка, отражаясь от пленки, направляется на возбуждение резонатора, часть обязательно отражается, а часть может проходить мимо. Резонатор в этом случае включен в линию, в режиме "отсоса" энергии. Чтобы использовать резонатор в режиме конечной нагрузки линии, можно использовать дополнительное зеркало, отражающее назад "не захваченное" резонатором излучение, а продольным перемещением зеркала можно регулировать связь резонатора с внешним трактом.

## 5.2.5 Применения открытых резонаторов

Открытые резонаторы применяются, по-существу, для тех же целей, что объемные, но только для более коротковолнового диапазона — обычно начиная с миллиметрового и

короче. А в инфракрасном и световом диапазонах используются практически только открытые резонаторы, за исключением некоторых пока экзотических случаев, когда для ИК и видимого диапазона используют наноразмерные полосковые и диэлектрические резонаторы.

При использовании открытых резонаторов как ячеек для измерения свойств веществ в миллиметровой и субмиллиметровой области, подобно тому, как описано выше (см. подраздел 4.6.3) открытые резонаторы имеют преимущества из-за их высокой добротности. Но их определенный недостаток заключается в том, что если в резонатор поместить небольшой образец, размеры которого сравнимы или меньше длины волны, то этот образец не только смещает частоту резонатора, но и рассеивает энергию в свободное пространство, что может существенно уменьшить добротность колебаний. Если образец считать диполем с моментом  $\vec{p}$ , то в электрическом поле резонатора он будет излучать мощность

$$P_{rad} = \frac{1}{3} \cdot ck^4 |\vec{p}|^2 \quad (5.115)$$

которая приводит к дополнительным потерям в резонаторе и при этом нагруженная этим излучением добротность составит:

$$Q_L = Q_0 / \left( 1 + \frac{P_{rad}}{P_0} \right) , \quad (5.116)$$

Однако, измерение свойств протяженных однородных объектов, например, тонких пленок, помещенных на зеркале или в симметричном образом внутри резонатора, вполне возможно и эффективно.

Основное же применение открытые резонаторы находят в качестве колебательных системы высокой добротности для генераторов и усилителей излучения коротковолновых диапазонов, и, в частности, в лазерах. По-существу, любой лазер представляет собой открытый резонатор, обычно состоящих из двух вогнутых (или одного вогнутого и плоского) зеркал с хорошим коэффициентом отражения, внутри которого помещается активная среда. Это или газоразрядная ячейка (газоразрядный лазер, например, He-Ne или CO<sub>2</sub> лазер), или жидкостная ячейка, или стержень из активного вещества (рубин, алюмо-иттриевый гранат, неодимовое стекло и т.п). Большинство лазеров имеют цилиндрическую симметрию. При этом всю систему рассчитывают так, чтобы в резонаторе возбуждалось минимальное число мод, как поперечных, так и продольных. В твердотельных лазерах стараются избежать возбуждения колебаний, формируемых лучами, многократно отражающимися от внутренней поверхности стержня. Для этого внешние поверхности стержней не полируют, а делают слегка шероховатыми (матируют). При селекции по поперечным модам обычно используют основную моду и тогда выходное излучение гауссово, что удобно для применений. Разработаны методы избавления от паразитных продольных мод, и такие одномодовые лазеры используют, например, в стандартах частоты.

Важными практическими проблемами являются повышение эффективности вывода излучения из резонатора, а также минимизация потерь на зеркалах. Зеркала для ИК и видимого диапазона часто делают не из металла, а на зеркала из специального стекла наносят многослойное диэлектрическое покрытие интерференционного типа, особенно если лазер не перестраивают по длинам волн. Из металла зеркала изготавливают тогда, когда средняя мощность излучения составляет Вт, кВт и более, чтобы была возможность жидкостного охлаждения зеркал. В газовых лазерах смесь и разряд в ней создают

в стеклянной (или кварцевой) разрядной трубке (в маломощных лазерах отпаянной), а чтобы избежать отражения от торцов трубки, на ее концы наклеивают стеклянные окна под углом Брюстера. Для этих же целей под углом Брюстера часто сполировывают торцы активных элементов твердотельных лазеров.

Широкое использование лазеров стимулировало многочисленные теоретические и расчетные работы по открытым резонаторам ИК и видимого диапазона, ориентированные на решение практических задач лазерной техники. (см., например, Л16).

## Рекомендуемая литература

1. Л.А.Вайнштейн. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. – М.: Наука, 1988.
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982.
4. И.Е. Тамм. Основы теории электричества, Из-во "Наука", М., 1976 г.
5. Э.Л.Гинзтон. Измерения на сантиметровых волнах. – М.: ИИЛ, 1960.
6. В.Пановский, М.Филипс. Классическая электродинамика. – М.: Физматгиз, 1963.
7. Б.З.Каценеленбаум. Высокочастотная электродинамика. – М.: Наука, 1966.
8. Р.А.Валитов, В.И.Сретенский. Радиоизмерения на сверхвысоких частотах. – М.: ВИМО, 1958.
9. Л.А.Вайнштейн. Открытые резонаторы и открытые волноводы. – М.: Сов. радио, 1966.
10. В.В.Никольский, Т.И.Никольская. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989.
11. Ф.Тишер. Техника измерений на сверхвысоких частотах. – М.: ГИФМЛ, 1963.
12. Л.А.Вайнштейн. Теория диффракции и метод факторизации. – М.: Сов. радио, 1966.
13. Л.Левин. Теория волноводов. – М.: Радио и связь, 1981.
14. Р.Б.Ваганов, Б.З. Каценеленбаум. Основы теории дифракции.– М.: Наука, 1982.
15. Л.Мандельштам. Излучение через отверстие в резонаторе. ЖЭТФ, т.15, вып.9, 1945, стр 471-473.
16. В.П. Быков, О.О. Силичев. Лазерные резонаторы. М.: Физматлит, 2003.
17. А.Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах. М. Физматгиз, 1960.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	1
<b>Глава 1. Основные соотношения в электродинамике</b> .....	8
1.1. Уравнения Максвелла в вакууме и материальных средах.....	8
1.2. Комплексные обозначения в электродинамике.....	19
1.3. Электромагнитные волны.....	23
1.4. Граничные условия на металле.....	26
<b>Глава 2. Линии передачи на сверхвысоких частотах</b> .....	31
2.1. Волноводы.....	32
2.1.1. Системы волн в прямоугольном и круглом волноводах.....	36
2.1.2. Коаксиальная линия.....	40
2.2. Сторонние токи.....	45
2.3. Лемма Лоренца.....	47
2.4. Возбуждение волн в волноводах.....	49
2.5. Потери в волноводах.....	52
2.6. Общие свойства линий передачи.....	56
2.7. Основные способы измерения коэффициента отражения в волноводе.....	59



<b>Глава 3. Поверхностные волны</b> .....	65
3.1. Поверхностные волны над двумерной диэлектрической плоскостью .....	65
3.2. Планарный диэлектрический волновод .....	73
3.3. Поверхностная волна над металлической гребенкой .....	80
<b>Глава 4. Колебательные системы СВЧ</b> .....	86
4.1. Прямоугольный резонатор .....	86
4.2. Цилиндрический резонатор .....	89
4.3. Объемные резонаторы других типов .....	91
4.4. Омические потери в объемных резонаторах .....	94
4.5. Возбуждение объемных резонаторов .....	97
4.6. Связь объемного резонатора с линиями передачи .....	102
4.6.1. Связь объемного резонатора с волноводом через отверстие в тонкой металлической перегородке .....	107
4.6.2. Анализ характеристик резонатора, связанного с линией передачи ...	111
4.6.3. Связь радиочастотного контура с внешней линией передачи .....	114
4.7. Некоторые вопросы использования объемных резонаторов .....	116
4.7.1. Резонатор с внутренней нагрузкой .....	117
4.7.2. Резонатор, связанный с двумя линиями передачи .....	119
4.7.3. Измерение СВЧ свойств вещества в резонаторе .....	121

4.7.4 Ускорение элементарных частиц с использованием СВЧ резонаторов.124

**Глава 5. Квазиоптические методы в коротковолновых диапазонах СВЧ**  
126

5.1. Параболическое уравнение и гауссовы пучки излучения ..... 126

5.2. Открытые резонаторы ..... 132

5.2.1. Открытые резонаторы с плоскими зеркалами ..... 133

5.2.2. Открытые резонаторы со сферически вогнутыми зеркалами ..... 138

5.2.3. Открытые резонаторы с колебаниями "шепчущей галереи" ..... 144

5.2.4. Связь открытых резонаторов с линиями передачи ..... 149

5.2.5. Применения открытых резонаторов ..... 154

**Рекомендуемая литература** ..... 156