

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

735

ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

Том 27

Вып. 2 (8)

АВГУСТ 1954 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

СОДЕРЖАНИЕ

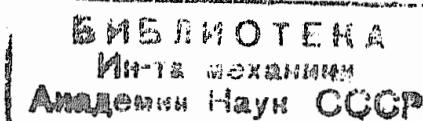
М. И. Подгорецкий и И. Л. Розенталь. Некоторые закономерности распада мезонов на три частицы	129
Э. М. Лимпанов. Релятивистско-инвариантная форма электродинамики без продольных и скалярных полей	135
В. П. Шабанский. Кинетическое уравнение для электронов в металлах в сильных полях	142
В. П. Шабанский. Об отклонениях от закона Ома в металлах	147
П. В. Мейклэр и Р. С. Шиманский. Термическое образование F-центров в кристаллах галоидного серебра	153
А. Я. Вятский. Дифракция и неупругое рассеяние электронов	162
Н. Б. Горный. Исследование методом электрического дифференцирования функции распределения вторичных электронов по энергиям для монокристалла меди, покрытого монокристаллической пленкой золота	171
М. Е. Герценштейн. Диэлектрическая проницаемость плазмы, находящейся в стационарном магнитном поле	180
И. С. Стекольников и М. А. Багиров. Исследование скорости развития лидера длинной искры	189
А. В. Гуревич. О разрушении сверхпроводимости пленок в магнитном поле	195
Д. И. Волков и В. И. Чечерников. Температурная зависимость магнитострикции ферромагнитных сплавов	208
И. М. Бронштейн и Т. А. Смородина. Вторичная электронная эмиссия тонких слоев Ве. I	215
А. А. Власов. О переносе массы и заряда поверхностными волнами	224
Л. П. Рапопорт и В. А. Филимонов. Статистический расчет распределения плотности нуклонов и оболочечное строение ядра	243
М. Ф. Широков. О центре инерции в общей теории относительности	251

Письма в редакцию

И. С. Шапиро. О природе τ -мезонов и V_2^0 -частицы	257
П. Г. Кард. К вопросу о спектре масс элементарных частиц	259
И. Х. Куусик. Замечание к электродинамике с высшими производными	260
С. Н. Задумкин. Поверхностное натяжение и теплота испарения ртути, сурьмы, висмута и мышьяка	261
Б. Л. Тиман. Теплоемкость газа при высоких температурах	262
Р. Л. Мюллер. О природе электропроводности стекла	264

Главный редактор *Н. Н. АНДРЕЕВ*

Зам. главного редактора *М. М. СУЩИНСКИЙ*



НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПАДА МЕЗОНОВ НА ТРИ ЧАСТИЦЫ

М. И. Подгорецкий и И. Л. Розенталь

Обобщаются проведенные в [1] при некоторых частных предположениях расчеты энергетического спектра вторичных частиц, образованных при распаде мезона на три частицы, в системе координат, связанной с первичной частицей. Для релятивистского и крайне нерелятивистского случаев вычисляется энергетическое и угловое распределение вторичных частиц в лабораторной системе координат. Оцениваются характеристики распределения углов некомпланарности следов π -мезонов, образованных при распаде связанных τ -частиц.

1. Об энергетическом спектре частиц, возникающих при распаде мезона на три частицы

В последние годы было обнаружено, что некоторые мезоны распадаются на три частицы. Важной характеристикой распада в этом случае является спектр импульсов вторичных частиц в системе координат, связанной с первичной частицей (Ц-система). В то время как при распаде на две частицы последние в Ц-системе имеют постоянные значения импульсов, определенные величинами масс первичной и вторичных частиц ($M, \mu_1 \mu_2$), при распаде на три частицы импульс вторичных частиц может иметь все значения от нуля до

$$p_{\max}^2 = \frac{[(M + \mu_1)^2 - (\mu_2^2 + \mu_3^2)] [(M - \mu_1)^2 - (\mu_2^2 + \mu_3^2)]}{(2M)^2} [1].$$

(Все величины с чертой относятся к Ц-системе.)

Для строгого вычисления спектра импульсов необходимо учесть характер взаимодействия частиц с полем. Однако до сих пор ни в одном случае тип взаимодействия не был установлен. Поэтому представляет интерес оценка спектра импульсов при предположении, что он не зависит от типа взаимодействия, а определяется исключительно статистическими весами конечных состояний. Такой подход оправдал себя при изучении β -распада и множественного рождения мезонов при взаимодействии частиц высокой энергии. Вычисленный таким образом энергетический спектр электронов, образующихся при распаде μ -мезонов, также не противоречит опытным данным [2]. В этом приближении для вычисления энергетического спектра вторичных частиц в общем случае удобно воспользоваться геометрическим приемом [2]. Вероятность w -распада в единицу времени с испусканием частицы с массой μ_1 и импульсом, заключенным между $p, p + dp$, определяется выражением:

$$w dp = \frac{2\pi}{\hbar} |H|^2 \rho_M, \quad (1)$$

где $H = \text{const}$ — матричный элемент, ρ_M — плотность конечных состоя-

ний, когда полная энергия $\bar{E} = M$ и при условии, что импульс p_1 первой частицы равен \bar{p} .

Плотность

$$\rho_M = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dV}{d\bar{E}} \Big|_{\substack{\bar{E}=M \\ \bar{p}_1=\bar{p}}};$$

здесь V — объем в фазовом пространстве, соответствующий энергии E и импульсу \bar{p} ,

$$V = v\Omega^2 \bar{p}^2 d\bar{p} / 2\pi^2 \hbar^3, \quad (2)$$

Ω — нормировочный объем в координатном пространстве; v — объем в пространстве импульсов, определенный законами сохранения

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 = 0, \quad (3a)$$

$$\sqrt{\bar{p}_1^2 + \mu_1^2} + \sqrt{\bar{p}_2^2 + \mu_2^2} + \sqrt{\bar{p}_3^2 + \mu_3^2} = \bar{E}. \quad (36)^1$$

Объем v является эллипсоидом вращения с осями, равными $\sqrt{BA/(A^2 - p_1^2)}$ (ось вращения) и $\sqrt{B/(A^2 - \bar{p}_1^2)}$, где

$$A = E - \sqrt{\bar{p}_1^2 + \mu_1^2},$$

$$B = (\bar{p}_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - A^2)^2 - 4\mu_2^2\mu_3^2.$$

Отсюда легко вычисляется объем эллипса

$$v = \frac{\pi}{6} \frac{A}{(A^2 - \bar{p}_1^2)^2} B^{1/2}. \quad (4)$$

Следовательно,

$$\rho_M = \frac{\Omega^2 \bar{p}^2 d\bar{p}}{96\pi^4 \hbar^6} \frac{B^{1/2}}{(A^2 - \bar{p}_1^2)^2} \left[\left(1 - \frac{4A^2}{A^2 - \bar{p}_1^2} \right) B + \frac{3}{2} A \frac{dB}{dA} \right], \quad (5)$$

$$dB/dA = 4A [A^2 - (\bar{p}_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)].$$

Окончательное выражение получаем, подставляя (5) в (1).

Если волновые функции вторичных частиц представляются плоскими волнами, то $|H|^2 = (g/\Omega)^2$ (g — константа взаимодействия). В этом случае

$$w d\bar{p} = \frac{g^2 \bar{p}^2 d\bar{p}}{48\pi^3 \hbar^7} \frac{B^{1/2}}{(A^2 - \bar{p}_1^2)^2} \left[\left(1 - \frac{4A^2}{A^2 - \bar{p}_1^2} \right) B + \frac{3}{2} A \frac{dB}{dA} \right]. \quad (6)$$

Аналогичное выражение для случая $\mu_3 = 0$ было получено ранее в [1].

2. Энергетическое и угловое распределение вторичных частиц при распаде мезонов на лету

Вычислим импульсное и угловое распределение частиц, образованных при распаде движущихся мезонов в предположении, что скорость всех вторичных частиц близка (или равна) скорости света как в Ц-системе, так и в Л-системе (лабораторная система координат).

¹ Мы всюду полагаем $c = 1$.

В этом случае в Ц-системе число $N(\bar{p}_1) d\bar{p}_1 d \cos \bar{\vartheta}$ вторичных частиц с импульсами, заключенными между p_1 и $p_1 + d\bar{p}_1$, вылетающих под углом к некоторой оси, лежащим между $\bar{\vartheta}$ и $\bar{\vartheta} + d\bar{\vartheta}$, определяется выражением (6) при условии, что все $\mu_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\bar{N}(\bar{p}_1) d\bar{p}_1 d \cos \bar{\vartheta} \propto (3M^2 - 6M\bar{p}_1 + 2\bar{p}_1^2) \bar{p}_1^2 d\bar{p}_1 d \cos \bar{\vartheta}. \quad (7)$$

Известно [2], что такая форма спектра не противоречит экспериментальным данным о распаде μ -мезонов. Чтобы перейти от Ц-к Л-системе координат p , ϑ , необходимо вычислить якобиан

$$J = \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} \frac{\partial \cos \bar{\vartheta}}{\partial \cos \vartheta} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \cos \vartheta} \frac{\partial \cos \bar{\vartheta}}{\partial p}.$$

Используя соотношения

$$\operatorname{tg} \bar{\vartheta} = \frac{1}{\gamma} \frac{p \sin \vartheta}{p \cos \vartheta - V_0 E} \quad (8)$$

и

$$\bar{p} = \gamma \sqrt{(E - pV_0 \cos \vartheta)^2 - (\mu^2 / \gamma^2)}$$

(где V_0 — скорость первичной частицы в Л-системе, $\gamma = 1/\sqrt{1 - V_0^2}$, E — энергия вторичной частицы в той же системе), можно получить

$$J = \frac{p^2}{\gamma E} \frac{(E - pV_0 \cos \vartheta)}{(E - pV_0 \cos \vartheta)^2 - (\mu^2 / \gamma^2)}. \quad (9)$$

В крайнем релятивистском случае ($\gamma \gg 1$)

$$\begin{aligned} J &\approx 1/\gamma (1 - V_0 \cos \vartheta), \\ \bar{p} &\approx \gamma p (1 - V_0 \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда распределение импульсов $N_0(p_1) dp_1$ в Л-системе, соответствующее функции (7), определяется выражением:

$$\begin{aligned} N_0(p_1) dp_1 &\propto \int_{\cos \vartheta_{\max}(p)}^1 [3M^2 - 6M\bar{p}_1 + 2\bar{p}_1^2] \bar{p}_1^2 J \sin \vartheta d\vartheta \propto \\ &\propto dp_1 \int_{\cos \vartheta_{\max}(p)}^1 [3M^2 - 6M\bar{p}_1(1 - V_0 \cos \vartheta) + \\ &+ 2\bar{p}_1^2(1 - V_0 \cos \vartheta)^2] \bar{p}_1^2 (1 - V_0 \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (10) следует

$$\cos \vartheta_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{V_0} \left(1 - \frac{\bar{p}_{\max}}{\gamma p_1} \right), & \text{если } \frac{1}{V_0} \left(1 - \frac{\bar{p}_{\max}}{\gamma p} \right) > -1, \\ -1 & \text{если } \frac{1}{V_0} \left(1 - \frac{\bar{p}_{\max}}{\gamma p} \right) \leq -1. \end{cases}$$

После интегрирования получаем

$$\begin{aligned} N_0(p_1) dp_1 &\propto p_1^2 \{ 3M^2 [\kappa^2 - (1 - V_0^2)] - 4M\gamma p_1 [\kappa^3 - (1 - V_0)^3] + \\ &+ \gamma^2 p_1^2 [\kappa^4 - (1 - V_0)^4] \} dp_1, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\kappa = M/2p_1\gamma \quad \text{при } p_1 > M/2(1 + V_0)\gamma,$$

$$\kappa = 1 + V_0 \quad \text{при } p_1 < M/2(1 + V_0)\gamma.$$

Функция углового распределения

$$N_0(\vartheta_1) d \cos \vartheta_1 \sim d \cos \vartheta_1 \int_0^{p_{\max}(\vartheta_1)} [3M^2 - 6Mp_1(1 - V_0 \cos \vartheta_1) + \\ + 2p_1^2(1 - V_0 \cos \vartheta_1)^2] p_1^2 (1 - V_0 \cos \vartheta_1) dp_1; \quad (13)$$

$$p_{\max} = M/2\gamma(1 - V_0 \cos \vartheta_1).$$

Следовательно,

$$N_0(\vartheta_1) d \cos \vartheta_1 \sim d \cos \vartheta_1 / (1 - V_0 \cos \vartheta_1)^2. \quad (14)$$

Естественно, что распределения всех трех частиц совпадают.

3. Нерелятивистский случай

Рассмотрим теперь случай $V_0 \ll 1$, полагая также, что и в Ц-системе все частицы нерелятивистские. Наиболее характерным признаком распада на три частицы является, как известно, компланарность следов вторичных частиц в Ц-системе. Если распад происходит на лету, то в Л-системе компланарность нарушается. Ниже вычисляются связанные с этим эффектом углы некомпланарности α , применительно к случаю распада τ -мезонов.

Рассмотрение сильно облегчается благодаря тому, что при распаде τ -мезонов угол α , соответствующий определенной частице, обуславливается практически только величиной ее импульса p_1 и не зависит от распределения импульсов между двумя остальными частицами. Мы докажем это положение при некотором допущении, которое, однако, в интересующем нас случае хорошо выполняется:

$$p_a = MV_0 \ll \bar{p}_1 \quad [\bar{p}_1 \text{ — полные импульсы } \pi\text{-мезонов}].$$

В этом случае, используя (3а) и то обстоятельство, что в числителе (15) члены порядка более низкого, чем p_a/\bar{p}_1 , обращаются в нуль, можно написать следующую цепь равенств:

$$\alpha = \frac{\mu^3 \left(\frac{\bar{p}_1}{\mu} + \frac{\bar{p}_a}{M} \right) \left[\left(\frac{\bar{p}_2}{\mu} + \frac{\bar{p}_a}{M} \right) \left(\frac{\bar{p}_3}{\mu} + \frac{\bar{p}_a}{M} \right) \right]}{\bar{p}_1 |[\bar{p}_2 \bar{p}_3]|} \approx \\ \approx \frac{\mu}{M} \frac{\bar{p}_1 |[\bar{p}_2 \bar{p}_3]| + \bar{p}_1 [(\bar{p}_2 - \bar{p}_3) \bar{p}_1]}{\bar{p}_1 |[\bar{p}_2 \bar{p}_3]|} \approx \frac{3\mu}{M} \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_1} \approx \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_1}, \quad (15)$$

где \bar{p}_1 — составляющая импульса, перпендикулярная к плоскости, в которой движутся вторичные частицы в Ц-системе. Последнее соотношение (15) основано на том, что в нашем случае $M \approx 3\mu$; $M \approx 970 m_e$; $\mu = 280 m_e$. Выражение (15) можно использовать для примерной оценки некомпланарности при распаде связанного отрицательного τ -мезона (см. [3])². Величина \bar{p}_1 определяется в этом случае характеристиками мезоатомного движения.

Среднее значение угла некомпланарности

$$\tilde{\alpha} = \tilde{p}_1 (1/p)$$

² В точном расчете следует принимать во внимание импульс, уносимый ядром. Учет этого обстоятельства не изменяет порядка величины некомпланарности.

и среднее квадратичное значение

$$\tilde{\alpha}^2 = (\tilde{p}_\perp^2) (1/p)^2.$$

Чтобы вычислить среднее значение, мы используем следующую аппроксимацию для функции распределения (6):

$$w(\bar{p}) d\bar{p} = \frac{16(M/\mu)^{3/2}}{\pi\beta^2} \left[\beta - \frac{M}{\mu} \bar{p}^2 \right]^{1/2} d\bar{p}, \quad (16)$$

где $\beta = 4\mu T$; $T = M - 3\mu$ — суммарная кинетическая энергия вторичных частиц.

Нормированная функция (16) для случая распада τ -мезонов представляет распределение, соответствующее (6) с точностью $\sim 1\%$.

Распределение импульсов $\Psi(p_a) dp_a$ τ -частиц в водородоподобном атоме в основном состоянии имеет следующий вид:

$$\Psi(p_a) dp_a = \frac{32}{\pi} b^5 \frac{p_a^2}{(p_a^2 + b^2)^4} dp_a, \quad (17)$$

где

$$b = MZe^2/\hbar.$$

Используя (16), можно написать

$$\tilde{\alpha} = \frac{32}{9\pi^2} b \sqrt{\frac{M}{\mu^2 T}} \approx \frac{32}{9\pi^2} b \sqrt{\frac{3}{\mu T}}, \quad (18)$$

где

$$\tilde{\alpha}^2 \approx b^2 / \mu T \quad (19)$$

и дисперсия

$$D \approx \frac{2}{3} b^2 / \mu T. \quad (20)$$

Подставляя численные значения, получим для мезоуглерода

$$\tilde{\alpha} \approx 7^\circ.$$

Поскольку $\sqrt{D} \sim \tilde{\alpha}$, то велика вероятность, что α принимает большие значения. Для сопоставления с экспериментальными данными интересна несколько иная характеристика распада связанного τ -мезона: распределение $W(\alpha_1)$ углов некомпланарности определенного π -мезона при заданном значении его импульса. Важно отметить, что эта характеристика [см. (15)] не зависит от энергетического распределения π -мезонов.

В соответствии с (15) и (17) средний угол

$$\tilde{\alpha}_1(p_1) = \frac{4}{3\pi} \frac{b}{p_1}. \quad (21)$$

В заключение авторы выражают свою признательность Е. Л. Фейнбергу за обсуждение вопросов, которые были затронуты в настоящей статье.

Примечание при корректуре. Из недавно опубликованной работы [4], повидимому, следует, что отрицательные τ -мезоны, захваченные на мезоатомную оболочку, распадаются, а не захватываются ядрами. В этой связи становятся особенно актуальными поиски некомплиарных τ -распадов. В качестве критерия для идентификации таких случаев можно использовать величину полной кинетической энергии распада, которая, как легко видеть, практически не меняется. Напротив, кинетическая энергия каждой отдельной вторичной частицы может сильно измениться. Последнее обстоятельство следует иметь в виду при поисках случаев распада остановившихся отрицательных мезонов, распадающихся по двухчастичной схеме (например χ -мезонов).

Литература

- [1] L. Michel. Proc. Phys. Soc., 63A, 514, 1950.—[2] Э. Ферми. Элементарные частицы, ИИЛ, М., 1952, стр. 47.—[3] М. И. Подгорецкий. ЖЭТФ, 26, 255, 1954.—[4] E. Amaldi, G. Bazoni, C. Castagnoli, G. Cortini, C. Franzinetti, A. Manfredini. Nuovo Cim., 11, 207, 1954.
-

РЕЛЯТИВИСКИ-ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ БЕЗ ПРОДОЛЬНЫХ И СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

Э. М. Липманов

Калибровка электромагнитных потенциалов по Гинзбургу применена для релятивистски-инвариантного разложения поля на обобщенные поперечные и продольные части в классической и квантовой электродинамике. Полученная формулировка квантовой теории значительно проще швингеровской.

1. Введение

В работе [1] произведено релятивистски-инвариантное разложение электромагнитных потенциалов на продольные и поперечные части в следующем виде¹:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) = & a_\mu(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + n_\mu n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \Lambda'(x) + n_\mu n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Lambda(x), \\ n_\lambda a_\lambda(x) = 0, \quad (\partial/\partial x_\lambda) a_\lambda(x) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь n_μ — произвольный единичный временеподобный вектор, $n_\mu^2 = -1$, $\Lambda(x)$ и $\Lambda'(x)$ — скалярные операторы, через которые выражаются продольные поля, а $a_\mu(x)$ — обобщенное поперечное поле. При помощи дополнительного условия Лоренца, которое налагается на вектор состояния системы $\Psi[\sigma]$ и содержит только операторы $\Lambda(x)$ и $\Lambda'(x)$, уравнение движения для вектора состояния в представлении взаимодействий приводится к виду

$$\begin{aligned} i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \\ = \left\{ -\frac{1}{c} j_\mu(x) a_\mu(x) - \frac{1}{2} \int_{\sigma} n_\nu \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_\nu} \frac{1}{c} n_\mu j_\mu(x) \frac{1}{c} j_\lambda(x') d\sigma'_\lambda \right\} \Psi[\sigma], \end{aligned} \quad (2)$$

где σ есть плоская пространственноподобная поверхность, а функция $\mathcal{D}(x)$ обладает следующими свойствами:

$$\left(n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)^2 \mathcal{D}(x) = D(x), \quad \square^2 \mathcal{D}(x) = 0, \quad (3)$$

$$n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{D}(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(x_\mu^2)^{1/2}}$$

при $x_\mu^2 > 0$. Здесь $D(x)$ — инвариантная фотонная перестановочная функция²; при помощи функции $\mathcal{D}(x)$ выражаются перестановочные соотношения для операторов $\Lambda(x)$, $\Lambda'(x)$ и $a_\mu(x)$. В частности, для компонент поля $a_\mu(x)$ имеют место следующие соотношения коммутации:

¹ По дважды повторяющимся значкам производится суммирование: по греческим 1, 2, 3, 4; по римским 1, 2, 3, за исключением особо оговоренного случая.

² См., например, [1, 2].

$$[a_\mu(x), a_\nu(x')] = i\hbar c \delta_{\mu\nu} D(x - x') - \\ - i\hbar c \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \left(n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) n_\rho \frac{\partial}{\partial x_\rho} \right\} \mathcal{D}(x - x'). \quad (4)$$

Основное уравнение (2) для вектора состояния системы содержит только фотонную часть поля $a_\mu(x)$ и член, представляющий собой обобщенную кулоновскую энергию взаимодействия электронов. Таким образом результат (2) является физически ясным, но само разложение (1) и все рассмотрение чрезмерно громоздки и сложны.

В данной работе показано, что отмеченные результаты работы [1] естественным образом получаются в несравненно более простой схеме электродинамики, использующей вместо условия Лоренца калибровку электромагнитных потенциалов по Гинзбургу [3]. При этом сохраняется тесное соответствие квантовой и классической теорий.

2. Классическая теория

В классической теории электромагнитные потенциалы $A_\mu(x)$ подчиняются уравнениям

$$\square^2 A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{c} j_\mu(x). \quad (5)$$

Обычно принято калибровать потенциалы $A_\mu(x)$ по Лоренцу

$$\partial A_\mu(x)/\partial x_\mu = 0, \quad (6)$$

после чего получается привычная симметричная форма уравнений движения для электромагнитных потенциалов:

$$\square^2 A_\mu(x) = -(1/c) j_\mu(x). \quad (7)$$

Однако, как известно, эта симметрия не соответствует физической природе электромагнитного поля и в действительности нарушается дополнительным условием (6), которое содержит только продольные и скалярные составляющие $A_\mu(x)$. Указанное несоответствие становится особенно ощутимым в квантовой электродинамике, в которой возникают специфические трудности, связанные с исключением дополнительного условия [2]. В связи с этим представляет интерес нахождение такой формулировки классической электродинамики, в которой физическое различие между поперечными и продольными полями, точнее, между фотонным полем и обобщенным кулоновым полем зарядов³ содержалось бы явно уже в самих уравнениях движения для потенциалов.

В работе [3] эта цель частично достигается благодаря выбору вместо (6) следующей калибровки для электромагнитных потенциалов

$$\partial A_i(x)/\partial x_i = 0. \quad (8)$$

Условие (8) является существенно не релятивистским, а в этом случае и сформулированная задача оказывается не вполне определенной. Релятивистское обобщение калибровки (8) можем написать, вводя в рассмотрение произвольный единичный временеподобный вектор n_μ , в виде

$$\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} + \left(n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) n_\rho A_\rho(x) = 0. \quad (9)$$

³ Отличие между поперечными и продольными полями может оказаться только относительным. Таким является, например, различие между магнитным полем Био — Савара и кулоновым электрическим полем заряда.

Условие (9) не затрагивает временеподобной составляющей $A_\mu(x)$, оставляя ее свободной. В соответствии с этим разложим потенциал $A_\mu(x)$ на пространственноподобную и временеподобную части

$$A_\mu(x) = a_\mu(x) + n_\mu \varphi(x), \quad (10)$$

где $a_\mu(x)$ есть пространственноподобная часть потенциала и удовлетворяет условию

$$n_\mu a_\mu(x) = 0, \quad (11)$$

а $\varphi(x)$ — скалярная функция. Дополнительное условие (9) тогда записывается в виде

$$\partial a_\mu(x)/\partial x_\mu = 0. \quad (12)$$

Для того чтобы найти уравнения движения для потенциалов $a_\mu(x)$ и $\varphi(x)$, подставим разложение (10) в уравнения (5). При помощи (12) находим

$$\square^2 a_\mu(x) + n_\mu \square^2 \varphi(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(n_v \frac{\partial}{\partial x_v} \right) \varphi(x) = -\frac{1}{c} j_\mu(x). \quad (13)$$

Умножая обе стороны (13) скалярно на n_μ , получаем уравнение движения для скалярного потенциала

$$\square^2 \varphi(x) + \left(n_v \frac{\partial}{\partial x_v} \right)^2 \varphi(x) = \frac{1}{c} n_v j_v(x). \quad (14)$$

Умножая затем обе стороны (14) на вектор n_μ и вычитая из (13), находим уравнение для векторного потенциала⁴

$$\begin{aligned} \square^2 a_\mu(x) - \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(n_v \frac{\partial}{\partial x_v} \right) + n_\mu \left(n_v \frac{\partial}{\partial x_v} \right)^2 \right] \varphi(x) = \\ = -\frac{1}{c} [j_\mu(x) + n_\mu n_v j_v(x)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение уравнения (14) находим при помощи инвариантной функции $\mathcal{D}(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{c} \int_{\sigma} n_v \frac{\partial}{\partial x_v} \mathcal{D}(x - x') j_\mu(x') d\sigma'_\mu, \quad (16)$$

где интегрирование ведется по плоской пространственноподобной поверхности σ , проходящей через точку x . Решение (16) можно проверить непосредственной его подстановкой в (14) при помощи соотношений (3) и при учете того, что производная от функции $D(x)$ обладает свойствами δ -функции Дирака при интегрировании по пространственноподобной поверхности^[1]⁵. При помощи (16) уравнение (15) приводится к виду

$$\square^2 a_\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(n_v \frac{\partial}{\partial x_v} \right) \varphi(x) - \frac{1}{c} j_\mu(x) - n_\mu \square^2 \varphi(x). \quad (17)$$

Таким образом скалярный потенциал поля $\varphi(x)$, согласно (16), является функцией только координат частиц, создающих поле, и описывает увлекаемое частицами обобщенное кулоново поле. Динамической величиной поля является только векторный потенциал $a_\mu(x)$ — обобщенное поперечное поле. Оно создается, согласно (17), как током

⁴ Уравнения (14) и (15) являются релятивистскими обобщениями уравнений (15) и (16) работы^[8].

⁵ При этом также использовано то обстоятельство, что вектор $d\sigma'_\mu$ параллелен вектору n_v .

проводимости, соответствующим движению зарядов, так и током смещения, соответствующим движению увлекаемого зарядами поля $\varphi(x)$. Это подтверждается также уравнением для поперечной части тензора поля $F'_{\mu\nu}$, которое устанавливаем при помощи (17) и (12)⁶,

$$\frac{\partial F'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \varphi(x) + \frac{1}{c} j_\mu(x) + n_\mu \square^2 \varphi(x). \quad (18)$$

4-тензор энергии — импульса электромагнитного поля дается выражением

$$T_{\mu\nu} = F_{\nu\lambda} F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}^2 = T_{\mu\nu}^\alpha + T_{\mu\nu}^\varphi + T_{\mu\nu}^{\alpha\varphi}, \quad (19)$$

где $T_{\mu\nu}^\alpha$ — энергия поперечного поля $a_\mu(x)$, $T_{\mu\nu}^\varphi$ — энергия поля $\varphi(x)$, $T_{\mu\nu}^{\alpha\varphi}$ — смешанный член. Ковариантное выражение для энергии электромагнитного поля напишется в виде

$$W = - \int_a n_\lambda T_{\lambda\nu} d\sigma_\nu = W^\alpha + W^\varphi, \quad (20)$$

где W^α и W^φ — энергии полей a_μ и φ , а интеграл от смешанного члена из (19) обратился в нуль вследствие (11) и (12). Для энергии обобщенного кулонового взаимодействия зарядов находим интегрированием по частям при помощи (19), (20) и (16), (14), (3):

$$W^\varphi = -\frac{1}{2} \int_a \varphi(x) n_\nu \left[\left(n_\rho \frac{\partial}{\partial x_\rho} \right)^2 + \square^2 \right] \varphi(x) d\sigma_\nu = -\frac{1}{2} \int_a \frac{1}{c} n_\nu j_\nu(x) \varphi(x) n_\alpha d\sigma_\alpha. \quad (21)$$

Учитывая, что векторы n_ν и $d\sigma_\nu$ параллельны друг другу, приводим последнее выражение к виду

$$\begin{aligned} W^\varphi &= \frac{1}{2} \int_a \varphi(x) \frac{1}{c} j_\alpha(x) d\sigma_\alpha = \\ &= \frac{1}{2c^2} \int_a \int_a n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{D}(x - x') j_\mu(x') j_\alpha(x) d\sigma'_\mu d\sigma_\alpha. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом W^φ есть энергия «неполевого» взаимодействия зарядов, зависящего только от движения частиц. Для энергии обобщенного поперечного поля находим интегрированием по частям при учете условий (11) и (12)

$$W^\alpha = \frac{1}{2} \int_a \left\{ n_\nu \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} \right)^2 - 2n_\lambda \frac{\partial a_\rho}{\partial x_\lambda} \frac{\partial a_\rho}{\partial x_\nu} \right\} d\sigma_\nu. \quad (23)$$

3. Квантовая теория

В обычной формулировке квантовой электродинамики [2], которая исходит из симметричной формы уравнений движения для электромагнитных потенциалов (7), квантованию подвергаются сначала все составляющие 4-потенциала $A_\mu(x)$ без учета дополнительного условия. Специальное рассмотрение необходимо затем для исключения при помощи дополнительного условия продольных и скалярных полей, которые остаются в конечном итоге не квантованными. Соответствую-

⁶ Физический смысл отдельных членов становится особенно ясным при выборе специальной системы координат $n_\mu = (0, 0, 0, i)$, который соответствует переходу от сверхмноговременного формализма к обычному.

щая релятивистски-инвариантная процедура исключения продольных полей разработана в [1]. Однако тот факт, что продольные поля оказываются в конечном итоге не квантованными, наводит на мысль о том, что исключение продольных полей может быть выполнено до квантования уже в классической теории, что значительно упростило бы построение квантовой теории. Это действительно и сделано в полученной в предыдущем разделе релятивистски-инвариантной формулировке классической электродинамики, которая использует калибровку потенциалов согласно (9).

Квантование в полученной теории легко выполнить на основании следующих двух требований [4]⁷: 1) релятивистская инвариантность квантования, 2) «канонические» перестановочные соотношения между независимыми компонентами 4-потенциала.

При этом квантуются, естественно, только динамические величины поля $a_\mu(x)$.

Разложим 4-势量 обобщенного поперечного поля $a_\mu(x)$ в интеграл Фурье

$$a_\mu(x) = (2\pi)^{-1/2} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2k_0}} \{a_\mu(k) \exp[ik_\alpha x_\alpha] + a_\mu^*(k) \exp[-ik_\alpha x_\alpha]\}, \quad (24)$$

где

$$k_0 = (k_i^2)^{1/2}, \quad d^3 k = dk_1 dk_2 dk_3.$$

Дополнительные условия (11) и (12) в k -пространстве запишутся в виде

$$n_\nu a_\nu(k) = 0; \quad k_\nu a_\nu(k) = 0. \quad (25)$$

Требование релятивистской инвариантности квантования приводит к выводу

$$[a_\nu(k), a_\mu^*(k')] = B_{\nu\mu}(k, k'), \quad (26)$$

где $B_{\nu\mu}(k, k')$ является тензором. Выбираем теперь координатную систему так, чтобы было

$$n_\mu = (0, 0, 0, i); \quad k_\nu = (k, 0, 0, ik). \quad (27)$$

В этой системе координат условия (25) приобретают следующий вид:

$$a_4 = a_1 = 0, \quad a_2, a_3 — произвольны. \quad (28)$$

Подчиним независимые компоненты поля a_2, a_3 «каноническим» перестановочным соотношениям. Этим, в связи с (28), мы однозначно определяем тензор $B_{\nu\mu}(k, k')$ в выбранной системе координат:

$$B_{11} = B_{44} = B_{r1} = B_{r4} = 0, \quad B_{rs} = k_0 \delta_{rs} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (29)$$

где в данном случае r, s принимают значения только 2, 3.

Общее выражение для перестановочного тензора устанавливаем на основании требования однозначности в виде

$$B_{\nu\mu}(k, k') = k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left\{ \delta_{\nu\mu} - \frac{k_\nu k_\mu}{(n_\alpha k_\alpha)^2} - \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{(n_\alpha k_\alpha)} \right\}. \quad (30)$$

Таким образом мы получаем релятивистски-инвариантную формулировку квантовой электродинамики с операторным дополнительным условием и без фиктивных фотонов.

⁷ В [4] подобным методом производится квантование векторного мезонного поля.

Исходя из перестановочных соотношений (30), нетрудно проверить, пользуясь разложением Фурье для фотонной перестановочной функции $D(x)$ и следующим очевидным соотношением между компонентами Фурье для функций $\mathcal{D}(x)$ и $D(x)$

$$\mathcal{D}(k) = D(k) / (n_\alpha k_\alpha)^2, \quad (31)$$

что перестановочные соотношения для операторов $a_\mu(x)$ имеют вид

$$[a_\mu(x), a_\nu(x')] = i\hbar c \delta_{\mu\nu} D(x - x') - \\ - i\hbar c \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \left(n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) n_\rho \frac{\partial}{\partial x_\rho} \right\} \mathcal{D}(x - x'). \quad (32)$$

Эти соотношения точно совпадают с соотношениями коммутации (4) для компонент обобщенного поперечного поля в теории Швингера.

Для получения ковариантной формулировки изложенной теории в представлении взаимодействия будем исходить из представления Гейзенберга для квантованных электронного и электромагнитного полей. В этом представлении вектор состояния Φ системы является постоянным, а операторы полей подчиняются классическим уравнениям движения: электронные операторы — уравнениям Дирака, фотонные операторы — уравнениям (17), (11) и (12). Переход к представлению взаимодействия достигается посредством канонического преобразования

$$\Psi[\sigma] = U[\sigma] \Phi, \quad (33)$$

где $\Psi[\sigma]$ есть вектор состояния системы в представлении взаимодействия, а унитарный оператор $U[\sigma]$ подчинен уравнению⁸

$$i\hbar c \frac{\delta U[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \left\{ -\frac{1}{c} j_\nu(x) a_\nu(x) - \frac{1}{2} \frac{1}{c} n_\nu j_\nu(x) \varphi(x) \right\} U[\sigma]. \quad (34)$$

Здесь скалярный потенциал $\varphi(x)$ дается выражением (16).

Действительно, можно проверить при помощи формулы для преобразования производных от динамических величин от представления Гейзенберга к представлению взаимодействия, приведенной в работе [1], что операторы электронного и фотонного полей в представлении взаимодействия удовлетворяют уравнениям движения для свободных полей, как и должно быть. Уравнение движения для вектора состояния $\Psi[\sigma]$ системы электронного и фотонного полей в представлении взаимодействия находим из (33), (34) и (16) в виде:

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \left\{ -\frac{1}{c} j_\nu(x) a_\nu^\dagger(x) - \frac{1}{2} \int_\sigma n_\nu \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_\nu} \frac{1}{c} n_\mu j_\mu(x) \frac{1}{c} j_\lambda(x') d\sigma'_\lambda \right\} \Psi[\sigma], \quad (35)$$

что совпадает с основным уравнением (2) для вектора состояния $\Psi[\sigma]$ работы [1]. Таким образом получены все существенные результаты работы Швингера, касающиеся ковариантного исключения продольных полей, более простым и последовательным методом. Отметим следующие его достоинства. Разложение (10), в отличие от (1), является простым и физически ясным; имеется тесное соответствие классической и квантовой теорий; отсутствует надобность в громоздкой процедуре исключения продольных полей в квантовой теории.

⁸ Первый член в фигурной скобке справа в (34) есть плотность энергии взаимодействия электронного поля с фотонным, а второй член представляет собой, согласно (21), плотность энергии кулоновского взаимодействия электронов.

В заключение рассмотрим вопрос о градиентной инвариантности изложенной теории. Нетрудно видеть, что фотонная часть 4-потенциала поля $a_\mu(x)$ определяется уравнениями (17), (11) и (12) однозначно. Действительно, положив

$$a_\mu(x) = a'_\mu(x) + (\partial F(x) / \partial x_\mu),$$

находим из уравнений (11) и (12) следующую систему уравнений для функции $F(x)$:

$$\square^2 F(x) = 0, \left(n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) F(x) = 0,$$

которая имеет только нулевое решение⁹. Этого и можно было ожидать, так как 4-势能 $a_\mu(x)$ обладает непосредственным физическим смыслом фотонной волновой функции¹⁰.

С другой стороны, временеподобная часть 4-势能а поля $n_\mu \varphi(x)$ определяется только с точностью до градиентного преобразования:

$$n_\mu \varphi(x) \rightarrow n_\mu \varphi(x) + (\partial F(x) / \partial x_\mu),$$

где функция $F(x)$ может изменяться во временеподобном направлении¹¹. Этого также можно было ожидать, так как скалярный потенциал поля $\varphi(x)$ непосредственного физического смысла не имеет.

Новозыбковский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
10 октября 1953 г.

Литература

- [1] J. Schwinger. Phys. Rev., 74, 1439, 1948.—[2] Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей, ГТТИ, 1947. А. Соколов, Д. Иваненко. Квантовая теория поля, ГТТИ, 1952.—[3] В. Л. Гинзбург. ЖЭТФ, 9, 981, 1948,—[4] Э. М. Липманов. ДАН СССР, 67, 627, 1949.

⁹ В этом проще всего убедиться, выбрав специальную систему координат $n_\mu = (0, 0, 0, i)$.

¹⁰ 4-势能 поля $a_\mu(x)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам потенциалов поля в мезонной теории (ср. [4]).

¹¹ Из (14) следует, что функция $F(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\square^2 F(x) + \left(n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)^2 F(x) = 0,$$

которое имеет решением функцию, изменяющуюся только во временеподобном направлении.

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛАХ В СИЛЬНЫХ ПОЛЯХ

В. П. Шабанский

Получена пригодная при любых полях приближенная система кинетических уравнений для электронов в металле путем разложения интеграла столкновений по малому параметру $\Delta p / p$, где Δp — изменение по абсолютной величине импульса электрона p при столкновении с решеткой.

В электронной теории металлов обычно электрическое поле считается слабым, что отвечает области применимости закона Ома. В соответствии с этим используются приближенные кинетические уравнения, справедливые лишь в случае слабых полей. Поэтому при решении задачи об электропроводности в сильных полях мы встречаемся с необходимостью получить практически удобные кинетические уравнения для электронов в металле, справедливые при любых полях. Этот вопрос и освещен ниже.

Изменение функции распределения в пространстве волновых чисел \mathbf{k} под действием оператора столкновения электронов с фононами таково:

$$(a - b)f = \int V_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) [1 - f(\mathbf{k}')] G(d\mathbf{k}') - \\ - \int V_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}') [1 - f(\mathbf{k})] G(d\mathbf{k}'), \quad (1)$$

где $V_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}}$ — вероятность перехода электрона из состояния \mathbf{k} в состояние \mathbf{k}' , G — вес состояния; интегрирование ведется по всему пространству волновых чисел.

Если $V_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}'}$ зависит только от k , k' и угла ϑ между \mathbf{k} и \mathbf{k}' , то, перейдя к системе координат с полярной осью, направленной по \mathbf{k} , запишем

$$(a - b)f = \int_0^\infty \int_0^\pi V(k, k', \vartheta) f(\mathbf{k}) [1 - f(\mathbf{k}')] G k'^2 dk' d\omega - \\ - \int_0^\infty \int_0^\pi V(k', k, \vartheta) f(\mathbf{k}') [1 - f(\mathbf{k})] G k'^2 dk' d\omega.$$

Интегрирование ведется по всем возможным k' и по телесному углу вокруг фиксированного \mathbf{k} .

Введем переменную $k' = k + \Delta k$ и вновь определим вероятность перехода следующим образом:

$$V(k, k', \vartheta) = V(k, k + \Delta k, \vartheta) = \frac{1}{Gk^2} W(k, \Delta k, \vartheta), \quad (2) \\ V(k', k, \vartheta) = V(k', k' - \Delta k, \vartheta) = \frac{1}{Gk^2} W(k', -\Delta k, \vartheta),$$

где $W(k, \Delta k, \vartheta)$ есть вероятность рассеяния на угол ϑ с изменением абсолютной величины волнового вектора на Δk . Выражение (1) принимает вид:

$$(a - b)f = \int_{-k}^{\infty} \int_{\omega} f(k) [1 - f(k')] W(k, \Delta k, \vartheta) d\Delta k d\omega - \\ - \int_{-k}^{\infty} \int_{\omega} f(k') [1 - f(k)] W(k', -\Delta k, \vartheta) d\Delta k d\omega \frac{k'^2}{k^2}.$$

Очевидно, что

$$\int_{-k}^{\infty} \int_{\omega} W(k, \Delta k, \vartheta) d\omega d\Delta k = 1.$$

Для процессов, в которых W мала при $\Delta k \gg k$, т. е. для медленных процессов в отношении передачи энергии, предел интегрирования $-k$ можно заменить на $-\infty$. Тогда оператор столкновений можно преобразовать к выражению

$$(a - b)f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\omega} f(k) [1 - f(k')] W(k, \Delta k, \vartheta) d\Delta k d\omega - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\omega} f(k'') [1 - f(k)] W(k - \Delta k, \Delta k, \vartheta) \frac{k''^2}{k^2} d\Delta k d\omega, \quad (3)$$

где $k' = k + \Delta k$, $k'' = k - \Delta k$, причем $k'/k' = k''/k''$. Разложим подинтегральное выражение (3) в ряд по Δk :

$$f(k') = \left[f + \Delta k \frac{\partial f}{\partial k} + \Delta k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial k^2} \right]_{k=k'(1-\Delta k/k')} , \\ f(k'') W(k'', \Delta k, \vartheta) k''^2 = \\ = \left[f W k^2 - \Delta k \frac{\partial}{\partial k} (f W k^2) + \frac{\Delta k^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} (f W k^2) \right]_{k=k''(1+\Delta k/k'')}. \quad (4)$$

Очевидно, что разложение ведется в одной и той же точке по противоположно направленным приращениям. Уравнение (3), в которое следует подставить (4), является исходным.

Ищем решение в виде

$$f = f_0(k) + \frac{k}{k} f_1(k). \quad (5)$$

Беря в (4) в качестве f функцию f_0 и подставляя в (3), видим, что для первого члена разложения (4) выражение (3) обращается в нуль; второй и третий члены дадут

$$(a - b)f_0 = A_1 f_0 \frac{\partial f_0}{\partial k} - A_2 f_0 \frac{\partial^2 f_0}{\partial k^2} - \\ - (1 - f_0) \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial k} (k^2 A_1 f_0) - (1 - f_0) \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} (k^2 A_2 f_0), \quad (6)$$

где обозначено

$$A_1(k) = -\frac{\Delta k}{\tau} = -\int \Delta k W d\Delta k d\omega, \quad (7) \\ A_2(k) = \frac{\Delta k^2}{2\tau} = \int \frac{\Delta k^2}{2} W d\Delta k d\omega.$$

Выражение (6) можно преобразовать к виду

$$(a - b)f_0 = \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial k} (k^2 S_k), \quad (8)$$

где

$$S_k = -(1 - f_0) \left[A_1 f_0 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial k} (k^2 A_2 f_0) \right] - A_2 f_0 \frac{\partial f_0}{\partial k}. \quad (9)$$

Подставим теперь $f_0 + (k/k) f_1$ в (3) и пренебрежем членами, в которые входит произведение величин f_1 .

При высоких температурах можно также пренебречь изменением импульса по абсолютной величине в смешанных членах вида $f_0 f_1$, для этого достаточно ограничиться для них первыми членами разложения (4). Обозначая вероятность рассеяния на угол ϑ через $P(k, \vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} W(k, \Delta k, \vartheta) d\Delta k$, получим при высоких температурах $T \gg \Theta$ (Θ — дебаевская температура):

$$\begin{aligned} (a - b) \left(f_0 + \frac{k}{k} f_1 \right) &= \int_{\omega} \left(\frac{k}{k} f_1 - \frac{k'}{k} f_1 \right) P(k, \vartheta) d\omega = \\ &= \frac{k}{k} f_1 \int_{\omega} P(k, \vartheta) (1 - \cos \vartheta) d\omega = \frac{k}{k} f_1 \frac{v}{l}, \end{aligned} \quad (10)$$

где v — скорость, а l — длина свободного пробега электрона.

Длина свободного пробега вычисляется в теории металлов в явном виде и в случае $T \gg \Theta$ имеет температурную зависимость вида $l \sim 1/T$. В промежуточном случае ($T \sim \Theta$) универсального для всех металлов выражения для времени релаксации не существует. Но при очень низких температурах ($T \ll \Theta$) действие оператора (10) с учетом передачи энергии¹ снова может быть сведено к виду $\frac{k}{k} f_1 \frac{v}{l}$, где уже $l \sim \frac{1}{T^6}$.

При низких температурах следует также учесть столкновения с нерегулярностями в решетке, обеспечивающие появление остаточного сопротивления. Действие оператора, отвечающего таким столкновениям, на функцию $f_0 + \frac{k}{k} f_1$, приводит к выражению $\frac{k}{k} f_1 \frac{v}{l_0}$, где l_0 — длина свободного пробега, не зависящая от температуры и энергии. При этом члена, подобного (8), не будет, так как при этих столкновениях энергия электронов не меняется.

Таким образом кинетическое уравнение запишется в виде:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]_{\text{поле}} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial k} (k^2 S_k) + \frac{k}{k} f_1 \frac{v}{L} = 0, \quad (11)$$

где

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]_{\text{поле}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{e}{\hbar} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \nabla_{\mathbf{k}} f, \quad \frac{1}{L} = \frac{1}{l} + \frac{1}{l_0}, \quad v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon}{\partial k}.$$

Учтем, что

$$\int k f_1 d\omega = 0,$$

¹ В этом случае нельзя пренебречь изменением абсолютной величины импульса в смешанных членах $f_0 f_1$, так как учет лишь упругого рассеяния не обеспечивает конечности длины свободного пробега.

а также

$$\frac{e}{\hbar c} [\mathbf{vH}] \nabla_{\mathbf{k}} f = -\frac{e}{cm} \mathbf{H} [\mathbf{k} \nabla_{\mathbf{k}}] f.$$

Тогда, интегрируя (11) последовательно по $d\omega$ и по $\mathbf{k} d\omega$, получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \operatorname{div} \mathbf{f}_1 + \frac{e}{3\hbar k^2} \frac{\partial}{\partial k} (k^2 \mathbf{E} \mathbf{f}_1) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial k} [k^2 S_k] = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \nabla f_0 + \frac{e\mathbf{E}}{\hbar} \frac{\partial f_0}{\partial k} + \frac{e}{mc} [\mathbf{H} \mathbf{f}_1] + \frac{v}{L} \mathbf{f}_1 = 0,$$

или в пространстве импульсов $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \operatorname{div} \mathbf{f}_1 + \frac{e}{3p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 \mathbf{E} \mathbf{f}_1) + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 S) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \nabla f_0 + e\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial p} + \frac{e}{mc} [\mathbf{H} \mathbf{f}_1] + \frac{v}{L} \mathbf{f}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$S = \hbar S_k = -(1 - f_0) \left[A_1 f_0 + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 A_2 f_0) \right] - A_2 f_0 \frac{\partial f_0}{\partial p}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= - \int \Delta p W(p, \Delta p, \vartheta) d\Delta p d\omega, \\ A_2 &= \int \frac{\Delta p^2}{2} W(p, \Delta p, \vartheta) d\Delta p d\omega. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (12) справедливы в двух крайних случаях: при температурах $T \gg \Theta$ и $T \ll \Theta$, где Θ — дебаевская температура. Если $f_0 \ll 1$, то выражение (13) для S переходит в соответствующее выражение для радиальной составляющей тока в пространстве импульсов в случае Больцмановской статистики [1]².

Для конкретного применения уравнений (12) необходимо явно вычислить величины (14) из рассмотрения механизма столкновений.

Импульс электрона при испускании или поглощении фонона меняется незначительно по абсолютной величине (но не по направлению), так как импульс фонона $\hbar\omega/v_s \ll p$, а скорость звука $v_s \ll v$. Из закона сохранения импульса следует $\hbar\omega/v_s = 2p \sin \frac{\vartheta}{2}$, так что относительное изменение абсолютной величины импульса $\frac{\Delta p}{p} \sim \frac{m\hbar\omega}{p^2} \sim \frac{\hbar\omega}{\epsilon} \ll 10^{-2}$, и разложение (4) оправдано. Отсюда изменение импульса равно $\Delta p_{1,2} = \mp 2mv_s \sin \frac{\vartheta}{2}$ соответственно при испускании и поглощении фонона под углом ϑ . Общая вероятность рассеяния электрона с импульсом p на угол ϑ с изменением импульса на Δp может быть записана в виде [1]

$$W(p, \Delta p, \vartheta) = P_1(p, \vartheta) \delta(\Delta p + \Delta p_1) + P_2(p, \vartheta) \delta(\Delta p - \Delta p_2), \quad (15)$$

$$P_1 + P_2 = P, \quad (16)$$

где первый и второй члены в (15) — вероятности рассеяния электрона на угол ϑ с изменением импульса на Δp соответственно при испу-

² Вообще, как легко проверить, для любой статистики [в (1) вместо $1 - f$ надо подставить $1 - \gamma f$, где $\gamma = 1$ для статистики Ферми — Дирака, $\gamma = -1$ для статистики Бозе и $\gamma = 0$ для статистики Больцмана] выражение S таково:

$$S = -(1 - \gamma f_0) \left[A_1 f_0 + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 A_2 f_0) \right] - \gamma A_2 f_0 \frac{\partial f_0}{\partial p}.$$

скании и поглощении фонона, а $P(p, \vartheta)$ в (16) — вероятность рассеяния на угол ϑ .

Подставляя (15) в (14), получим

$$A_2 = m^2 v_s^2 \int P(p, \vartheta) (1 - \cos \vartheta) d\omega = m^2 v_s^2 v / l. \quad (17)$$

Для вычисления A_1 следует определить $\Delta p_{1,2}$ из законов сохранения в следующем приближении, ибо при усреднении по углам член порядка mv_s исчезает. В этом случае необходимо было бы учитывать разницу в импульсах испущенного и поглощенного фононов [2], т. е. их рассеяние, так как этот процесс также порядка $(mv_s)^2$. Проще, однако, найти величину A_1 из условия $S(f_{00}) = 0$, где f_{00} — функция распределения Ферми — Дирака, $f_{00} = [\exp \{(\varepsilon - \mu) / kT\} + 1]^{-1}$. Получаем

$$A_1 = \frac{mv_s^2}{l} \left(\frac{p}{kT} \frac{d\varepsilon}{dp} - \Lambda \right), \quad \Lambda = 3 - \frac{d \ln l}{d \ln p}. \quad (18)$$

Радиальный ток записывается в виде

$$S = - \frac{p^2 v_s^2}{l k T} f_0 (1 - f_0) - \frac{mpv_s^2}{l} \frac{\partial f_0}{\partial p}. \quad (19)$$

Он отличается от соответствующего выражения в [1] первым членом, учитывающим принцип запрета.

Отметим, что уравнения (12) с S из (19) получены при неявном предположении о том, что температура решетки T задана. Это означает, что вся энергия, переданная электронами решетке, успевает транслироваться последней в окружающую проводник среду. Только в этом случае $f_1 \ll f_0$ при любых больших полях.

В заключение приношу глубокую благодарность проф. В. Л. Гинзбургу за предоставление темы и обсуждение результатов.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16 января 1954 г.

Литература

[1] Б. И. Давыдов. ЖЭТФ, 6, 471, 1936; 7, 1069, 1937. — [2] Л. Ландau и А. Компанеец. ЖЭТФ, 5, 276, 1935.

ОБ ОТКЛОНЕНИЯХ ОТ ЗАКОНА ОМА В МЕТАЛЛАХ

В. П. Шабанский

Рассмотрен вопрос об отклонениях от закона Ома в металлах при больших плотностях тока. Показана ошибочность существующих оценок силы тока, при которой наступают эти отклонения. На основе кинетических уравнений, рассмотренных в предыдущей работе и справедливых для любых полей, показано, что отклонения от закона Ома обусловлены, в первую очередь, замедленной передачей энергии при столкновениях электронов с решеткой. При достаточно низких температурах сопротивление должно проходить (при заданном токе) через минимум.

Современная теория металлов, базирующаяся на модели газа невзаимодействующих электронов, успешно объясняет ряд свойств металлов. Важнейшими достижениями теории являются нахождение температурной зависимости и оценка порядка величины кинетических коэффициентов, в частности, электропроводности. Но наряду с этим теория, базирующаяся на модели электронного газа, совершенно не может объяснить некоторые фундаментальные свойства металлов. К их числу, в первую очередь, следует отнести явление сверхпроводимости. Остается также непонятным возрастание сопротивления у некоторых несверхпроводящих металлов при низких температурах [1-7].

Вместе с тем существует еще одна область явлений, до сих пор не изученная, которая может служить для проверки теории. Это исследование нелинейных эффектов в металлах и прежде всего изучение проводимости при больших плотностях тока. За последнее время появились две экспериментальные работы, посвященные проверке закона Ома для металлов [8, 9]. В первой из них наблюдалось сильное отклонение от закона Ома для платины и вольфрама при плотностях тока $\sim 10^6$ А/см². При этом для других металлов каких-либо отклонений не наблюдалось. Во второй работе для тех же металлов и меди, напротив, отклонений с точностью до 10% не обнаружено вплоть до токов $\sim 1 \div 10 \cdot 10^6$ А/см². Вместе с тем в случае висмута наблюдались отклонения от закона Ома уже при токах $5 \div 10 \cdot 10^5$ А/см².

Настоящая работа посвящена в основном выяснению вопроса об отклонениях от закона Ома на основе существующей электронной теории металлов.

В разделе 1 вычисляется поправка к закону Ома путем учета более высоких порядков разложения решения кинетического уравнения по малому параметру E (внешнее поле) и показывается, что отклонений от закона Ома следует ожидать при гораздо больших плотностях тока, чем дает оценка [10, 11]. В разделах 2—5 решаются для случая электропроводности уравнения, полученные в работе [12], учитывающие факт замедленной передачи энергии при столкновении электронов с решеткой (эти уравнения справедливы для любых полей). Это позволяет учесть те эффекты, которые в теории металлов ранее игнорировались.

Из решения видно, что отклонения от закона Ома связаны преимущественно с замедленной передачей энергии и при высоких температурах наступают раньше, чем это дает оценка, произведенная в разделе 1.

При очень низких температурах оказывается, что рассматриваемый механизм играет настолько значительную роль, что приводит при заданных токе и изменении температуры к существованию минимума сопротивления, с дальнейшим ростом сопротивления до бесконечности при стремлении температуры к нулю. Не исключена возможность, что наблюдающееся на опыте повышение сопротивления при сверхнизких температурах имеет именно такую природу.

1. Разложение по полю

Кинетическое уравнение для электронов в проводнике имеет вид

$$[\partial f / \partial t]_{\text{поле}} = - [\partial f / \partial t]_{\text{ст}}, \quad (1)$$

где слева стоят члены, учитывающие изменение функции распределения за счет внешних полей, а справа — за счет столкновений электронов с решеткой. Решение уравнения (1) в теории проводимости ищут в виде $f = f_0 + f_1$, $f_1 \ll f_0$, где f_1 — отклонение от равновесного распределения f_0 .

Закон Ома есть следствие пренебрежения членами порядка f_1 в левой части уравнения. В простейшем случае, когда отсутствуют внешнее магнитное поле и градиент температуры и существует время релаксации τ , уравнение принимает вид:

$$eE \frac{\partial f_0}{\partial p_x} = - \frac{f - f_0}{\tau} = - \frac{v}{l} f_1, \quad (2)$$

где E — напряженность электрического поля, v — скорость, l — длина свободного пробега.

Плотность тока

$$I = e \int V_x f d\Gamma = \frac{1}{3} e^2 E (lvN)_0. \quad (3)$$

Здесь $N = d\Gamma / d\varepsilon$ — плотность состояний на интервал энергии $d\varepsilon$, а индекс 0 означает, что соответствующее выражение берется при значении энергии, равной граничной энергии Ферми.

Для свободного электронного газа число электронов $n = 2(4/3\pi p_0^3)/(2\pi\hbar)^3$, $(lvN)_0 = 3/2 n/mv_0$, и ток может быть записан в виде

$$I = \sigma_0 E = (e^2 nl / m v_0) E. \quad (4)$$

Как утверждается в работах [10] и [11], закон Ома справедлив, пока f_1 мало по сравнению с f_0 . В этом случае, учитывая (2) и то, что $\partial f_0 / \partial \varepsilon$ заметно отлична от нуля только в области спада фермиевского распределения ширины kT , где $\partial f_0 / \partial \varepsilon \sim f_0 / kT$, получаем в качестве условия справедливости закона Ома неравенство

$$eEl / kT \ll 1, \quad (5)$$

что соответствует согласно (3) току

$$I \ll e(vN)_0 kT \sim 10^9 \text{ А/см}^2.$$

Подобная оценка, однако, ошибочна. В самом деле, линеаризация уравнения (1) есть учет только первого члена разложения по малому параметру E . Учтем члены более высокого порядка, т. е. подставим в уравнение (2) функцию f в виде $f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots$, где $\mu = E/E_0$ — безразмерный малый параметр, а f_0 — фермиевское распределение. Тогда, приравнивая члены при одинаковых степенях, получим цепочку уравнений:

$$eE_0 \frac{\partial f_k}{\partial p_x} + \frac{f_{k+1}}{\tau} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Обрывая ее на третьем уравнении и вычисляя ток по формуле

$$I = e \int v_x (\mu f_1 + \mu^3 f_3) d\Gamma,$$

можно получить выражение для проводимости:

$$\sigma = \frac{I}{E} = \sigma_0 \left[1 + a \left(\frac{kT}{\epsilon_0} \right)^2 + b \left(\frac{eEl}{\epsilon_0} \right)^2 \right], \quad (7)$$

где σ_0 — проводимость при малых полях, а a и b — коэффициенты порядка $1 \div 10$.

Второй член в (7) учитывает поправку на неполное вырождение фермиевского распределения и приведен здесь для сравнения. Из (7) видно, что в рамках проводимого расчета закон Ома справедлив при гораздо больших полях, чем это следует из условия (5), а именно, пока справедливо неравенство

$$eEl / \epsilon_0 \ll 1. \quad (8)$$

Если под f_0 понимать функцию распределения Больцмана, то в формально вычисленном выражении (7) получается поправка вида $(eEl / kT)^2$ вместо $(eEl / \epsilon_0)^2$, т. е. отклонения от закона Ома действительно должны произойти при тех же полях, при которых нарушается условие $\mu f_1 \ll f_0$ (в предположении, что $\partial f_0 / \partial \epsilon \sim f_0 / kT$).

Могло бы казаться, что в статистике Ферми — Дирака осуществляется тот случай, когда для правильной оценки справедливости линейного закона следует сравнивать не учтенные члены ($\mu f_1 \ll f_0$), а учтенный и отброшенный члены ($\mu f_1 \ll \mu^3 f_3$). Но, как видно из (6), при той же оценке производной ($\partial f_0 / \partial \epsilon \sim f_0 / kT$) последнее требование опять сводится к неравенству $eEl / kT \ll 1$ и противоречит результату (7).

Ошибочность условия (5) связана в действительности с неправильной оценкой производной $\partial f_0 / \partial \epsilon$, входящей в кинетическое уравнение. Равенство $\partial f_0 / \partial \epsilon \sim f_0 / kT$ верно только в точке ϵ_0 , в то время как для оценки тока следует брать среднее значение $\bar{\partial f_0 / \partial \epsilon} \sim f_0 / \epsilon_0$. Эта ошибка не носит случайного характера, а является следствием часто встречающегося неверного представления о механизме прохождения тока в металлах. А именно, считается, что в проводимости принимают участие лишь те электроны, которые лежат вблизи спада фермиевской функции распределения ширины kT . На самом же деле в проводимости участвуют все n электронов. Это можно видеть хотя бы из выражения (4) для проводимости свободного электронного газа, которое совпадает с точностью до коэффициента порядка единицы с соответствующим выражением для проводимости, полученным в предположении, что все n электронов имеют энергию ϵ_0 [для этого следует положить $f_0 = n \delta(\epsilon - \epsilon_0)$]. В силу сказанного ясно, что надо полагать $\bar{\partial f_0 / \partial \epsilon} \sim f_0 / \epsilon$, что в согласии с точным расчетом и приводит к (8).

2. Учет передачи энергии при столкновении электронов с решеткой

До сих пор мы учитывали лишь рассеяние электронов, но пренебрегали изменением абсолютной величины импульса, т. е. не рассматривали процесса передачи энергии при столкновениях. Между тем замедленная передача энергии от электронов к решетке должна приводить к изменению под действием поля симметричной части функции распределения. При этом, как известно, для случая плазмы

и полупроводников [13, 14] учет подобного механизма приводит к отклонениям от закона Ома, наступающим раньше, чем этого можно было бы ожидать на основании неравенства (5). Именно, отклонение от закона Ома оказывается порядка единицы при условиях

$$\begin{aligned} \sqrt{M/m}(eEl/kT) &\sim 1 \text{ (в плазме),} \\ \sqrt{kT/mv_s^2}(eEl/kT) &\sim 1 \text{ (в полупроводниках).} \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь M и m — массы молекулы и электрона соответственно, а v_s — скорость звука; в обычных условиях $\sqrt{M/m}$ и $\sqrt{kT/mv_s^2}$ порядка $10 \div 100$.

Кинетическое уравнение для электронов в металле, в котором учтена передача энергии, получено в [12]. В стационарном случае для однородного проводника при отсутствии внешнего магнитного поля и градиента температуры кинетические уравнения (см. формулы (12) и (19) в [12]) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 S_E) &= 0, \\ eE \frac{\partial f_0}{\partial p} + \frac{v}{L} f_1 &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где S_E — ток в пространстве абсолютных значений импульсов под влиянием внешнего поля

$$S_E = \frac{eE}{3} f_1 + S = \frac{eE}{3} f_1 - \frac{p^2 v_s^2}{lkT} f_0 (1 - f_0) - \frac{mpv_s^2}{l} \frac{\partial f_0}{\partial p}.$$

Решение первого уравнения (10) есть $p^2 S_E = \text{const}$, и так как S_E при $p = 0$ не может обращаться в бесконечность, $S_E = 0$.

Исключая f_1 из (10), получим уравнение для f_0 . В пространстве энергии $\epsilon = p^2/2m$ оно имеет вид

$$\frac{e^2 E^2 L}{3} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} + \frac{2mv_s^2}{kT} \frac{\epsilon}{l} f_0 (1 - f_0) + 2mv_s^2 \frac{\epsilon}{l} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = 0. \quad (11)$$

Здесь $(1/L) = (1/l) + (1/l_0)$, l — длина свободного пробега при столкновении с фононами, l_0 — длина свободного пробега при столкновении с примесями.

Коэффициенты уравнения (11), умноженные на скорость, имеют следующий смысл. Коэффициент при первом члене (при $\partial f_0 / \partial \epsilon$) равен квадрату средней энергии, получаемой электронами в поле за единицу времени. Коэффициент при втором члене равен средней энергии, передаваемой электронами с энергией ϵ фононам за единицу времени $\Delta\epsilon/\tau$, без учета возможности обратной передачи. Коэффициент при третьем члене характеризует среднюю флуктуацию этой передаваемой энергии $\Delta\epsilon^2/\tau$ под влиянием обратного действия фононов. Он именно и обеспечивает в случае отсутствия поля температурный разброс электронов на границе спада фермьевского распределения.

Решение уравнения (11) следующее:

$$f_0 = [Ae^z + 1]^{-1}, \quad (12)$$

где

$$z = \int_{\alpha(\epsilon)}^{\epsilon} \frac{d\epsilon}{\alpha(\epsilon) + kT}, \quad \alpha(\epsilon) = \frac{1}{6} \frac{(eEL)^2}{\epsilon} \frac{l}{L} \frac{kT}{mv_s^2},$$

A — постоянная интегрирования, определяемая из условия нормировки. При $\alpha \ll kT$, f_0 переходит в фермиевское распределение с $A = e^{-\mu/kT}$.

Явный вид функции f_0 определяется зависимостью α (т. е. в конечном счете l) от ϵ , которую мы будем предполагать такой, чтобы при $T=0$ с исчезновением поля функция f_0 переходила в полностью вырожденную фермиевскую функцию с A , стремящейся к нулю. (В противном случае вырожденное состояние оказалось бы неустойчивым по отношению к малым флуктуациям электрического поля.) Для этого необходимо, чтобы длина свободного пробега не слишком сильно росла с энергией.

При слабой зависимости α от ϵ можно в выражении для z заменить α ее средним значением $\bar{\alpha} \sim \alpha(\epsilon_0) = \alpha_0$. Тогда $z = \epsilon / (\alpha_0 + kT)$, и учет влияния поля на f_0 сводится просто к замене температуры kT эффективной температурой электронов $k\Theta = \alpha_0 + kT$.

3. Электропроводность

Случай $\alpha/\epsilon \ll 1$

Для произвольной (с оговоркой, сделанной выше) зависимости α от ϵ из условия нормировки получаем в нулевом приближении по полю и температуре

$$f_0 = [e^{z-z_0} + 1]^{-1}, \quad (13)$$

где $z_0 = z(\epsilon_0)$.

Для выяснения влияния поля на проводимость вычисление надо проводить в следующем приближении:

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{e}{E} \int f_1 N v d\epsilon = -\frac{1}{3} e^2 \int \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} (L v N) d\epsilon.$$

Отсюда можно получить

$$\sigma = \sigma_0 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\psi[\epsilon(z)]} \frac{d^2 \psi[\epsilon(z)]}{dz^2} \right\}_{z=z_0}. \quad (14)$$

Здесь $\sigma_0 = e^2 n L / m v_0$ — проводимость при слабых полях, $\psi(\epsilon) = LvN$. Второй член, обязанный снятию полного вырождения под влиянием поля и температуры, порядка $[(\alpha + kT)/\epsilon_0]^2$.

Очевидно, что при $\alpha \ll kT$ влияние поля скажется заметным образом только на эффектах второго порядка. Поэтому отклонения от закона Ома, в отличие от (8) и в полной аналогии с (9), должны наступать при полях, удовлетворяющих условию:

$$\left(\frac{\alpha}{\epsilon} \right)_0 = \frac{1}{6} \frac{(eEL)^2}{\epsilon_0^2} \frac{l}{\mu} \frac{kT}{mv_s^2} \sim 1. \quad (15)$$

С понижением температуры в области идеального сопротивления ($L \sim l$) ток, при котором следует ожидать отклонений, растет. Но при низких температурах в области, где сопротивление в основном определяется примесями ($L \sim l_0$), сила этого тока быстро уменьшается с падением температуры, ибо при этом отношение l/l_0 растет, как $1/T^\kappa$.

Знак второго члена в выражении (14) для σ зависит от поведения $\psi(\epsilon) = LvN$ на границе распределения f_0 . Пусть в этой окрестности $L \sim \epsilon^{\lambda h}$ ($\lambda = 1$ при $L = l$ и $\lambda = 0$ при $L = l_0$), $N \sim \epsilon^m$. Тогда $\psi \sim \epsilon^{\lambda h+m+1/2}$, $\alpha \sim \epsilon^{h(1+\lambda)-1}$.

Учтя, что

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} = \alpha \frac{d}{d\epsilon} \left(\alpha \frac{d\psi}{d\epsilon} \right),$$

получим

$$\sigma = \sigma_0 [1 - K(\alpha / \varepsilon_0^2)], \quad K = -\frac{\pi^2}{6} (\lambda k + m + \frac{1}{2}) ((2\lambda + 1)k + m - \frac{3}{2}). \quad (16)$$

Для свободного электронного газа ($m = \frac{1}{2}$) условия роста сопротивления ($K > 0$) в области идеального сопротивления ($\lambda = 1$) таковы: $-1 < k < \frac{1}{3}$; в области остаточного сопротивления ($\lambda = 0$) аналогичное условие имеет вид $k < 1$. Этот результат вполне понятен. Так, например, во втором случае отношение передаваемой электронами решетке энергии [коэффициент при втором члене в уравнении (11)] к полученной от поля (коэффициент при первом члене) $\sim \varepsilon^{1-k}$. Так как средняя энергия электронов в поле растет, то при $k < 1$ меняются условия перераспределения энергии, получаемой электронами в поле и идущей на нагревание решетки и на перенос: а именно, часть энергии, идущая на нагревание решетки, увеличивается. Это обстоятельство и приводит к росту сопротивления.

Остановимся на количественной оценке выражений (14) — (16). При малых отклонениях от закона Ома в выражении для α можно положить $E = I / \sigma_0$. Кроме того, учтем, что $I / L = R / R_t$, где полное сопротивление $R = R_t + R_c$ складывается из идеального и остаточного сопротивлений. Тогда получим

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R - R_0}{R_0} = \frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} = \left(\frac{1}{6} \frac{e^2 I^2}{(\sigma_0 / L)^2 \varepsilon_0^2} \frac{kT}{mv_s^2} \frac{R}{R_t} \right)^2 K. \quad (17)$$

Границная энергия ε_0 , эффективная масса m и величина K не определяются прямыми опытами (σ_0 / L может быть измерено [8]). Относительно величины K можно сделать некоторые заключения из гальванических эффектов. Для большинства металлов $K \sim 1$. Даже в тех случаях, когда для согласия теории гальванических явлений с экспериментом приходится приписывать K аномально большие значения, это не может сильно сказаться на величине тока, при котором $\Delta R / R \sim 1$, так как $I \sim K^{\frac{1}{4}}$. Характерные величины для типичных металлов: $\sigma_0 / L \sim 10^{22} \div 10^{23}$, $v_s \sim 10^5$, $\varepsilon_0 \sim 10^{-12}$ (в абсолютных единицах), $m \sim m_0$ (m_0 — электронная масса). В этом случае при обычных температурах $\Delta R / R \sim (5 \cdot 10^{-19} I^2 R / R_t)^2$, где I измеряется в A/cm^2 , т. е. $\Delta R / R \sim 1$ при токах $I \sim (R_t / R)^{\frac{1}{2}} (10^9 \div 10^{10}) A/cm^2$. Это значение не отвечает экспериментальным данным работы [8], где существенные отклонения у типичных металлов наблюдались уже при токах $I \sim 10^6 A/cm^2$. Несколько меньшие значения $\sigma_0 / L^{\frac{1}{2}}$ и аномальное значение эффективной массы ($m / m_0 \sim 10^{-1} \div 10^{-2}$), встречающиеся у ряда металлов [16], не могут значительно снизить величину тока, при которой наступают отклонения.

Эти оценки проведены для однозонной изотропной модели металлов и, строго говоря, не справедливы для сложных анизотропных металлов с перекрывающимися полосами энергии. Данная оговорка особенно существенна для висмута. Кроме того, висмут по своим свойствам почти полупроводник: он имеет малое число свободных электронов, низкую температуру вырождения ($T_0 \sim 70 \div 140^\circ K$) [16, 17]; при более высоких температурах число электронов меняется за счет перехода из нижней полосы.

Несмотря на это, все же можно провести грубую оценку силы тока, при которой следует ожидать отклонений от закона Ома у висмута. При температурах ниже температуры вырождения число электронов можно считать постоянным. Тогда, учитя, что у висмута $\varepsilon_0 = kT_0 \sim 10^{-14}$, получим для свободного электронного газа:

$$\frac{\sigma_0}{L} = \frac{e^2 n}{mv_0} = \frac{e^2}{3\pi^2} \frac{2m\varepsilon_0}{\hbar^3} \sim 10^{20}.$$

¹ См. [8] и цитированную там литературу.

При малом остаточном сопротивлении ($R_t/R \sim 1$) из (17) следует, что $\Delta R/R \sim 1$ при токах $I \sim 10^5 \div 10^6$ А/см². Это значение согласуется с экспериментальными данными [9]².

Случай $\alpha/\varepsilon \gg 1$

До сих пор мы рассматривали случай $\alpha/\varepsilon \ll 1$, что соответствует неполному вырождению по α (как уже указывалось, при α , не зависящем от энергии, роль этого параметра сводится как бы к «добавочной температуре»). В промежуточном случае ($\alpha \sim \varepsilon$ — эффективная температура электронов порядка температуры вырождения) вычисления в общем виде провести нельзя. При $\alpha \gg \varepsilon$ электроны будут покидать металл, так как энергия электронов в этом случае больше работы выхода, которая для большинства металлов $\sim \varepsilon_0$. Отвлекаясь от этого эффекта, рассмотрим случай $\alpha \gg \varepsilon$ с целью получить указания о характере роста сопротивления в промежуточной области.

При $\alpha \gg \varepsilon_0$ вырождение полностью снимается, и мы переходим в область Больцмановской статистики. Тогда в формуле (12) $A \gg 1$ и $f_0 \approx A^{-1}e^{-z}$. Выполнимость этого условия можно проверить из нормировки. Пусть $l = \text{const}$. Тогда $z = -\varepsilon^2/2\alpha_1$, где $\alpha_1 = \varepsilon\alpha(\varepsilon) = \text{const}$.

Полное число электронов $n = \int_0^\infty f_0 N d\varepsilon$, $N = \frac{(2m)^{1/2} m \varepsilon^{1/2}}{\pi^2 \hbar^3}$.

Для A получаем

$$A \sim \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} \right)_0^{1/4} \frac{(m\varepsilon_0)^{3/4}}{n \hbar^3} \sim \left(\frac{\alpha}{\varepsilon_0} \right)^{1/4} \gg 1.$$

Вычисляя ток, находим,

$$I = \frac{1}{3} en \frac{\int_0^\infty f_1 v \varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{\int_0^\infty f_0 \varepsilon^{1/2} d\varepsilon} \sim ne \frac{V e E L}{[(m k T / v_s^2) (l / L)]^{1/4}} = a V E. \quad (18)$$

Выражение для сопротивления имеет вид:

$$R = \frac{E}{I} = \frac{V E}{a} = \frac{I}{a^2}. \quad (19)$$

Если положить $L = l$, то (18) совпадает формально с выражением для тока в полупроводнике при больших полях [13, 14]. При очень низких температурах³ $L = l_0$, и так как $l \sim \frac{1}{T^6}$, то $a \sim T$.

² Примечание при корректуре. Учет передачи энергии от электронов и решетки во внешнюю среду во многих случаях может менять вид формулы для сопротивления в сильных полях. Однако для импульсного режима, при котором проводились эксперименты [8, 9], формула (17) справедлива.

³ Учет кулоновского взаимодействия электронов, которое становится существенным в вопросе проводимости при низких температурах, приводит к дополнительному сопротивлению $R_t \sim \frac{1}{l} + \frac{1}{l_1} \sim \alpha T^5 + \beta T^2$ [18]. Легко видеть, что подобный учет не изменит наш результат, так как это добавочное сопротивление следует отнести к величине $\frac{1}{L} = \frac{1}{l_0} + \frac{1}{l} + \frac{1}{l_1}$, все равно стремящейся к $\frac{1}{l_0}$ при $T \rightarrow 0$, если остаточное сопротивление конечно. Величину l следует оставить без изменения. Что касается влияния кулоновского взаимодействия на вид симметричной части функции распределения f_0 , то оно в некоторой степени равносильно влиянию на f_0 зависимости l от ε , о которой мы все равно мало знаем.

Таким образом при стремлении температуры к нулю R безгранично растет. Результат этот вполне понятен. Отклонение от закона Ома есть следствие замедленной по сравнению с процессом рассеяния передачи энергии электронами фононам. При низких же температурах передача энергии еще более затрудняется, так как падает число фононов (это неявно учтено в выражении для I), в то время как процесс рассеяния не уменьшается из-за присутствия неоднородностей (I_0 не меняется с температурой).

По крайней мере, по внешнему виду с этим эффектом очень сходны экспериментально наблюдаемые минимум и дальнейший рост сопротивления в области ниже 1°K главным образом у золота и у некоторых других несверхпроводящих металлов [2]. Обнаруживаемая на опыте зависимость положения минимума от остаточного сопротивления образца [2, 4, 5] качественно согласуется с формулами (17) — (19); поскольку $1/\alpha^2 \sim R_0^{3/2}$, минимум смещается в область более высоких температур с увеличением остаточного сопротивления.

Если в согласии с [6] положить $R_c/R_{273} \sim 10^{-2}$, $I \sim 60 \text{ A/cm}^2$, то оценка по формуле (17)⁴ дает, что $\Delta R/R \sim 1$ в области $T \sim 10^{-2}^{\circ}\text{K}$.

Температурная зависимость роста сопротивления, полученная нами в предельном случае очень низких температур $\alpha \gg \varepsilon_0$ (в промежуточном случае $\alpha \ll \varepsilon_0$ она, очевидно, слабее), также близка к реальной⁵.

Однако зависимость R от силы тока экспериментально, повидимому, не наблюдается⁶.

Хотя в этом направлении специально и не проводились эксперименты, трудно думать, чтобы такая ощущимая зависимость от тока, на какую указывают формулы (17) — (19), не была обнаружена. Здесь, однако, нужно иметь в виду следующее обстоятельство.

В используемой нами системе уравнений распределение фононов принималось заданным равновесным. Это приводит к тому, что при больших токах эффективная температура электронов в поле может быть много выше температуры решетки. Такое предположение при низких температурах, повидимому, не справедливо. При низких температурах может измениться закон передачи энергии от электронов к решетке за счет отклонения фононной функции распределения от равновесной, что приведет, вероятно, к более медленному росту средней энергии электронов с полем, предотвратив их возможную эмиссию при сверхнизких температурах, и к более слабой зависимости роста сопротивления от тока. Этот вопрос является объектом дальнейшего исследования.

В заключение приношу глубокую благодарность проф. В. Л. Гинзбургу за обсуждение настоящей работы.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16 января 1954 г.

⁴ Идеальное сопротивление R_t , входящее в (17), можно вычислить, используя соотношение между проводимостями при высокой ($T \gg \Theta$) и низкой ($T \ll \Theta$) температурах [19].

⁵ В работе [6] обнаруживается логарифмический рост сопротивления, что находится в противоречии с попыткой объяснить это явление перестройкой решетки [7], приводящей к экспоненциальному росту.

⁶ Примечание при корректуре. В настоящее время нами показано на основании развитой в [12] теории, что рост сопротивления при низких температурах может наступать вследствие появления локальных эффектов Томсона и Пельтье на неоднородностях проводника. При этом оказывается, что рост сопротивления наступает раньше и не зависит от тока.

Литература

- [1] В. Л. Гинзбург. Сверхпроводимость, Изд-во АН СССР, 1946.—
[2] E. Mendoza a. J. G. Thomas. Phil. Mag., 42, 291, 1951.—[3] В. Л. Гинзбург. Усп. физ. наук, 48, 25, 1952; 42, 169, 333, 1950.—[4] W. I. de Haas. G. J. van der Berg. Phisica, 4, 683, 1937.—[5] W. I. de Haas, J. de Boer a. G. J. van der Berg. Phisica, 1, 1115, 1934.—[6] A. J. Croft, E. A. Gaulekner, J. Hatton a. E. F. W. Seymour. Phil. Mag., 44, 289, 1953.—[7] J. C. Slater. Phys. Rev., 84, 179, 1951.—[8] А. А. Игнатьева и С. Г. Калашников. ЖЭТФ, 22, 385, 1952.—[9] Е. С. Боровик. ДАН СССР, 91, 771, 1953.—[10] Р. Пайерлс. Электронная теория металлов, ИИЛ, Москва, 1947.—[11] Л. Нордгейм. Усп. физ. наук, 15, 779, 1935.—[12] В. П. Шабанский. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 142.—
[13] Б. И. Давыдов. ЖЭТФ, 6, 471, 1936; 7, 1069, 1937.—[14] Л. Ландау и А. Компанеец. ЖЭТФ, 5, 276, 1935.—[15] D. Shoenberg. Phil. Trans. Roy. Soc., 245, 1, 1952.—[16] Б. Давыдов и И. Померанчук. ЖЭТФ, 9, 1294, 1939.—[17] D. Shoenberg. Proc. Roy. Soc., A 170, 341, 1939.—[18] Л. Ландау и И. Померанчук. ЖЭТФ, 7, 379, 1937.—[19] Алан Вильсон. Квантовая теория металлов, Гостехиздат, 1941.

ТЕРМИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ F-ЦЕНТРОВ В КРИСТАЛЛАХ ГАЛОИДНОГО СЕРЕБРА

П. В. Мейклар и Р. С. Шиманский

Измерено приращение оптической плотности кристаллов бромистого серебра при их нагревании. Вычислена концентрация F-центров, термически образующихся в кристаллах, и энергия активации этого процесса.

Одним из авторов настоящей статьи совместно с Пуцейко было обнаружено [1], что при нагревании кристаллов галоидного серебра спектр поглощения последних изменяется. На длинноволновом краю полосы собственного поглощения кристалла возникает новая узкая полоса поглощения, интенсивность которой увеличивается с температурой. В цитируемой работе было сделано предположение о том, что обнаруженная полоса поглощения принадлежит F-центрам, аналогичным этим же центрам, ранее найденным в галогенидах щелочных металлов.

Кравец уже давно [2] указывал на то, что образование крупных частиц металлического серебра в галогенидах серебра под действием света должно проходить через «атомарную стадию». Позднее Топорец [3] пришел к заключению, что «атомарные» центры могут образовываться в галогенидах серебра термически. Однако первое экспериментальное доказательство наличия такого процесса содержалось лишь в работе [1].

В настоящей работе произведено подробное исследование процесса термического образования F-центров в галогенидах серебра, и приводятся дополнительные доказательства правильности принятой модели F-центра по де-Буру.

Методика эксперимента

Кристаллы бромистого серебра изготавливались путем сливания растворов азотнокислого серебра и бромистого калия, взятых в эквивалентном соотношении. Полученный осадок промывался, прокаливался и плавился. Расплавленная соль затягивалась капиллярными силами в промежуток между двумя стеклянными пластинками и затем после затвердевания отжигалась. Измерения спектра поглощения производились на монохроматоре УМ-2 при помощи сурьяно-цеизевого фотоэлемента и усилителя постоянного тока, специально собранного для этой цели. Усилитель работал по мостовой схеме с электрометрическим тетродом. Измерения производились дифференциальным методом, т. е. по сравнению с кристаллом, поддерживаемым при комнатной температуре. Нагреваемый кристалл помещался в печку, причем его температура контролировалась при помощи термопары. Температура кристалла менялась от комнатной до 408°C, т. е. почти до температуры плавления. Параллельно измерялась темновая проводимость кристаллов. Для этого был собран мост Уитстона с зеркальным гальванометром, причем сопротивление кристалла сравнивалось с известным высокоменным сопротивлением того же

порядка. Сопротивление некоторых кристаллов определялось по прямому отбросу гальванометра, чувствительность которого была заранее измерена.

Результаты опытов

Опыты были произведены с несколькими кристаллами различной толщины. На рис. 1 нанесены кривые зависимости приращения оптической плотности кристалла, при его нагревании, начиная с комнатной температуры, от длины волны для различных температур. По площади под каждой из кривых можно определить приращение концентрации F-центров при нагревании кристалла от комнатной температуры до данной. Мы пользовались дисперсионной формулой, впервые полученной Кравцом [4] и примененной им для растворов красителей. Сила осциллятора принималась равной единице, как это имеет место для F-центров в кристаллах галогенидов щелочных металлов [5]. Величины ΔN_F для различных образцов приведены в табл. 1. Нанося зависимость ΔN_F от температуры, получаем кривую, изображенную на рис. 2. Производная в каждой точке этой кривой равна dN/dT .

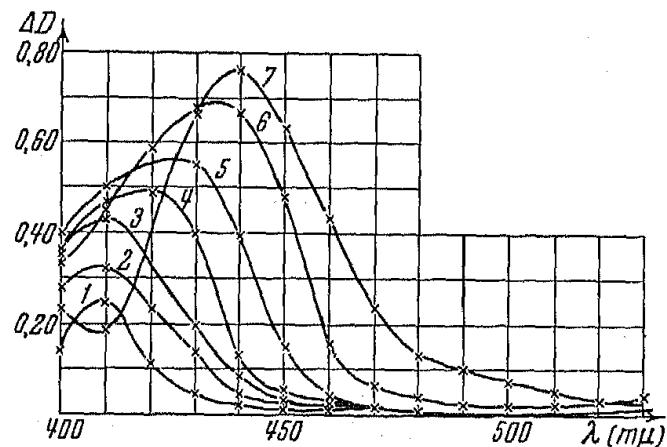


Рис. 1. Кривые зависимости приращения оптической плотности кристалла от длины волны для различных температур: 1—90, 2—120, 3—180, 4—240, 5—290, 6—350, 7—480°C

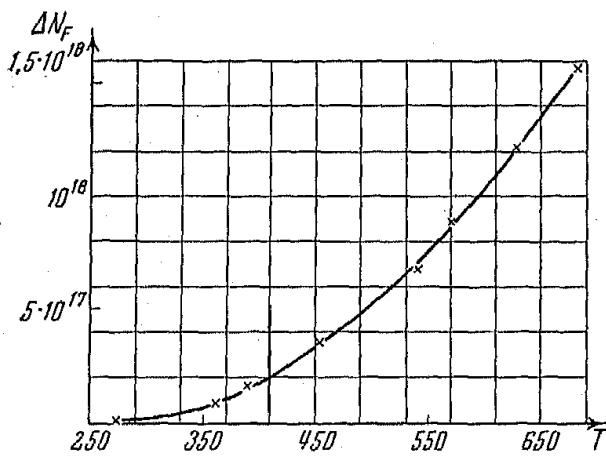


Рис. 2. Зависимость приращения концентрации F-центров от температуры $\Delta N_F = N - N_{20}$

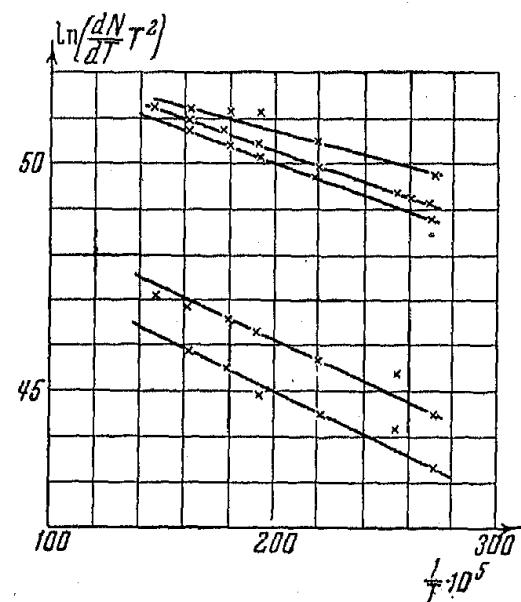


Рис. 3. Зависимость $\ln \left(\frac{dN}{dT} T^2 \right)$ от $\frac{1}{T}$

Считая, что концентрация F-центров зависит от температуры по закону $N = N_0 e^{-W/kT}$, где W — энергия активации для образования F-центра, получаем, что

$$\frac{dN}{dT} T^2 = \frac{N_0 W}{k} e^{-W/kT}.$$

Таблица 1

Толщина в мм	Удельная проводимость σ в $\Omega^{-1} \text{ см}^{-1}$	ΔN_F				Энергия активации W в eV
		90° C	120° C	180° C	240° C	
0,016	—	76·10 ¹⁸	136·10 ¹⁶	162·10 ¹⁶	280·10 ¹⁶	536·10 ¹⁶
0,026	14·10 ⁻⁷	55·10 ¹⁸	191·10 ¹⁶	349·10 ¹⁶	505·10 ¹⁶	660·10 ¹⁶
0,028	23·10 ⁻⁷	—	—	194·10 ¹⁶	364·10 ¹⁶	—
0,020	44·10 ⁻⁷	190·10 ¹⁸	220·10 ¹⁶	340·10 ¹⁶	650·10 ¹⁶	1020·10 ¹⁶
0,17	23·10 ⁻⁸	129·10 ¹⁵	308·10 ¹⁵	334·10 ¹⁵	—	364·10 ¹⁵
0,61	48·10 ⁻⁸	64·10 ¹⁴	170·10 ¹⁴	360·10 ¹⁴	650·10 ¹⁴	1220·10 ¹⁴
0,30	11·10 ⁻⁸	60·10 ¹⁵	70·10 ¹⁵	71·10 ¹⁵	120·10 ¹⁵	200·10 ¹⁵
				(при 150° C)		

Поэтому зависимость $\ln\left(\frac{dN}{dT} T^2\right)$ от $1/T$ должна быть линейной с тангенсом угла наклона W/k . На рис. 3 нанесены эти зависимости для нескольких кристаллов. Определенные таким образом значения энергии активации содержатся в табл. 1.

Произведенные параллельно измерения удельной проводимости σ кристаллов при комнатной температуре показали, что имеется связь между процессом термического образования F -центров и ионной проводимостью. Из табл. 1 видно, что с увеличением σ увеличивается и ΔN_F в данном интервале температур, причем имеется линейная связь между ΔN_F и $\lg \sigma$. Этот вывод следует из рис. 4.

Из рассмотрения табл. 1 также следует, что с увеличением толщины кристалла его удельная проводимость уменьшается. Это значит, что проводимость кристалла в значительной степени определяется перемещением ионов по поверхности, что находится в согласии с результатами других авторов [6].

Из работ Кириллова [7] и его сотрудников известно, что в спектре поглощения слабо засвеченного кристалла галоидного серебра появляется целый ряд мелких полос поглощения, положение которых не зависит от природы галогенида. Те же полосы поглощения наблюдаются и у кристаллов, на поверхность которых напылен тонкий слой серебра [8], а также в случае напыления серебра на кварцевую подложку [9]. Очевидно, что центры, вызывающие такое поглощение, образуются на поверхности кристалла. Мы наблюдали появление этих же полос поглощения при нагревании кристалла и обнаружили, что, в то время как изменение полосы поглощения F -центров с повышением температуры весьма характерно, а именно происходит увеличение ее интенсивности с постепенным смещением максимума в сторону более длинных волн, для полос, обнаруженных Кирилловым, наблюдается лишь перераспределение их по интенсивности. Это иллюстрирует рис. 5, где нанесены кривые поглощения F -центров и кривые «тонкой структуры» при различных температурах, как мало отличающихся от

комнатной, так и высоких. При значительном увеличении температуры наблюдается дальнейший рост интенсивности полосы поглощения F-центров с постепенным исчезновением полос «тонкой структуры».

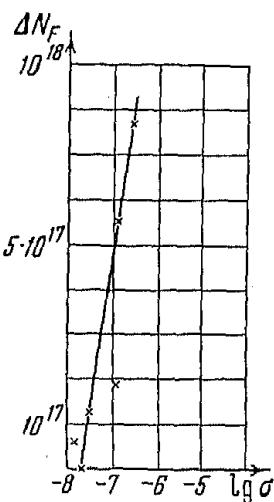


Рис. 4

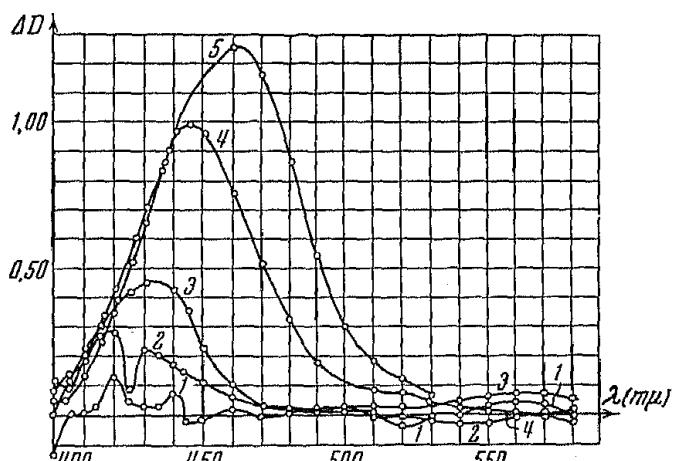


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость приращения концентрации F-центров от логарифма удельной проводимости кристаллов для различных кристаллов

Рис. 5. Кривые зависимости приращения оптической плотности кристалла от длины волны для различных температур: 1—30, 2—60, 3—120, 4—240, 5—350 °C

Обсуждение результатов

То обстоятельство, что нагревание кристалла различно влияет на полосу поглощения F-центров и полосы тонкой структуры, лишний раз указывает на различие в их природе. Из обстоятельных работ Кириллова и его сотрудников с очевидностью следует, что центры тонкой структуры расположены на поверхности и слабо связаны с решеткой. Что касается F-центров, то следует считать, что при нагревании кристалла они образуются в его глубине, и положение полосы поглощения этих центров определяется параметрами кристаллической решетки. Так, например, здесь выполняется известное для галогенидов щелочных металлов правило Мольво, согласно которому $\nu_{\max} d^2 = \text{const}$, где ν_{\max} — частота, соответствующая максимуму полосы поглощения, а d — постоянная решетки. В последнее время было найдено [10], что лучшее соответствие с опытными данными получается, если считать $\nu_{\max} d^{1.84} = \text{const}$.

Конечно, постоянная в формуле Мольво имеет различное значение для различных типов кристаллов: в кристаллах с более сильной связью эта постоянная должна быть больше [11]. Поэтому ошибочным было предположение Топорца [12], что можно значением этой постоянной, найденным для галогенидов щелочных металлов, пользоваться при определении полосы F-центров для галогенидов серебра. Тем более произвольной была произведенная этим автором замена расстояния между соседними ионами в формуле Мольво суммой ионных радиусов. Для галогенидов серебра формула Мольво выполняется для всех температур, и смещение максимума полосы поглощения F-центров в сторону длинных волн объясняется просто увеличением постоянной решетки вследствие теплового расширения кристалла. Так, постоянная решетки бромистого серебра при температуре 20°C составляет 5,77 Å, а при 410°C 5,91 Å [13]. По нашим данным ν_{\max} равно соответственно $0,715 \cdot 10^{15}$ сек⁻¹ ($\lambda_{\max} = 420$ мкм) и $0,652 \cdot 10^{15}$ сек⁻¹,

($\lambda_{\max} = 460 \text{ мкм}$). Произведение $\nu_{\max} d^2$ равно в первом случае 2,38, а во втором 2,28 вместо 2,0 для галогенидов щелочных металлов, т. е. формула Мольво выполняется с точностью до 5%.

Несколько точнее выполняется соотношение $\nu_{\max} d^{1.84} = C$. Точно так же выполняется соотношение Мольво и для хлористого серебра. Здесь при 20°C $\nu_{\max} = 0,78 \cdot 10^{15}$, $d^2 = 30,7 \cdot 10^{-16}$, и их произведение равно 2,39. Ряд авторов пытался, с одной стороны, получить формулу Мольво теоретически [14] и, с другой стороны, вычислить ν_{\max} [15, 16]. Формулу Мольво можно получить, например, из следующих простых соображений. Длина волны де-Бройля для электрона внутри вакантного узла галоида (принимая модель F -центра по де-Бурю) составляет для нижнего уровня $2d$ и для первого возбужденного состояния d , где d — постоянная решетки. Отсюда энергия $E = h^2/2m\lambda^2$ составляет для нижнего состояния $E_1 = h^2/8md^2$ и для первого возбужденного состояния $E_2 = h^2/2md^2$. Приравнивая разность энергий энергии поглощаемого кванта, получаем $\nu_{\max} d^2 = 3h/8m$, или $\nu_{\max} d^2 = 2,73$. На опыте $\nu_{\max} d^2 = 2,0$ для галогенидов щелочных металлов и $\approx 2,4$ для галогенидов серебра, т. е. соответствие можно считать хорошим. Детальный квантово-механический расчет уровней энергии электрона в F -центре, проведенный в работах [15] и [16], не привел к хорошему соответствию между теоретическими и опытными данными. Мы вернемся к этому вопросу в другой статье.

Сам факт, что постоянная в формуле Мольво для галогенидов серебра оказывается на опыте больше, чем для галогенидов щелочных металлов, может быть объяснен более сильной связью в первых кристаллах, что находится в согласии с выводами Дейгена [11].

Выполнение формулы Мольво для F -центров в кристаллах галоидного серебра при различных температурах с постоянной, мало отличающейся от теоретической в предположении справедливости модели де-Бура, и связь между удельной ионной проводимостью и концентрацией F -центров (рис. 4) говорят в пользу правильности принятой нами ранее гипотезы [1] о природе дополнительного поглощения кристаллов, вызываемого нагреванием. Дополнительные доказательства содержатся в работе [17], где показано, что эти же полосы поглощения могут возникнуть в кристалле при совместном напылении галоидного серебра и металла, вне зависимости от природы последнего, что указывает на электронную природу центров.

Автор работы [15], рассчитывая электронные уровни для междоузельного иона серебра в AgHal , приходит к выводу о том, что при закреплении электрона у такого иона с образованием междоузельного атома серебра потенциал ионизации атома составляет 0,34 eV для AgBr и 0,44 eV для AgCl . Можно было бы поэтому предположить, что при нагревании кристалла происходит ионизация междоузельных атомов серебра и дополнительное поглощение определяется междоузельными ионами серебра. Однако такое предположение неправильно, ибо, как было показано Мейкларом [18] и Кайзером [17], такие полосы поглощения возникают при введении в кристалл различных примесей, и, следовательно, центры, вызывающие поглощение, имеют электронную природу. Следует еще рассмотреть причину столь низкой энергии активации для образования F -центров в галогенидах серебра (см. табл. 1).

Известно [19], что для превращения моля бромистого серебра в металлическое серебро и атомарный бром требуется совершить работу в 48 ккал, что соответствует энергии в 2,08 eV на каждый элементарный акт. Соответствующая работа для NaBr значительно больше и составляет 131 ккал/моль или 5,7 eV. Для образования F -центров нужно совершить меньшую работу. Действительно, электронные уровни металлического серебра расположены ниже полосы проводи-

ности кристалла приблизительно на 1 eV (судя по длинноволновому краю спектральной полосы внутреннего фотоэффекта с коллоидных частиц серебра в кристалле [20]), а уровни *F*-центров расположены на 2,88 eV ниже полосы проводимости ($\lambda_{\max} = 430 \text{ м}\mu$). Таким образом уровни *F*-центров расположены на 1,9 eV ниже уровней металлического серебра. Это значит, что для образования *F*-центров в решетке галоидного серебра требуется совершить работу, на 1,9 eV меньшую, чем для образования металлического серебра, т. е. эта работа равна приблизительно 0,2 eV, что находится в хорошем согласии с данными табл. 1. Аналогичный расчет для NaBr показывает, что здесь энергия активации для образования *F*-центров равна 4,4 eV, вследствие чего вероятность их термического образования ничтожна.

Молотовский педагогический
институт

Поступила в редакцию
18 ноября 1953 г.

Литература

- [1] П. В. Мейклар и Е. К. Пуцейко. ДАН СССР, 73, 63, 1950.—
- [2] Т. П. Кравец. Стенографический отчет юбилейного заседания, посвященного 10-летию Государственного оптического института, 1928.— [3] А. С. Топорец. Диссертация, Ленинград, ГОИ, 1938.— [4] Т. П. Кравец. Абсорбция света в растворах окрашенных веществ, Изв. Моск. инженерн. уч-ща, 1912.— [5] A. Scott a. T. Smith. Phys. Rev., 83, 982, 1951.— [6] J. Shapiro a. J. Kolthoff. Journ. Chem. Phys., 15, 41, 1947.— [7] Е. А. Кириллов. Успехи научной фотографии, Изд-во АН СССР, 1, 1951, стр. 183.— [8] М. Е. Фонкич. Сб. физико-математического факультета и НИИ Одесского университета, 3, 33, 1951.— [9] А. Г. Гуменюк. ДАН СССР, 91, 783, 1953.— [10] H. Ivey. Phys. Rev., 72, 341, 1947.— [11] М. Ф. Дейген. ЖЭТФ, 22, 126, 1952.— [12] А. С. Топорец. ДАН СССР, 4, 25, 1935.— [13] C. R. Berry. Phys. Rev., 82, 422, 1951.— [14] H. Fröhlich. ZS. f. Phys., 80, 819, 1938.— [15] J. H. Simpson. Proc. Roy. Soc., 197, 269, 1949.— [16] L. Pincherle. Proc. Phys. Soc., 64, 648, 1951.— [17] W. Kaiser. ZS. f. Phys., 132, 497, 1952.— [18] П. В. Мейклар. ДАН СССР, 77, 391, 1951.— [19] W. Meisinger. Fortschr. Photogr., 3, 1, 1944 (см. Сб. «Химия фотографических процессов», М., ИИЛ, 1951).— [20] Е. К. Пуцейко и П. В. Мейклар. ЖЭТФ, 21, 341, 1951.

ДИФФРАКЦИЯ И НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ

А. Я. Вятский

Явление дифракции, а также явление неупрогое рассеяния электронов средних скоростей (10^2 — $2 \cdot 10^3$ eV) в металлах, обусловленное кулоновским взаимодействием дифрагирующих электронов с электронами решетки, рассматриваются, как две взаимно связанные стороны единого процесса прохождения электронов через решетку металла. Установлено наличие сильного влияния дифракции на неупругое рассеяние электронов и неупругого рассеяния на дифракцию электронов.

Введение

Ранее [1] была рассмотрена задача о неупрогое рассеянии электронов средних скоростей (10^2 — $2 \cdot 10^3$ eV), описываемых модулированными с периодом решетки волновыми функциями, вызванном их кулоновским взаимодействием с электронами решетки. Решение этой задачи привело к следующему выводу. При рассеянии, обусловленном междузонными переходами¹, возможно резонансное неупругое рассеяние. Если энергия проходящего через металл электрона равна граничной энергии зоны или близка к ней, т. е. при условии электронной дифракции (закон Вульфа — Брэгга):

$$K^2 = (\pi j / a)^2, \quad (1)$$

где K — волновое число электрона, j — целое число, a — постоянная решетки, — электрон должен испытывать резонансное неупругое рассеяние. При этом средний коэффициент затухания $\bar{\gamma}$, имеющий вид

$$\bar{\gamma} = C k_0^3 K^2 \sum_{n, n', v, v'} \frac{|\alpha_n \alpha_{n'}^* A_v A_{v'}^*|^2}{(2\pi s/a)^4 [K + (\pi/a)(v - v')]} , \quad (2)$$

стремится к бесконечности, а средний пробег рассеяния $\bar{\lambda}$, определяемый выражением

$$\bar{\lambda} = \frac{\hbar K}{2m\bar{\gamma}} = \frac{D}{k_0^3 K} \left\{ \sum_{n, n', v, v'} \frac{|\alpha_n \alpha_{n'}^* A_v A_{v'}^*|^2}{(2\pi s/a)^4 [K + (\pi/a)(v - v')]} \right\}^{-1} , \quad (2a)$$

стремится к нулю.

В выражениях (2) и (2a) C и D — постоянные [1]; $\epsilon_0 = (\hbar^2/2m) k_0^2$ — предельная энергия Ферми; $s = n - n' + \frac{v - v'}{2} = n - n' + \frac{j}{2}$ (n, n', v, v' — целые числа).

Вывод о резонансном рассеянии возникает в результате расчета матричного элемента при междузонных переходах (внутризонные переходы приводят к неупрому рассеянию обычного вида), и потому этот вывод имеет общий характер и не должен зависеть от конкретных особенностей метода решения задачи.

¹ Теория потерь, вызванных междузонными переходами, рассмотрена ранее [2].

Следует заметить, что подобное резонансное неупругое рассеяние должно иметь место не только при выполнении условия (1), но также при одновременном выполнении закона импульсов²

$$\mathbf{k} + (2\pi \mathbf{s}/a) + \mathbf{q} - \mathbf{k}' = 0, \quad (3)$$

являющемся условием неравенства нулю матричного элемента (здесь \mathbf{k} и \mathbf{k}' — волновые векторы электрона решетки до и после столкновения; $\hbar\mathbf{q} = \hbar(\mathbf{K} - \mathbf{K}')$ — отдаваемый электроном импульс).

Необходимость одновременного выполнения (1) и (3), естественно, ограничивает область целочисленных значений j , при которых возможно возникновение резонансного рассеяния. Поскольку условие резонансного рассеяния (1) точно совпадает с условием электронной дифракции (т. е. условием резонансного упругого рассеяния), можно заключить, как это было сделано ранее в [1], о тесной связи этих явлений. Оба явления как дифракции, так и неупрого кулоновского рассеяния электрона повышенной скорости, проникшего в металл, зависят в конечном счете от влияния периодического поля решетки: дифракция — непосредственно, а неупругое рассеяние — косвенно, через взаимодействие рассеиваемого электрона с электроном металла, движущимся в периодическом поле решетки. Поэтому естественно рассматривать неупругое рассеяние и электронную дифракцию как две взаимосвязанные стороны единого процесса прохождения электронов через решетку металла. Решение этой задачи и представляет содержание данной статьи.

Вывод о резонансном неупругом рассеянии в теории [1] тесно связан с описанием электрона, рассеиваемого благодаря кулоновскому взаимодействию с электроном решетки, обычной модулированной с периодом решетки волновой функцией. Такой электрон при выполнении условия (1) испытывает также дифракцию от одной из атомных плоскостей. Однако подобное описание электрона является идеализированным: в действительности электрон проникает в запретную область. Это проникновение различно для разных запретных областей и для разных металлов. В реальных условиях для некоторых металлов электрон должен описываться модулированной, экспоненциально затухающей волновой функцией³.

В разделе 1 мы рассмотрим неупругое рассеяние электрона, описанного подобной функцией. При этом выяснится влияние затухания модулированной волновой функции (дифракция в реальных условиях) на неупругое рассеяние электрона и, в частности, на резонансное неупругое рассеяние. Вместе с этим будет рассмотрено влияние неупрого рассеяния на дифракцию.

В разделе 2 рассматривается задача дифракции электронов с учетом одновременного их неупрого рассеяния, обусловленного кулоновским взаимодействием диффрагирующих электронов с электронами решетки.

Будет показано, что это взаимодействие определяет различную высоту (и ширину) дифракционных максимумов.

Следует заметить, что Лашкарев [3] первый высказал предположение о зависимости высоты дифракционных максимумов от поглощения диффрагирующих электронов, однако без конкретизации механизма поглощения. Позднее, при решении задачи электронной дифракции в [4] был формально введен мнимый потенциал и пока-

² Ср. (10) в [1].

³ Подобные волновые функции используются в задачах о дифракции электронов.

зано, что в зависимости от условной величины этого потенциала коэффициент отражения для диффрагирующих электронов может принимать различные значения. Поскольку, однако, мнимый потенциал лишен конкретного физического содержания, подобный метод имеет характер формальной операции.

Френкель и Рыжанов [5] при рассмотрении задачи электронной дифракции решали релятивистское уравнение Шредингера, взяв в качестве основной координаты направление затухания электронного пучка. Допустив, что поглощение дифракционных электронов обусловлено их взаимодействием с тепловыми колебаниями решетки, авторы пришли к выводу, что данный механизм рассеяния приводит к некоторому расширению дифракционных максимумов. Вопрос о снижении дифракционных максимумов вследствие принятого механизма поглощения в этой работе не рассмотрен⁴. Однако трудно представить себе, что взаимодействие электронов с колебаниями решетки может играть решающую роль в их поглощении, являющемся, согласно опытным данным, весьма сильным: коэффициент отражения в некоторых случаях достигает значения в 1%. Более естественно предположение, сделанное в настоящей работе, что кулоновское взаимодействие диффрагирующих электронов с электронами решетки, в основном, ответственно за поглощение диффрагирующих электронов и снижение дифракционных максимумов.

1. Влияние электронной дифракции на неупругое рассеяние электронов в реальных условиях проникновения электронов в запретную область

Рассмотрим задачу о неупругом рассеянии диффрагирующего при прохождении через металл электрона, вызванном кулоновским взаимодействием с электронами решетки. В соответствии со сказанным во введении, в отличие от случая, рассмотренного в [1] (описание электрона модулированной функцией), состояние диффрагирующего электрона описывается модулированной функцией, экспоненциально затухающей в направлении x (электрон проникает в запретную область)⁵

$$\Phi_0 = N_0 e^{-\alpha_0 X} \sum_v A_v \exp i \left[\left(K + \frac{\pi}{a} v \right) X - E_K \frac{t}{\hbar} \right]. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{R}(X, Y, Z)$ — волновой вектор; a — постоянная решетки; α_0 — опытный параметр, характеризующий проникновение электрона (волновой функции) в запретную область; N_0 — нормировочный коэффициент (нормировка производится на 1 электрон в объеме металла, простирающегося от $X = 0$ до $X = \infty$):

$$N_0 = a^{1/2} F^{-1/2}. \quad (4a)$$

Здесь $a = 2\alpha_0$, F — поверхность металла; $\sum_v |A_v|^2 = 1$.

Предположим, что падающий электрон движется нормально к поверхности; тогда волновой вектор $|\mathbf{K}| = K_x = K$.

⁴ Матричный элемент написан в общем виде и не рассчитан.

⁵ Вместо суммы стоячих волн, применявшейся ранее [1, 2], в данном случае взята сумма бегущих плоских волн, что несколько упрощает расчет и приводит к результату, отличающемуся от прежнего лишь численным множителем. Это отличие несущественно, поскольку в данном случае важно выяснить общее влияние экспоненциального затухания функции на неупругое рассеяние.

Волновую функцию электрона решетки представим обычным образом

$$\varphi_0 = n_0 \sum_{n_1, n_2, n_3} a_n \exp \left\{ i \left[\left(\mathbf{k} + \frac{2\pi}{a} \mathbf{n} \right) \mathbf{r} - E_h \frac{t}{\hbar} \right] \right\},$$

где $n_0 = \Omega^{-1/3}$ (Ω — объем металла); $\mathbf{k}, \mathbf{r} (x, y, z)$ — волновой вектор и радиус-вектор электрона решетки.

Функцию состояния системы к моменту t представляем в виде

$$\psi(t) = \sum_{k', K'} a(k', K', t) \varphi(k') \Phi(K') \exp \left\{ -iE_{k'K'} \frac{t}{\hbar} \right\}. \quad (5)$$

Здесь $E_{k'K'}$ — энергия системы двух электронов в состояниях k', K' .

Сделав допущение, что первый коэффициент в (5) имеет вид

$$a(t) = e^{-\gamma t},$$

и решив систему уравнений Дирака, получим для коэффициента затухания γ [2]

$$\gamma = (2\pi^2/\hbar) \int |J_{k'K', hK}|^2 \rho_{K'} \sin \theta d\Omega^6, \quad (6)$$

где θ — угол рассеяния, $J_{k'K', hK}$ — матричный элемент, $\rho_{K'}$ — плотность конечных состояний на единицу объема⁶. При этом, как обычно, выполнен закон сохранения энергии

$$E_{k'K'} = E_{hK} \quad (7)$$

(E_{hK} — энергия системы в начальном состоянии).

Значение γ должно быть усреднено по всем начальным состояниям электронов решетки

$$\bar{\gamma} = (2\Omega / 8\pi^3) \int \gamma f d\tau_h; \quad d\tau_h = dk_x dk_y dk_z, \quad (6a)$$

где f — функция Ферми.

Рассчитаем матричный элемент

$$J_{k'K', hK} = M \sum_{n, n', v, v'} a_n a_{n'}^* A_v A_{v'}^* \times \\ \times \int \frac{e^{-\alpha X} e^{i \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \exp \left\{ i \left[\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \frac{2\pi}{a} (\mathbf{n} - \mathbf{n}') \right] \mathbf{r} \right\} d\tau_r d\tau_R. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \frac{\pi}{a} (\vec{v} - \vec{v}')$; $d\tau_r = dx dy dz$, $d\tau_R = dX dY dZ$;

$$M = n_0 n'_0 N_0 N'_0 e^2. \quad (9)$$

Рассматривая (8) как решение уравнения Пуассона, получаем

$$J_{k'K', hK} = M \frac{4\pi F}{(\mathbf{Q} + i\alpha)^2} \sum_{n, n', v, v'} a_n a_{n'}^* A_v A_{v'}^* \int \exp \{ (i\xi_x - \alpha) x \} dx; \quad (10)$$

$$\xi_x = q_x + k_x + \frac{2\pi}{a} (n_1 - n'_1) + \frac{\pi}{a} (v - v') - k'_x; \quad |\vec{a}| = a_x$$

⁶ В предыдущих случаях [1, 2] плотность конечных состояний нами явно не вводилась, так как она учитывалась нормировочным коэффициентом. В силу того, что нормировка в данной задаче проведена иначе, необходимо ввести явно $\rho_{K'}$.

при дополнительных условиях

$$q_{y,z} + k_{y,z} + \frac{2\pi}{a} (n_{2,3} - n'_{2,3}) - k'_{y,z} = 0, \quad (11)$$

- представляющих закон сохранения импульсов в y и z направлениях. Суммирование в (10) фактически происходит по n_1 и n'_1 (а не по n и n'), поскольку $n_{2,3}$ и $n'_{2,3}$ определяются законом сохранения импульса (11).

Проинтегрировав (10) в пределах от 0 до ∞ , получаем

$$|J_{K'K', hK}|^2 = 16\pi^2 F^2 |M|^2 \left| \sum_{n_1, n'_1, v, v'} \frac{a_n a_{n'}^* A_v A_{v'}^*}{(\mathbf{Q} + i\alpha)^2 (\vec{\xi}_x - \alpha)} \right|^2. \quad (12)$$

Поскольку выражение (12) имеет резонансный характер, обладая резко выраженным максимумом при условии

$$\xi_x \approx 0, \quad (13)$$

естественно принять допущение о приближенном выполнении (13). Окончательно имеем

$$|J_{K'K', hK}|^2 = \frac{16\pi^2 F^2 |M|^2}{\alpha^2} \sum_{n, n', v, v'} \left| \frac{a_n a_{n'}^* A_v A_{v'}^*}{(\mathbf{Q} + i\alpha)^2} \right|^2. \quad (14)$$

Суммирование в (14) производится лишь по тем значениям n, n', v, v' , которые удовлетворяют условиям (11) и (13). Плотность конечных состояний в общем имеет сложный вид [6]. После взаимодействия с электроном решетки диффрагирующий электрон, даже находясь на границе зоны, отойдет от нее.

Мы воспользуемся поэтому для простоты средним значением плотности $\rho_{K'}$ на единицу объема в приближении «слабо связанных» электронов, имеющем вид⁷:

$$\rho_{K'} = mK'/\hbar^2. \quad (15)$$

Таким образом для коэффициента затухания γ на основании (6) и (14) имеем

$$\gamma = \frac{16\pi^4 mF^2}{\hbar^3 \alpha^2} |M|^2 \sum_{n, n', v, v'} |a_n a_{n'}^* A_v A_{v'}^*|^2 \int \frac{K' \sin \vartheta d\vartheta}{|(\mathbf{Q} + i\alpha)^2|^2}. \quad (16)$$

Вводя

$$\mathbf{C} = \mathbf{q} + \mathbf{j} \quad \left(|\mathbf{j}| = \left| \frac{\pi}{a} (\vec{v} - \vec{v}') \right| = j_x = j \right),$$

получим

$$C^2 = \delta^2 - 2\delta K' \cos \vartheta + K'^2. \quad (17)$$

Здесь $\delta = K + j = K + \frac{\pi}{a} (v - v')$ — «недостаток» резонанса.

Перейдя от интегрирования по углу рассеяния ϑ к интегрированию по C , получаем

$$\gamma = \frac{2^5 \pi^4 mF^2}{\hbar^3 \alpha^2} |M|^2 \sum_{n, n', v, v'} |a_n a_{n'}^* A_v A_{v'}^*|^2 P_{vv'}, \quad (18)$$

$$P_{vv'} = \frac{1}{\delta} \int \frac{CdC}{(C^2 - \alpha^2) + (\alpha^2 / \delta^2) (\delta^2 + C^2 - K'^2)}. \quad (19)$$

⁷ Практически это означает усреднение приблизительно однопериодной кривой $\rho_{K'}$, распространяющейся на нижнюю и верхнюю (соседнюю) зоны.

Пределы интегрирования для C будут

$$C_{\max} \approx 2K + j; C_{\min} = 0. \quad (20)$$

Следует заметить, что хотя значение интеграла $P_{vv'}$ практически не зависит от величины нижнего предела C_{\min} (особенно, как видно будет позднее, в интересующем нас случае $\delta \approx 0$), внутризонные переходы должны быть исключены. Внутризонные переходы, отвечающие условиям $n - n' = 0; v - v' = 0$ и закону сохранения импульса $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$, уничтожают дифракцию ($\delta = 0; v - v' \neq 0$), что как раз нас и интересует, и поэтому они не должны рассматриваться.

Интеграл (19) можно несколько упростить. При использовании законов сохранения (ба), (11) и (13) в приближении «слабо связанных» электронов и учите лишь междузонных переходов, имея в виду, что $j \gg n - n'$, получаем⁸

$$\delta^2 + \alpha^2 - K'^2 \approx \delta^2 + \alpha^2 - j^2 + C^2, \quad (21)$$

Воспользовавшись (21) и вводя подстановку

$$Z = C^2 - \alpha^2,$$

имеем вместо (19)

$$P_{vv'} = \frac{1}{2\delta} \int \frac{dz}{az^2 + bz + c}, \quad (22)$$

где

$$a = 1 + \frac{4\alpha^2}{\delta^2}; \quad b = \frac{8\alpha^2}{\delta^2} \left(\alpha^2 - \frac{j^2}{2} \right); \quad c = \frac{4\alpha^2}{\delta^2} \left(\delta^2 - \frac{j^2}{2} \right).$$

Интеграл (22) берется элементарно. Для $P_{vv'}$ получаем

$$P_{vv'} = \frac{1}{2\alpha |\delta^2 + 2\alpha^2 - j^2|} \times \\ \times \left\{ \arctg \frac{\delta (C_{\max}^2 - \alpha^2) + 4(\alpha^2 / \delta) [C_{\max}^2 + (\delta^2 / 2) - (j^2 / 2)]}{2\alpha (\delta^2 + 2\alpha^2 - j^2)} - \right. \\ \left. - \arctg \frac{\delta (C_{\min}^2 - \alpha^2) + 4(\alpha^2 / \delta) [C_{\min}^2 + (\delta^2 / 2) - (j^2 / 2)]}{2\alpha (\delta^2 + 2\alpha^2 - j^2)} \right\}. \quad (23)^9$$

Уже из (23) видно, что в отличие от прежних результатов интеграл не имеет множителя δ в знаменателе, что исключает в данном случае возможность резонансного неупрого рассеяния вблизи $\delta \approx 0$.

В случае $\delta = 0$ получаем

$$(P_{vv'})_{\delta=0} = \pi / 2\alpha |2\alpha^2 - j^2|. \quad (24)$$

Подставив (24) и (9) в выражение (18), имеем

$$\gamma_{\delta=0} = \frac{16\pi^5 me^4}{\Omega \hbar^3} \sum_{n, n', v, v'} \frac{|\alpha_n \alpha_{n'}^* A_v A_{v'}^*|^2}{|2\alpha^2 - j^2|}.$$

⁸ $\gamma \sim \alpha_n \alpha_{n'}^* \sim (n^2 n'^2)^{-1}$ и поэтому можно ограничиться малым значением $n - n'$. Значение же j достаточно велико для электронов средних скоростей в силу условия $K = j$.

⁹ Знак \pm в знаменателе обусловлен тем, что это выражение — результат извлечения квадратного корня. Знак \pm должен быть избран при $2\alpha \geq j^2$ таким образом, чтобы обеспечить имеющее физический смысл условие $\gamma > 0$.

Таким образом для среднего значения коэффициента затухания $\bar{\gamma}_{\delta=0}$ на основании (6а) получаем

$$\bar{\gamma}_{\delta=0} = \frac{16\pi^3 me^4 k_0^3}{3\hbar^3 \alpha} \sum_{n, n', v, v'} \frac{|\alpha_n \alpha_{n'}^* A_v A_{v'}^*|^2}{|2\alpha^2 - j^2|}. \quad (25)$$

Средний пробег рассеяния имеет вид:

$$\bar{\lambda}_{\delta=0} = \hbar K / 2m \bar{\gamma}_{\delta=0} = \frac{3\hbar^4 K \alpha}{2^5 \pi^3 m e^4 k_0^3} \left\{ \sum \frac{|\alpha_n \alpha_{n'}^* A_v A_{v'}^*|^2}{|2\alpha^2 - j^2|} \right\}^{-1}. \quad (26)$$

Полученный результат (25) [или (26)] существенно отличается от прежнего результата [1] [формулы (2) и (2а)]. В [1] при описании дифрактирующих неупруго рассеиваемых электронов модулированными волновыми функциями без затухания условие дифракции $\delta = 0, K = \pi j / \alpha$ приводило к резонансному рассеянию

$$\bar{\gamma}_{\delta \rightarrow 0} \rightarrow \infty; \bar{\lambda}_{\delta \rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

В настоящем же случае при описании дифрактирующих неупруго рассеиваемых электронов модулированными затухающими функциями (дифракция в реальных условиях, электроны проникают в запретную область), условие дифракции $\delta = 0$ не приводит к резонансному неупругому рассеянию. Неупругое рассеяние в данном случае характеризуется конечным значением $\bar{\gamma}_{\delta=0}$ (и $\bar{\lambda}_{\delta=0}$), определяемым (25) и (26).

При $\alpha \rightarrow 0$ экспоненциальный множитель исчезает, электроны не проникают в запретную область, как видно из (25) и (26):

$$(\bar{\gamma}_{\delta=0})_{\alpha \rightarrow 0} \rightarrow \infty; (\bar{\lambda}_{\delta=0})_{\alpha \rightarrow 0} \rightarrow 0,$$

что совпадает с выводом работы [1].

Следует заметить, что кажущаяся возможность выполнения условия $2\alpha^2 = j^2$, которая, казалось бы, вновь приводит к $\bar{\gamma}_{\delta=0} \rightarrow \infty$, должна быть отброшена. Параметр α_0 (равный $\alpha / 2$) зависит от характеристик металла и не может принимать значения $\alpha_0 = \frac{\pi}{\alpha} l$, где l — целое число.

2. Влияние неупрого рассеяния на дифракцию электронов в металлах

Рассматривая, согласно сказанному выше, дифракцию и неупругое рассеяние электронов как две взаимосвязанные стороны единого процесса прохождения электронов через металл, следует рассмотреть влияние неупрого рассеяния на дифракцию электронов в металлах.

Как показано в [4, 5], задача о дифракции электронов при учете происходящего одновременно неупрого рассеяния сводится формально к решению уравнения Шредингера, в которое входит мнимый потенциал $i\Gamma$:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Phi + (U - i\Gamma) \Phi = 0. \quad (27)$$

Здесь $U = \sum_n V_n \exp\left\{i \frac{2\pi}{a}(nr)\right\}$ — периодический потенциал решетки; Φ — волновая функция диффрагирующего, неупруго рассеиваемого электрона. Решением (27) служит функция

$$\Phi = e^{-\kappa x} \sum_v A_v \exp\left\{i \left[\left(K + \frac{\pi}{a} v\right) x - E_K \frac{t}{\hbar}\right]\right\}, \quad (28)$$

в которой параметр κ (связанный с мнимым потенциалом $i\Gamma$) определяется таким образом, чтобы обеспечить вещественность энергии диффрагирующего электрона — E_K . В данном случае экспоненциальным затуханием, обусловленным проникновением в запретную область, можно пренебречь, поскольку хорошо известно, что подобное затухание (без учета рассеяния) все равно приводит к коэффициенту отражения для диффрагирующих электронов, равному единице.

Мнимый потенциал $i\Gamma$, представляющий в (27) реальный процесс неупрого рассеяния диффрагирующих электронов, связан, как показано в [5], со средним пробегом рассеяния $\bar{\lambda}$ соотношением

$$\Gamma = \hbar v / 2\bar{\lambda} \quad (v = \hbar K / m). \quad (29)$$

В нашей задаче $\bar{\lambda}$ — средний пробег рассеяния, обусловленного кулоновским взаимодействием диффрагирующего электрона с электроном решетки, определяемый из (26). Имея в виду, что $\bar{\lambda} = \hbar K / 2m\bar{\gamma}$ и используя (29), имеем

$$\Gamma = \bar{\gamma} \hbar; \quad (30)$$

$\bar{\gamma}$ — определяется, в частности, из (25).

Как видно, мнимый потенциал $i\Gamma$ имеет в нашем случае реальный физический смысл, вытекающий из физического содержания среднего коэффициента затухания $\bar{\gamma}$. Этот смысл заключается в уменьшении интенсивности пучка диффрагирующих электронов во времени, что отвечает процессу неупрого рассеяния в пространстве, вызванному кулоновским взаимодействием диффрагирующих электронов с электронами решетки.

Решение уравнения (27), которому удовлетворяет функция Φ вида (28), при использовании условия вещественности энергии электрона E_K , приводит к следующему выражению для коэффициента отражения R при дифракции [5]:

$$R = \frac{V_j^2}{V_j^2 + \Gamma_{\delta=0}^2 + \Delta^2} = \frac{V_j^2}{V_j^2 + \bar{\gamma}_{\delta=0}^2 \hbar^2 + \Delta^2}, \quad (31)$$

где $\Delta = \hbar^2 / 2m (\pi j / a) \delta$; V_j — коэффициент разложения потенциала решетки в ряд Фурье; j — целочисленный индекс, δ имеет прежний смысл «недостатка» резонанса ($\delta = K + \pi j / a$); $\bar{\gamma}_{\delta=0}$ — средний коэффициент затухания, определяемый (25). При этом зависимостью $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\delta)$ пренебрегаем, принимая $\bar{\gamma} \approx \bar{\gamma}_{\delta=0}$, причем $\bar{\gamma}_{\delta=0} = \bar{\gamma}_{\delta=0}(\alpha_0)$. Выражение (31) имеет резонансный характер. При выполнении резонансного условия $\Delta = 0$, т. е. $\delta = 0$, имеем

$$R_{\delta=0} = V_j^2 / (V_j^2 + \bar{\gamma}_{\delta=0}^2 \hbar^2). \quad (32)$$

Таким образом, резонансное значение коэффициента отражения $R_{\delta=0} = R_{\delta=0}(V_j, \bar{\gamma}_{\delta=0})$ есть функция параметров неупрого кулоновского

рассеяния диффрагирующих электронов. Неупругое рассеяние создает также некоторое расширение дифракционного максимума.

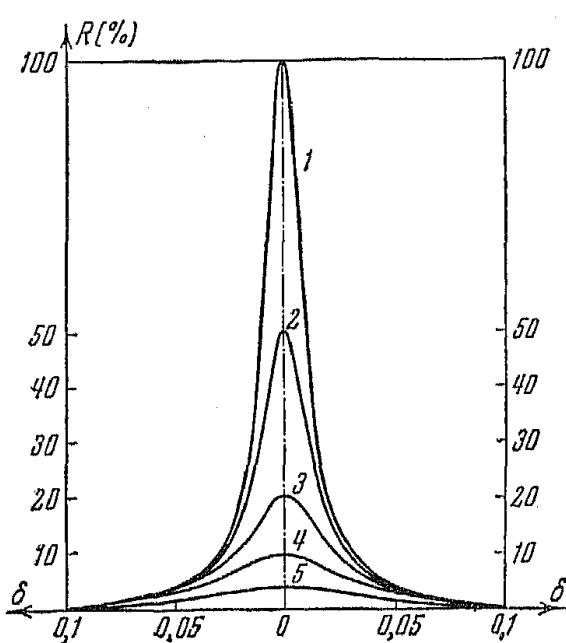


Рис. 1. Теоретическая зависимость коэффициента отражения R для диффрагирующих электронов от «недостатка» резонанса δ :

1 — $\Gamma = 0$; 2 — $\Gamma = V_j$; 3 — $\Gamma = 2V_j$;
4 — $\Gamma = 3V_j$; 5 — $\Gamma = 5V_j$

нной неупругим кулоновским рассеянием диффрагирующих электронов.

3. Заключение

1) Резонансное неупругое рассеяние не должно иметь места в тех металлах, где диффрагирующий электрон проникает в запретную область. В этих металлах параметры неупругого рассеяния имеют конечное, отличное от нуля значение [формулы (25) и (26)].

2) Различное значение высоты (и ширины) дифракционных максимумов является следствием происходящего одновременно с дифракцией неупругого кулоновского рассеяния электронов, взаимодействующих с электронами решетки.

3) Дифракция электронов и неупругое кулоновское рассеяние диффрагирующих электронов средних скоростей — явления, зависящие, в конечном счете, от влияния периодического поля решетки. Эти явления связаны в едином процессе прохождения электронов через решетку металла. В этом процессе как дифракция, так и неупругое рассеяние электронов одинаково сильно выражены и одинаково сильно влияют друг на друга.

В частности, нельзя рассматривать неупругое рассеяние, снижающее в некоторых случаях значение коэффициента дифракционного отражения до 1% , как побочное, мало значительное явление.

Ленинградский институт точной
механики и оптики

Литература

- [1] А. Я. Вятский. ЖЭТФ, 23, 147, 1952.—[2] А. Я. Вятский. ЖЭТФ, 20, 557, 1950.—[3] В. Е. Лашкарев. Дифракция электронов, ГТТИ, 1933.—[4] J. Slatger. Phys. Rev., 51, 10, 1937.—[5] Я. И. Френкель и С. Г. Рыжаков. ЖЭТФ, 8, 1955, 1938.—[6] А. Вильсон. Квантовая теория металлов, ГИТЛ, 1941.—[8] Н. Бетте. Ann. d. Phys., 87, 96, 1929.

Поступила в редакцию
17 сентября 1953 г.

¹⁰ Теория [7] привела к незначительному экстинкционному расширению максимума.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВТОРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ПО ЭНЕРГИЯМ ДЛЯ МОНОКРИСТАЛЛА МЕДИ, ПОКРЫТОГО МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКОЙ ЗАКИСИ МЕДИ

Н. Б. Горный

Методом электрического дифференцирования проведено экспериментальное исследование функции распределения истинно-вторичных электронов по энергиям для монокристаллической грани меди (111), покрытой монокристаллической пленкой закиси меди с поверхностью плоскостью (111), и для поликристаллической меди, покрытой поликристаллической пленкой закиси меди. Установлено, что в кривых распределения вторичных электронов по энергиям, полученных для монокристаллического образца, кроме основного максимума, имеется еще несколько дополнительных небольших максимумов.

1. Среди всей совокупности истинно-вторичных электронов возможно появление группы электронов с определенными, дискретными значениями энергий. Рассмотрим два явления, которые могут быть причиной появления истинно-вторичных электронов с определенными значениями энергий.

1) Первичный электрон, обладающий достаточной энергией, может выбить с одного из внутренних уровней атома сравнительно сильно связанный электрон с энергией связи W_1 . При этом произойдет переход какого-либо электрона с более высокого уровня с энергией W_2 на освободившееся место. Атом может освободиться от избытка энергии путем испускания излучения с частотой

$$\hbar\nu = W_1 - W_2.$$

Однако, как показывает опыт [1], атом может освободиться от избыточной энергии без излучения энергии. Избыточная энергия может быть поглощена электроном того же атома при условии, что энергия связи этого электрона W_3 меньше избыточной энергии $W_1 - W_2$. Энергия такого электрона (так называемого электрона Оже), покинувшего атом,

$$W = W_1 - W_2 - W_3. \quad (1)$$

Энергия электрона Оже имеет вполне определенное значение; она не зависит от энергии первичных электронов, а лишь от свойств атома данного вещества — уровней энергий W_1 , W_2 и W_3 .

2) Периодичность кристаллической решетки обуславливает существование между дозволенными зонами запрещенных полос энергий. Поэтому электроны кристаллической решетки могут получать от первичных электронов только определенные значения энергий, соответствующие переходам электронов из одной энергетической зоны кристаллической решетки данного твердого тела в другую. Значения этих энергий могут быть выражены формулой [2,3]

$$W = \frac{\hbar^2}{8m\pi^2} \left(\frac{2\pi n}{d} \right)^2, \quad (2)$$

где h — постоянная Планка, m — масса электрона, d — постоянная кристаллической решетки и $n^2 = h^2 + k^2 + l^2$ (h, k и l — миллеровские индексы соответствующих граней). Значения энергий этих электронов, вышедших в качестве вторичных, будут

$$eV_{km} = W - e\varphi, \quad (3)$$

где $e\varphi$ — работа выхода поверхности, из которой выходят вторичные электроны.

Таким образом в функции распределения вторичных электронов по энергиям должны выявиться группы электронов с энергиями, соответствующими определенным значениям энергий eV_{km} , что выразится в виде дополнительных максимумов — тонкой структуры в кривой распределения.

Целью данной работы явилось тщательное исследование распределения истинно-вторичных электронов по энергиям в диапазоне 0—30 eV.

Результаты исследования некоторых явлений требуют для их объяснения предположения о наличии дозволенных зон энергий электронов кристаллической решетки, отделенных запрещенными областями. К этим явлениям, например, относятся исследования тонкой структуры непрерывного спектра рентгеновых лучей [4] и исследования тонкой структуры края поглощения рентгеновых лучей в кристаллических телах [5-7]. К этим же явлениям можно отнести исследования неупругого отражения первичных электронов при вторичной эмиссии. Как известно [8], при тщательном исследовании кривой распределения вторичных электронов в области энергий, близких к энергии первичных электронов, были найдены дополнительные максимумы, указывающие на наличие среди вторичных электронов неупруго отраженных первичных электронов, потерявших часть своей энергии [9, 10]. Теоретические расчеты показали, что потери энергии первичными электронами могут быть обусловлены передачей части их энергии электронам кристаллической решетки, необходимой для их перехода на более высокий энергетический уровень [11].

Из большого числа исследований распределения истинно-вторичных электронов по энергиям (см. [12]) лишь в двух имеются указания на наличие добавочных максимумов. В работе [9] при исследовании молибдена и ниобия в кривой распределения, кроме основного максимума, выявляются еще несколько слабо выраженных максимумов. Эти максимумы автор работы [9] объяснял фотоэффектом рентгеновых лучей, возникавших при вторичной эмиссии. В работе [13] указывается на наличие тонкой структуры в кривых распределения для молибдена, вольфрама и tantalа, которая выражена еще слабее, чем в [9].

Все исследования распределения электронов по энергиям производились на поликристаллических объектах. Вследствие хаотической ориентировки кристалликов в поликристаллическом образце будет иметь место усреднение энергетических зон кристаллической решетки по данному направлению исследуемого образца. Это должно привести к сглаживанию максимумов тонкой структуры, обусловленных взаимодействием первичных электронов с электронами кристаллической решетки. Для более отчетливого выявления тонкой структуры в кривой распределения вторичных электронов по энергиям целесообразно произвести исследования на монокристаллах.

Для исследования распределения вторичных электронов по энергиям применяется метод задерживающего электрического поля или метод, основанный на анализе вторичных электронов магнитным полем [9, 13]. При применении первого метода кривая распределения

получается путем численного дифференцирования кривой задержки, что вносит значительные погрешности [14]. Метод, основанный на применении магнитного поля, обладает большей точностью, но ему свойственен существенный недостаток, заключающийся в том, что анализ может быть подвергнут лишь определенная, ограниченная часть вторичных электронов, выходящая из эмиттера в пределах определенного телесного угла, заданного конструкцией прибора. В данной работе применен метод с задерживающим электрическим полем, свободный от вышеуказанного недостатка и обладающий большой точностью.

На рис. 1 изображена принципиальная схема установки. Кроме обычно применяющегося потенциала на коллекторе V_h , задающего

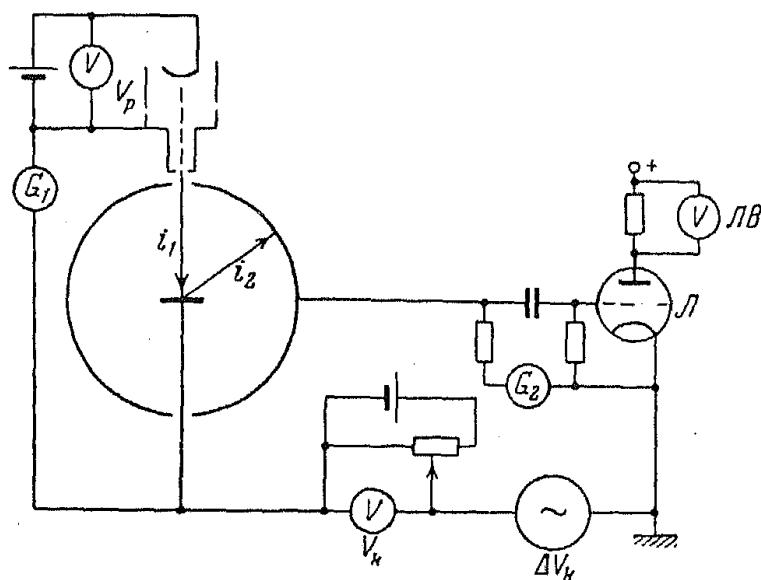


Рис. 1. Принципиальная схема установки

задерживающее поле в сферическом конденсаторе, накладывается еще переменное синусоидальное напряжение ΔV_h с постоянной амплитудой малой величины. Измерения вторичного тока i_2 гальванометром G_2 при различных значениях V_h дают возможность получить обычную кривую задержки $i_2 = f(V_h)$ (рис. 2, кривая *a*). При данном значении V_h переменное напряжение ΔV_h обуславливает появление переменной составляющей вторичного тока Δi_2 . Переменная составляющая тока после усиления лампой L измеряется ламповым вольтметром LV (рис. 1). Если изменять потенциал коллектора V_h на небольшие значения, то показания на ламповом вольтметре будут пропорциональны крутизне кривой задержки при данных значениях V_h . При достаточно малом значении амплитуды переменного напряжения ΔV_h (менее 1 В) можно считать, что показания лампового вольтметра непосредственно дают значения точек кривой распределения вторичных электронов по энергиям (рис. 2, кривая *б*) [15]. При практическом осуществлении рассматриваемой схемы пришлось преодолеть ряд трудностей, связанных с необходимостью измерения малых токов сигнала ($\sim 10^{-11}$ А) на фоне помех ($\sim 10^{-9}$ А) (более подробно см. [15, 16]).

2. Мы исследовали распределение вторичных электронов для монокристаллической плоскости меди (111) и поликристаллической меди. Для этой цели, после того как была оптическим способом определена ориентировка медного монокристалла и намечены его основные кристаллографические направления [17], был вырезан диск диаметром около 10 мм и толщиной 0,6—0,8 мм, поверхность которого совпадала с указанной кристаллической гранью. После механической и

электролитической полировки монокристаллического и поликристаллического образцов они были вмонтированы в прибор.

Прибор, находившийся в печке, подвергался длительной откачке и при этом ловушки (обычно наполненные жидким воздухом) нагревались до комнатной температуры на время, достаточное для удаления водяных паров.

Последующее обезгаживание производилось в течение четырех суток при температуре прибора до 450°C , металлические части подвергались дополнительному нагреву электронной бомбардировкой и токами высокой частоты до темнокрасного свечения. После достижения высокого вакуума (менее 10^{-6} мм рт. ст.) прибор отпаивался и в специальных отростках распылялся геттер.

Исследования методом дифракции медленных электронов показали, что на монокристаллических плоскостях меди находилась пленка закиси меди также монокристаллической структуры. При этом на основании монокристалла меди с плоскостью (111) располагалась пленка Cu_2O с плоскостью (111), параллельной основанию меди, а на поликристаллической меди располагалась поликристаллическая пленка Cu_2O .

В вакуумном приборе, которым мы пользовались, узкий электронный пучок диаметром 1,5 мм, выходящий из пушки (из тантала), падал перпендикулярно на столик, представляющий собой диск из

вольфрама диаметром 20 мм, расположенный в середине сферы вакуумного прибора диаметром 120 мм. На сфере был распылен полу-

прозрачный слой платины, служивший коллектором вторичных электронов. Столик, на котором были укреплены образцы, подвергавшиеся исследованию, можно было поворачивать при помощи электромагнитов извне и устанавливать в положении, необходимом для измерений с данного образца. Для удаления с поверхности образца, подвергавшегося исследованию, адсорбированных молекул остаточного газа предусмотрена подогревная нить накала внутри столика. Температура измерялась при помощи термопары. Исследования изменений контактных потенциалов с изменением температуры показали, что при температуре 450°C адсорбированные молекулы остаточного газа удаляются с исследуемого образца.

Схема измерений приведена в работе [15] на рис. 2. Измерения производились через один вольт задерживающего потенциала V_h . Значение переменной составляющей задерживающего потенциала ΔV_h было 0,5 В.

При измерениях производилась компенсация магнитного поля земли двумя катушками диаметром в 1 м. Все измерения производились в ночное время, когда уровень помех был наиболее низким и оставался постоянным за все время измерений. Погрешность измерений в этих условиях была менее 2%.

На рис. 3—7 приведены полученные экспериментально кривые распределения вторичных электронов по энергиям (кривые a) и кривые задержки вторичного тока (кривые b). На рис. 3 приведены кривые, полученные для монокристаллического образца при энергии

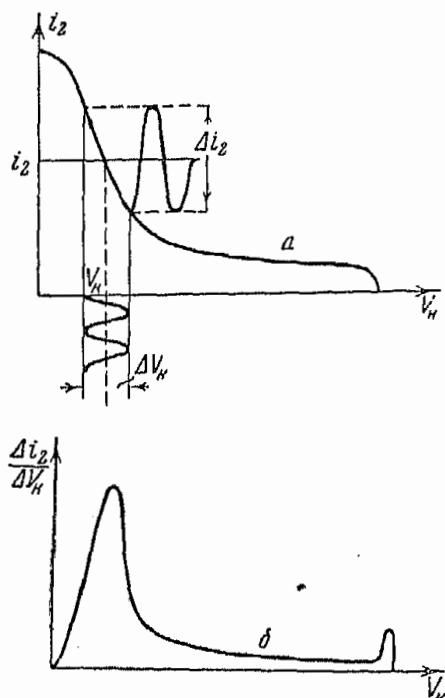


Рис. 2. a — кривая задержки, b — кривая распределения вторичных электронов по энергиям, получающаяся непосредственно из измерения по ЛВ по схеме рис. 1

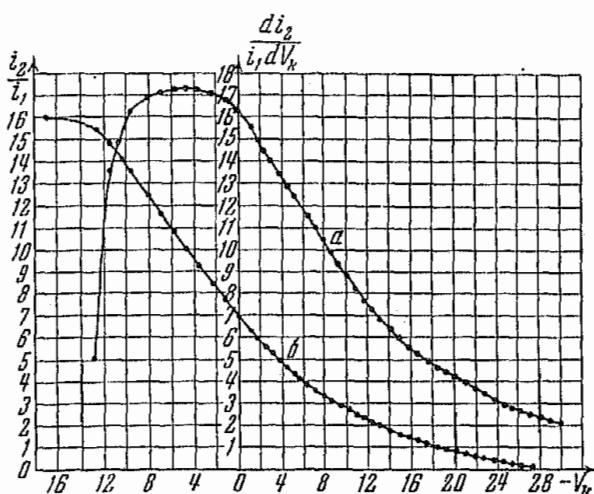


Рис. 3. Кривые, полученные для монокристаллического образца при $V_p = 400$ В и при комнатной температуре; *a* — кривая распределения, *б* — кривая задержки

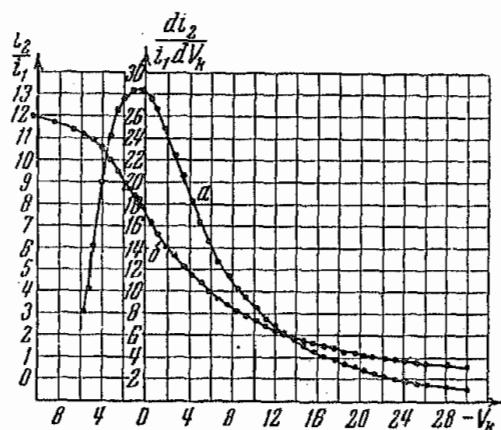


Рис. 4. Кривые, полученные для поликристаллического образца при $V_p = 140$ В и при $t = 450^\circ\text{C}$; *a* — кривая распределения, *б* — кривая задержки

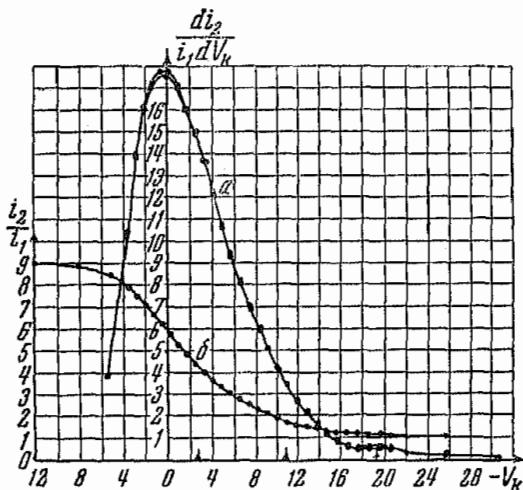


Рис. 5. Кривые, полученные для монокристаллического образца при $V_p = 70$ В и при $t = 450^\circ\text{C}$; *a* — кривые распределения, *б* — кривая задержки. Стрелки указывают положения вычисленных максимумов

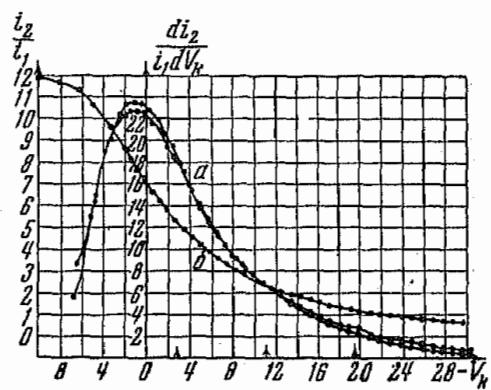


Рис. 6. Кривые, полученные для монокристаллического образца при $V_p = 140$ В и при $t = 450^\circ\text{C}$; *a* — кривые распределения, *б* — кривая задержки. Стрелки указывают положение вычисленных максимумов

первичных электронов $V_p = 400$ В при комнатной температуре, на рис. 4 — кривые, полученные для поликристаллического образца при $V_p = 140$ В и при температуре 450°C . На рис. 5, 6 и 7 даны кривые, полученные для монокристаллического образца при температуре 450°C и при $V_p = 70, 140$ и 400 В, соответственно.

В приведенных кривых распределения для монокристаллического образца, полученных при температуре 450°C (рис. 5—7, кривые *a*), кроме основного максимума, можно усмотреть наличие тонкой структуры в виде хорошо заметных изгибов, очевидно, обусловленных дополнительными максимумами. Таких изгибов нет в кривых распределения, полученных для поликристаллического образца (рис. 4, *a*) и для монокристаллического образца при комнатной температуре (рис. 3, *a*).

3. Переходя к обсуждению полученных результатов, прежде всего следует отметить, что все кривые распределения, а также кривые задержки, должны быть смещены в сторону больших значений V_h , т. е. вправо, из-за наличия контактной разности потенциалов между

образцами закиси меди и коллектором (платина). Если принять значение работы выхода для платины 6 eV, для поликристаллической закиси меди 5,4 eV [18] и для монокристаллической закиси меди с поверхностной плоскостью (111) согласно нашим исследованиям 5,6 eV, то кривые должны сместиться примерно на 0,5 V. Следует также отметить, что в области положительных V_k , близких к нулю, ординаты кривых распределения преувеличены вследствие резкого изменения вторичного тока с коллектора с изменением V_k [14]. Все кривые на рис. 3—7 изображены без учета контактной разности потенциалов.

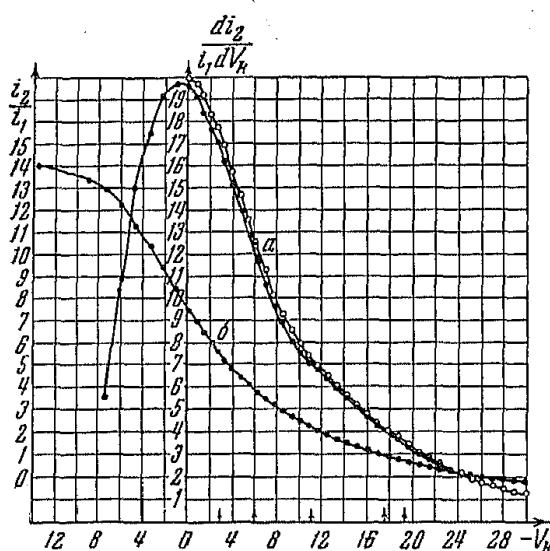
Положение основных максимумов в кривых распределения, полученных для монокристаллического образца при температуре 450°C, незначительно различаются в зависимости от энергии первичных электронов. С увеличением V_p положение основного максимума в кривых распределения незначительно смещается в сторону меньших значений энергий вторичных электронов (рис. 5—7). С повышением энергии первичных электронов возрастает выход истинно-вторичных электронов больших энергий. Так, например, при $V_p = 70$ V выход вторичных электронов с энергией

Рис. 7. Кривые, полученные для монокристаллического образца при $V_p = -400$ V и при $t = 450^\circ\text{C}$; a — кривые распределения, b — кривая задержки. Стрелки указывают положения вычисленных максимумов: первая, третья и пятая (считая слева) для решетки Cu_2O , остальные — для решетки Cu

в 22 V составляет $\sim 2\%$ от числа электронов с энергией, соответствующей максимуму в кривых распределения, при $V_p = 140$ V $\sim 6\%$ и при $V_p = 400$ V $\sim 13\%$.

В кривых распределения для поликристаллического и монокристаллического образцов, полученных при одинаковых V_p (140 V) и температуре 450°C, основные максимумы расположены при одинаковых значениях V_k (рис. 4 и 6). Кривая распределения и кривая задержки, полученные с монокристаллического образца при комнатной температуре (рис. 3), отличаются от соответственных кривых, полученных при температуре 450°C (рис. 4—7). Максимум кривой распределения, полученной при комнатной температуре, значительно смещен в сторону положительных значений V_k ($V_{km} \sim 4$ V) и, соответственно, насыщение кривой задержки наступает при больших положительных значениях V_k . Измерения при комнатной температуре и при 450°C производились при достаточно малых интенсивностях электронного пучка, исключающих наличие объемных зарядов. Поэтому появление насыщения в кривых задержки, полученных при комнатной температуре при сравнительно больших положительных значениях V_k , не может быть объяснено влиянием объемных зарядов.

Остается предположить, что при понижении температуры от 450°C до комнатной среди вторичных электронов появляется довольно значительная группа электронов, для выхода которых необходимо приложить ускоряющее поле — электроны с «недостаточными» энергиями (см., например, [19]). Согласно нашим исследованиям, коэффициент вторичной эмиссии с монокристаллической плоскости закиси меди (111) при понижении температуры в указанном диапазоне возрастает всего лишь на 3% [20]. Отсюда можно заключить, что группа



вторичных электронов с «недостаточными» энергиями, появляющаяся при понижении температуры образца до комнатной, образуется за счет вторичных электронов других энергий. Это заключение подтверждает рис. 8, на котором приведена разность значений ординат кривых распределения, полученных при $V_p = 400$ В при комнатной температуре (рис. 3, кривая *a*) и при 450°C (рис. 7, кривые *a*). Из рис. 8 можно видеть, что при понижении температуры от 450°C до комнатной выход вторичных электронов с «недостаточной» энергией возрастает, а выход вторичных электронов малых энергий уменьшается.

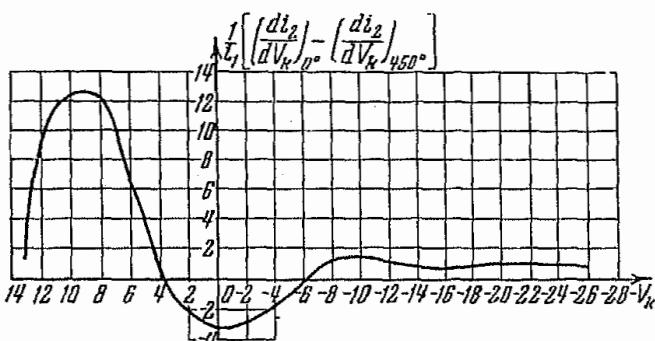


Рис. 8. Разность значений ординат кривых распределения, полученных для монокристаллического образца при $V_p = 400$ В при комнатной температуре (рис. 3, кривая *a*) и при 450°C (рис. 7, кривые *a*)

Изменение свойств эмиттера при понижении его температуры с 450°C до комнатной в основном сводится к осаждению молекул остаточных газов на его поверхность. Из полученных данных следует, что слой молекул остаточных газов затрудняет выход вторичных электронов малых энергий (до 6 В).

4. Переходя к обсуждению результатов, связанных с наличием тонкой структуры в кривых распределения вторичных электронов по энергиям, полученных для монокристаллического образца, следует отметить следующее.

Мы производили измерения на монокристаллическом и на поликристаллическом образцах при одинаковых условиях, в одном и том же вакуумном приборе и при одинаковой температуре (450°C). Следовательно, все побочные эффекты, в частности неизбежный при данной методике вторичный ток с коллектора, должны сказываться одинаково в обоих случаях. В кривых распределения, полученных для монокристаллического образца, кроме основного максимума, имеются явно выраженные изгибы (рис. 5—7, кривые *a*), а в кривой распределения, полученной с поликристаллического образца при тех же условиях, изгибы отсутствуют (рис. 4, кривая *a*). Поэтому следует считать, что эти изгибы вызваны не побочными эффектами, а вторичной эмиссией с самого монокристаллического образца. Изгибы в кривых распределения, очевидно, обусловлены дополнительными максимумами. Следует отметить, что отсутствие дополнительных максимумов в кривых распределения, полученных для поликристаллического образца в исследуемом диапазоне энергий вторичных электронов, указывает на то, что электроны Оже не ответственны за появление этих максимумов, так как выход электронов Оже не зависит от кристаллографического направления. Остается предположить, что дополнительные максимумы, найденные в кривых распределения для монокристаллического образца, обусловлены электронами кристаллической решетки, получившими от первичных электронов достаточную энергию для перехода из заполненной энергетической зоны в различные дозволенные зоны. Энергия таких электронов eV_{km} может быть

вычислена по формулам (2) и (3). Для трех первых зон (100), (110) и (111) Cu_2O энергии eV_{km} имеют значения 2,7, 11 и 19,3 eV, соответственно. При вычислении eV_{km} мы приняли работу выхода для платины 6 eV, для поликристаллической закиси меди 5,4 eV [18], а для монокристаллической плоскости закиси меди (111) при 450°C, согласно нашим исследованиям, значение 5,6 eV. Стрелки на рис. 5—7 указывают местоположение теоретически ожидаемых максимумов V_{km} .

Экспериментальные максимумы тонкой структуры в кривых распределения для монокристаллического образца, полученных при $V_p = 70$ V и $V_p = 140$ V, удовлетворительно соответствуют теоретически вычисленным значениям энергий электронов решетки закиси меди, вышедших в качестве вторичных (рис. 5,6). Однако в экспериментальных кривых распределения для монокристаллического образца, полученных при $V_p = 400$ V (рис. 7, кривые *a*), имеется изгиб кривых, соответствующий максимуму при $V_k = 6$ V, не совпадающий ни с одним из вычисленных значений V_{km} для Cu_2O .

Согласно исследованиям [21-23], толщина пленки Cu_2O , образовавшейся на плоскости (111) монокристалла меди, при комнатной температуре и в атмосфере воздуха порядка 15 Å. Естественно предположить, что первичные электроны с энергией в 400 V имеют достаточный пробег, чтобы проникнуть сквозь пленку Cu_2O в решетку меди, и что указанный максимум обусловлен электронами кристаллической решетки меди, получившими энергию от первичных электронов, достаточную для перехода в дозволенные энергетические зоны решетки Cu и вышедшие в виде вторичных электронов. Вычисленные значения энергий вторичных электронов для решетки меди для трех зон (100), (110) и (111) имеют значения 6, 17,6 и 29,2 eV, соответственно. Как видно из рис. 7 (кривые *a*), значение 6 eV хорошо совпадает с экспериментальным значением 6 eV, а значение 17,6 eV — с экспериментальным значением 18,5 eV.

Таким образом из наших экспериментальных данных следует, что некоторая незначительная часть вторичных электронов представляет собой электроны кристаллической решетки, получившие от первичных электронов определенные значения энергий, соответствующие переходу электронов из одной энергетической зоны кристаллической решетки в другую. Энергии, при которых появляются дополнительные максимумы в кривых распределения, совпадают со значениями энергий, вычисленными согласно теории Вятского [2]. Этим подтверждается существование вышеуказанного механизма потерь энергии первичных электронов, рассматриваемого в теориях вторичной электронной эмиссии Вятского [2] и Булдриджа [3].

За большую помощь при наладке схемы и при измерениях выражаю благодарность Л. М. Раховичу.

Выводы

1. В кривых распределения вторичных электронов по энергиям, полученных для монокристаллической плоскости (111) закиси меди на монокристаллической меди при температуре 450°C, кроме основного максимума, обнаружено несколько дополнительных максимумов.

2. В кривых распределения, полученных для поликристаллической закиси меди на меди при температуре 450°C дополнительные максимумы не обнаружены.

3. Положение основного максимума в кривых распределения, полученных для монокристаллического образца при температуре 450°C, несколько смещается в сторону меньших значений энергий вторичных электронов с увеличением энергий первичных электронов от 70 до 400 V.

4. Вторичные электроны, обусловившие появление дополнительных максимумов, представляют собой электроны кристаллической решетки, получившие энергию от первичных электронов, достаточную для перехода в разрешенные энергетические зоны, расположенные выше уровня Ферми.

Ленинградский электротехнический
институт связи

Поступила в редакцию
19 декабря 1953 г.

Литература

- [1] E. H. S. Burhop. The Auger effect and other radiationless transitions. Cambr. University press, 1952.—[2] А. Я. Вятский. ЖЭТФ, 20, 547, 1950; 21, 851, 1951.—[3] D. E. Wooldridge. Phys. Rev., 56, 562, 1939.—[4] J. Du-Mond. Phys. Rev., 72, 276, 1947; 74, 1883, 1948.—[5] М. А. Блохин. Усп. физ. наук, 28, 438, 1946; 29, 104, 1946.—[6] Э. Е. Вайнштейн. Рентгеновские спектры атомов в молекулах химических соединений и в сплавах, Изд. АН СССР, 1950.—[7] H. Niehrs. Erg. Exakt. Naturw., 23, 359, 1950.—[8] Л. Н. Добрецов. Электронная и ионная эмиссия, ГИТТЛ, 1950. Н. А. Капцов. Электроника, ГИТТЛ, 1953.—[9] L. J. Haworth. Phys. Rev., 48, 88, 1935; 50, 216, 1936.—[10] E. Rudberg. Phys. Rev., 50, 138, 1936.—[11] E. Rudberg u. J. C. Slater. Phys. Rev., 50, 450, 1936.—[12] K. G. McKaughan. Secondary Electron Emission, в сб. Advances in Electronics, 1, под. ред. L. Marton, N.Y., Acad. press, 1948.—[13] R. Kollath. Ann. d. Phys., 1, 357, 1947.—[14] Н. Б. Горный. ЖЭТФ, 26, 327, 1954.—[15] Н. Б. Горный и Л. М. Рахович. ЖЭТФ, 26, 454, 1954.—[16] Л. М. Рахович. Дипломная работа, Ленингр. электротехн. ин-т связи, 1953.—[17] Н. Б. Горный. Записки всес. минерал. об-ва, 80, 245, 1951.—[18] R. Fleischmann. Ann. d. Phys., 5, 73, 1930.—[19] А. И. Пятницкий. Журн. техн. физ., 8, 1014, 1938.—[20] Н. Б. Горный. ЖЭТФ, 26, 79, 1954.—[21] T. N. Rhodin. J. Am. Chem. Soc., 72, 5102, 1950.—[22] P. A. Thissen u. H. Schütze. ZS. f. anorg. u. algem. chemie, 238, 35, 1937.—[23] N. Cabrera a. N. F. Mott. Rep. on Progr. in Physics, 12, 174, 1949.

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛАЗМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В СТАЦИОНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

M. E. Герценштейн

Вычисляется тензор комплексной диэлектрической проницаемости электронного газа с учетом теплового движения электронов.

Электромагнитные процессы в электронном газе (плазме), находящемся во внешнем магнитном поле, представляют большой интерес для радиофизики и астрофизики. Этим вопросам посвящен ряд теоретических работ [¹⁻⁶], в которых исследуются законы дисперсии различных плоских волн. В нашей предыдущей работе [⁶] было показано, что задача о распространении волн в электронной плазме может быть сведена к формальной электродинамике, если ввести диэлектрическую проницаемость плазмы ϵ , зависящую от пространственной и временной структуры поля волны — частоты ω и волнового вектора k . В работе [⁶] была вычислена диэлектрическая проницаемость электронной плазмы при отсутствии постоянных внешних полей; в настоящей работе вычисляется ϵ для плоских волн, распространяющихся в однородной анизотропной плазме, находящейся в постоянном однородном магнитном поле напряженности H_0 . Предполагается, что постоянных электростатических полей нет. Под комплексной диэлектрической проницаемостью ϵ понимается, как обычно, отношение комплексных амплитуд плотности полного тока $(i\omega/4\pi)E + j$ к току смещения $(i\omega/4\pi)E$, где j — плотность тока проводимости, $i = \sqrt{-1}$.

Исходным в работах [¹⁻⁴] является линеаризованное кинетическое уравнение для электронов без интеграла соударений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \varphi + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} H_0] \operatorname{grad}_{\mathbf{v}} \varphi = -\frac{e}{m} N E \operatorname{grad}_{\mathbf{v}} f_0. \quad (1)$$

Здесь $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — отклонение функции распределения электронов по скоростям от равновесной f_0 , вызванное переменным электрическим полем волны E ($\varphi \ll f_0$); действием переменного магнитного поля волны пренебрегаем; N — концентрация электронов, e , m — соответственно заряд и масса электрона, $f_0(\mathbf{v})$ — равновесная функция распределения электронов по скоростям в постоянном магнитном поле, описывающая движение электронов плазмы без воздействия переменных полей. Пусть положительное направление оси z совпадает с направлением магнитного поля. Тогда, как известно,

$$f_0(\mathbf{v}) = F(v_z, \sqrt{v_x^2 + v_y^2}); \quad \int f_0(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1. \quad (2)$$

Конкретный вид произвольной функции F должен быть определен из добавочных условий неэлектродинамического характера [⁷]. Если в системе имеет место термодинамическое равновесие, то $f(\mathbf{v})$ будет функцией распределения Максвелла. Все проведенное ниже исследование справедливо для любой функции F (для состояния плазмы, далекого от температурного равновесия).

Рассмотрим действие на электрон переменного электрического поля плоской волны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i\psi(\mathbf{r}, t)}, \quad \psi = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}, \quad (3)$$

где ψ — фаза волны. Величины ω и \mathbf{k} могут быть комплексными. Строгие решения $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{E}, \mathbf{H}_0, \omega, \mathbf{k})$ уравнения (1) при наличии постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0 \neq 0$, когда переменное электрическое поле выражается формулой (3), приведенные в работах [1-4], очень громоздки и неудобны для исследования. Поэтому в настоящей работе для вычисления ψ применен другой метод, несколько менее строгий, но более наглядный. Исходными при вычислении являются уравнения движения электронов:

$$d\mathbf{v}/dt = (e/m)\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + (e/mc)[\mathbf{v}(t)\mathbf{H}_0]; \quad d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}(t), \quad (4)$$

где $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ — координата и скорость выделенного электрона в момент времени t [8]. Так как амплитуда переменного электрического поля считается настолько малой, что законно линейное приближение, то при вычислении $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ в правой части уравнения (4) достаточно учесть только постоянную составляющую скорости электронов. Обыкновенные уравнения (4) являются характеристиками кинетического уравнения в частных производных [9], поэтому примененный нами метод математически эквивалентен решению уравнения (1). Как и в [6], соударения электронов с молекулами нейтрального газа и ионами не учитываются.

Сначала приведем известные формулы [10] для случая, когда тепловым и упорядоченным движением электронов можно пренебречь. Без нарушения общности можно считать $\mathbf{r}(t) = 0$, и следовательно,

$$\psi = \omega t. \quad (5)$$

Выпишем уравнения (4) в координатной форме:

$$dv_z/dt = (e/m)E_z e^{i\psi}; \quad (6)$$

$$dv_x/dt = (e/m)E_x e^{i\psi} + (e/mc)H_0 v_y; \quad (7)$$

$$dv_y/dt = (e/m)E_y e^{i\psi} - (e/mc)H_0 v_x.$$

Согласно формуле (6), на колебаниях электрона вдоль оси z магнитное поле не оказывается; для комплексной амплитуды скорости имеем

$$v_z = (e/mi\omega)E_z e^{i\psi}. \quad (8)$$

Если ввести комплексные комбинации [10]

$$\xi_{\pm} = v_x \pm iv_y; \quad F_{\pm} = E_x \pm iE_y, \quad (9)$$

то система уравнений (7) примет вид

$$(d\xi_{\pm}/dt) \mp i\Omega\xi_{\pm} = (e/m)F_{\pm} e^{i\psi}; \quad \Omega = H_0(e/mc), \quad (10)$$

где в обеих частях равенства одновременно нужно брать или верхний или нижний знак. Из уравнения (10) легко получаем

$$\xi_{\pm} = \frac{e/m}{i(\omega \mp \Omega)} F_{\pm} e^{i\psi}. \quad (11)$$

Пользуясь соотношениями (9), перейдем от величин ξ_{\pm} к комплексным амплитудам колебательной скорости v_x и v_y . Полученные результаты удобно записать в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} v_z \\ v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \frac{e}{mi} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega}{\omega^2 - \Omega^2} & \frac{i\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \\ 0 & -\frac{i\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} & \frac{\omega}{\omega^2 - \Omega^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Как известно, переменная компонента тока проводимости равна

$$\mathbf{j} = eN\mathbf{v}_\sim. \quad (13)$$

Поэтому, пользуясь выражениями (12) и (13), для тензора диэлектрической проницаемости ϵ окончательно получаем

$$\epsilon = 1 - \omega_0^2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} & \frac{i\Omega}{\omega} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \\ 0 & -\frac{i\Omega}{\omega} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} & \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

где $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 N / m}$ — частота лэнгмюровских колебаний плазмы. Из формулы (14) видно, что при $\omega = \Omega$, $\epsilon = \infty$, т. е. имеет место резонанс на гиромагнитной частоте.

Формулы (5) — (14) получены в предположении отсутствия теплового и упорядоченного движения электронов; теперь необходимо учесть это движение. При отсутствии переменного поля волны электроны движутся по спирали, их постоянная составляющая скорости равна

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_z \\ v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \cos \Omega t \\ v \sin \Omega t \end{Bmatrix}; \quad u = v_z, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (15)$$

Как видно из формулы (15), скорость выделенного электрона меняется со временем, поэтому применение термина «постоянная составляющая скорости» несколько неудачно. Тем не менее мы будем пользоваться этой общепринятой в радиофизике терминологией [11, 12], понимая слово «постоянное» в смысле «не зависящее от высокочастотного поля волны». Интегрируя (15) по времени, для радиуса-вектора электрона имеем

$$\mathbf{r}(t) = \begin{Bmatrix} ut \\ (v/\Omega) \sin \Omega t \\ -(v/\Omega) \cos \Omega t \end{Bmatrix}; \quad (16)$$

постоянные интегрирования опущены. Согласно формулам (3) и (16), для фазы поля, действующего на электрон, имеем

$$\psi = \psi[\mathbf{r}(t), t] = (\omega - \beta u)t - (kv/\Omega) \sin(\Omega t + \delta), \quad (17)$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $\beta = k_z$, δ — угол между проекциями волнового вектора \mathbf{k} и электронной скорости \mathbf{v} на перпендикулярную магнитному полю плоскость xoy в момент времени $t = 0$. Для частоты силы, действующей на электрон, имеем

$$\omega' = d\psi/dt = \omega - \beta u - kv \cos(\Omega t + \delta). \quad (18)$$

Таким образом мгновенная частота силы, действующей на электрон со стороны переменного поля волны, не совпадает с частотой поля в неподвижной системе координат и не является постоянной. Введем систему координат, движущуюся вместе с электроном; ω' является мгновенной частотой поля в подвижной системе координат. Как видно из формулы (18), в системе координат, связанной с движущимся электроном, имеет место частотная модуляция поля волны. Частота модуляции совпадает с гиромагнитной частотой Ω . Неинерциальность подвижной системы координат не имеет значения, так как исходные уравнения (4) выписаны для неподвижной системы координат.

Для нахождения движения электронов перейдем от частотно-модулированных колебаний к их спектру. Воспользовавшись известным соотношением из теории бесселевых функций:

$$\exp \left\{ -i \left(\frac{kv}{\Omega} \right) \sin (\Omega t + \delta) \right\} = \sum_n J_n \left(-\frac{kv}{\Omega} \right) \exp \{ i(n\Omega t + n\delta) \},$$

получаем

$$E_0 \exp \{ i\psi [r(t), t] \} = E_0 \sum_n J_n \left(-\frac{kv}{\Omega} \right) \exp \{ i[(\omega - \beta u + n\Omega)t + n\delta] \}. \quad (19)$$

Следовательно, в спектре силы, действующей на электрон, будут представлены частоты

$$\omega_n = \omega - \beta u + n\Omega; \quad -\infty < n < +\infty. \quad (20)$$

В случае, когда частота действующей на электрон силы совпадает с частотой колебаний электрона в магнитном поле

$$\omega_n = \begin{cases} 0 & \text{для } E_z, \\ \pm \Omega & \text{для } E_x \text{ и } E_y, \end{cases} \quad (21)$$

имеют место резонансные явления.

Подставляя (19) в (4) и повторив выкладки (6) — (12), мы видим, что в формуле (12) необходимо произвести замену:

$$\omega \rightarrow \omega_n(v) = \omega - \beta u + n\Omega \quad (22)$$

и для какого-либо выделенного электрона для переменной компоненты скорости, как функции времени, имеем

$$v_\sim(t) = \frac{e}{mi} \sum_n J_n \left(-\frac{kv}{\Omega} \right) e^{i\omega_n t} C_n E_0 e^{in\delta}, \quad (23)$$

где матрицы C_n равны

$$C_n = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\omega_n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_n}{\omega_n^2 - \Omega^2} & \frac{i\Omega}{\omega_n^2 - \Omega^2} \\ 0 & \frac{-i\Omega}{\omega_n^2 - \Omega^2} & \frac{\omega_n}{\omega_n^2 - \Omega^2} \end{Bmatrix}. \quad (24)$$

В формуле (23) амплитуда переменной составляющей скорости электрона зависит только от времени t . Для дальнейшего нам необходимо выразить эту зависимость также и от фазы поля в точке, где находится рассматриваемый электрон. Используя (17), легко получить, что

$$v_\sim = \frac{e}{mi} e^{i\psi} \exp \left\{ i \left(\frac{kv}{\Omega} \right) \sin (\Omega t + \delta) \right\} \sum_n J_n \left(-\frac{kv}{\Omega} \right) \exp \{ in(\Omega t + \delta) \} C_n E, \quad (25)$$

и, снова используя свойства бесселевых функций, имеем

$$\mathbf{v}_{\sim} = \frac{e}{mi} e^{i\psi} \sum_n \sum_s J_n \left(-\frac{kv}{\Omega} \right) J_s \left(\frac{kv}{\Omega} \right) \exp \{i(s+n)\Omega t\} \exp \{i(s+n)\delta\} C_n \mathbf{E}_0. \quad (26)$$

При усреднении \mathbf{v}_{\sim} по углу δ слагаемые при $n+s \neq 0$ обращаются в нуль, двойная сумма сводится к простой; следовательно:

$$\mathbf{v}_{\sim}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{mi} e^{i\psi(\mathbf{r}, t)} \sum_n J_n^2 \left(\frac{kv}{\Omega} \right) C_n \mathbf{E}_0. \quad (27)$$

Введя обозначение

$$A(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \Omega) = \sum_n J_n^2 \left(\frac{kv}{\Omega} \right) C_n(\omega_n, \mathbf{v}), \quad (28)$$

запишем формулу (27) в следующем виде:

$$\mathbf{v}_{\sim}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{mi} A(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}_0 e^{i\psi(\mathbf{r}, t)}. \quad (29)$$

Отметим различие между формулами (23) и (29): в формуле (23) рассматривается переменная компонента скорости какого-либо определенного электрона, как функция времени, независимо от положения этого электрона [8]. Наоборот, в формуле (29) рассматривается векторное поле переменной составляющей скорости $\mathbf{v}_{\sim}(\mathbf{r}, t)$, как функция координат и времени. В данной точке пространства в различные моменты времени эта скорость обусловлена колебаниями различных электронов. Матрица A зависит от постоянной компоненты скорости электрона, как от параметра.

Обратимся вновь к разложению (19). Пользоваться им удобно только в том случае, когда при вычислении необходимо удержать лишь небольшое число резонансных слагаемых. Исходя из аналогии с теорией колебаний [18], это будет в случае, когда

$$\Omega\tau \gg 1, \quad (30)$$

где τ — время релаксации системы для рассматриваемого процесса. При слабых магнитных полях, когда (30) не выполнено, пользование разложением (19) неудобно ввиду плохой сходимости ряда, а проведенное ниже качественное исследование теряет силу. Для слабых магнитных полей, когда выполнено противоположное неравенство: $\Omega\tau \ll 1$, годится другое приближение — можно рассматривать в формуле (18) ω' как медленно меняющуюся частоту и, следовательно, в формуле (16) произвести замену

$$\omega \rightarrow \omega - \beta u - kv \cos(\Omega t + \delta) \quad (31)$$

и усреднить по углу δ . Этот случай мы рассматривать не будем.

Перейдем к следующему этапу вычислений: необходимо, исходя из формулы (29), вычислить ток проводимости. Определим сначала функцию распределения. Те электроны, которые при наличии волны имеют скорость \mathbf{v} , имели бы при ее отсутствии скорость $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\sim}$, число их равно $Nf_0(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\sim})$. Поэтому и функция распределения при наличии волны будет $Nf_0(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\sim})$. Для изменения функции распределения φ , вызванного волной, имеем в линейном приближении

$$\varphi = Nf_0(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\sim}) - Nf_0(\mathbf{v}) = -N(\mathbf{v}_{\sim} \nabla_{\mathbf{v}}) f_0(\mathbf{v}). \quad (32)$$

Вычисляем переменную компоненту тока проводимости:

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} \varphi d\mathbf{v} = -eN \int \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) f_0(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (33)$$

Запишем (33) в координатной форме:

$$\begin{aligned} j_{\alpha} &= -eN \int v_{\alpha} v_{\beta} \frac{\partial}{\partial v_{\beta}} f_0(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \\ &= -eN \int \frac{\partial}{\partial v_{\beta}} v_{\alpha} v_{\beta} f_0(\mathbf{v}) d\mathbf{v} + eN \int f_0(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_{\beta}} v_{\alpha} v_{\beta} d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (34)$$

Первое слагаемое в (34) равно нулю, так как интеграл может быть преобразован в поверхностный. Таким образом

$$\mathbf{j} = eN \int f_0(\mathbf{v}) \{ \mathbf{v}_{\sim} + \mathbf{v} \operatorname{div}_{\mathbf{v}} \mathbf{v}_{\sim} \} d\mathbf{v}. \quad (35)$$

Выясним физический смысл полученного результата. Известно, что при наличии постоянной составляющей скорости \mathbf{v}_0 ток проводимости \mathbf{j} состоит из двух компонент [6, 11, 12]:

$$\mathbf{j}_{\sim} = \rho_0 \mathbf{v}_{\sim} + \rho_{\sim} \mathbf{v}_0, \quad (36)$$

где $\rho_0 = eN$ — постоянная и ρ_{\sim} — переменная компонента плотности электронного заряда. Первое слагаемое в (35) есть $\rho_0 \mathbf{v}_{\sim}$, второе — $\rho_{\sim} \mathbf{v}_0$. Поскольку различные электроны имеют различную скорость, то в (36) произведено усреднение при помощи функции распределения. Введя оператор B :

$$B = \{B_{\alpha\beta}\}; \quad B_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + v_{\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{\beta}}, \quad (37)$$

запишем выражение для тока в следующей форме:

$$\mathbf{j} = eN \int f_0(\mathbf{v}) B \mathbf{v}_{\sim} d\mathbf{v}. \quad (38)$$

Заметим, что формулы (37), (38) справедливы для любой пространственно-временной структуры поля и неоднородной плазмы в любых стационарных полях. Пользуясь (29), выразим ток проводимости через поле

$$\mathbf{j} = \frac{e^2 N}{mi} \left(\int f_0(\mathbf{v}) B A d\mathbf{v} \right) \mathbf{E}_0 e^{i\psi} \quad (39)$$

и окончательно для диэлектрической проницаемости имеем

$$\epsilon = 1 - (\omega_0^2 / \omega) \int f_0(\mathbf{v}) B A d\mathbf{v}. \quad (40)$$

Легко проверить, что при отсутствии магнитного поля

$$\mathbf{v}_{\sim} = \frac{e}{mi} \frac{\mathbf{E}}{(\omega - kv)}; \quad B_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{v_{\alpha} k_{\beta}}{(\omega - kv)}, \quad (41)$$

и формула (40) совпадает с результатами работы [6].

При вычислении ϵ следует учесть, что при резонансе, когда выполнено условие (21), подинтегральное выражение обращается в бесконечность, и интеграл теряет смысл. Поскольку мы интересуемся только колебаниями электронов, вызванными полем волны, а не какими-либо другими причинами, то следует положить

$$\gamma = \operatorname{Im} \omega < 0. \quad (42)$$

Таким образом поле \mathbf{E} и ток \mathbf{j} исчезают при $t = -\infty$, и автоматически исключаются процессы, не связанные с волной. В окончательном результате необходим предельный переход $\gamma \rightarrow 0$. Этот вопрос подробно разобран в работах [6, 14, 15]. Предельный переход в случае распространяющейся монохроматической волны эквивалентен деформации контура интегрирования и приводит к появлению в выражении для ϵ добавочных членов, обусловленных вычетом.

Нахождение закона дисперсии электромагнитных волн в средах с тензорной диэлектрической проницаемостью представляет собой довольно сложную математическую задачу. Качественные результаты можно получить, исходя непосредственно из выражения для ϵ . При фиксированных ω и \mathbf{k} тензор диэлектрической проницаемости может быть представлен в виде суммы:

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_1(\omega, \mathbf{k}) + i\epsilon_2(\omega, \mathbf{k}), \quad (43)$$

где $\epsilon_1(\omega, \mathbf{k})$, $\epsilon_2(\omega, \mathbf{k})$ — самосопряженные тензоры. Если $\epsilon_2 \mathbf{E} \mathbf{E}^* \neq 0$, то имеет место обмен энергией между волной и средой, в которой она распространяется. Наличие антиэрмитовой части ϵ в случае распространяющейся монохроматической волны обусловлено вычетом. Ясно, что в случае температурного равновесия в силу второго начала термодинамики всегда имеет место диссипация энергии волны, $\epsilon_2 \mathbf{E} \mathbf{E}^* < 0$, и самовозбуждение невозможно.

Для распространяющейся волны $\epsilon_1 \mathbf{E} \mathbf{E}^* > 0$; наоборот, при $\epsilon_1 \mathbf{E} \mathbf{E}^* < 0$ волна отражается, не проникает в плазму; соответствующая частота, волновой вектор и поляризация являются запрещенными. В работе [4] утверждается, что существуют щели в спектре — полосы из запрещенных частот, кратных гиромагнитной частоте:

$$\omega \sim m\Omega; \quad m \geq 2, \quad \omega > \Omega. \quad (44)$$

Займемся разбором этого утверждения. Отражение волны вызвано резонансными эффектами (21). Так как, согласно формуле (20), частота ω' зависит от $u = v_z$, различной для различных электронов, то для того, чтобы резонансные эффекты имели место для всех электронов, необходимо выполнение неравенства:

$$\beta u_0 \ll \Omega, \quad (45)$$

где u_0 — средняя величина разброса z -компоненты скорости электронов.

Вклад высших гармоник, согласно (28), пропорционален величине $J_n^2(kv/\Omega) C_n$, усредненной по всевозможным электронам при помощи функции распределения. Для грубой оценки можно заменить эту величину через $J_n^2(kv_0/\Omega) C_n$, где v_0 — среднее значение скорости в плоскости xy . Чтобы интенсивность высших гармоник была велика, необходимо выполнение условия

$$(kv_0/\Omega) \sim \alpha_n; \quad \alpha_n \sim n, \quad (46)$$

где α_n — аргумент функции Бесселя, при котором $J_n^2(\alpha)$ максимально. Для плазмы, находящейся в температурном равновесии, $u_0 \sim v_0$. Исследуем совместность условий резонанса на обертонах (45), (46). Условие (45) заведомо выполняется в случае сильных полей, $\Omega \rightarrow \infty$, в то время как (46) дает

$$\frac{kv_0}{\Omega} \ll 1; \quad J_n^2\left(\frac{kv_0}{\Omega}\right) \approx \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{kv_0}{\Omega}\right)^n\right]^2, \quad (47)$$

следовательно, в сильных полях влияние высших гармоник ничтожно. Это связано с тем обстоятельством, что при увеличении напряженности поля радиус спирали, по которой движется электрон, уменьшается и становится меньше длины волны. Поэтому для совместности (45) и (46) необходимо, чтобы было $\beta \ll k$ — угол между направлением распространения фазы волны и магнитным полем был близок к прямому. Используя (44), для таких волн выразим аргумент функции Бесселя через фазовую скорость волны v_ϕ :

$$\frac{kv_0}{\Omega} = \frac{\omega}{\Omega} \frac{v_0}{v_\phi} = m \frac{v_0}{v_\phi} \sim \alpha_n; \quad \beta \ll k. \quad (48)$$

Следовательно, для возникновения щелей в спектре плазмы необходимо, чтобы на частоте, кратной гиромагнитной (44), фазовая скорость была одного порядка с тепловой скоростью движения электронов: $v_0/v_\phi \gg 1$.

В электронном газе могут распространяться различные типы волн; чисто электродинамическую природу имеют радиоволны и плазменные волны. Так как, согласно (44), при резонансе на кратных частотах $\omega > \Omega$, то фазовая скорость радиоволн превышает скорость света. Воспользовавшись (46), (47), имеем

$$J_n^2 \left(\frac{kv_0}{\Omega} \right) = \left(\frac{m^n}{n!} \right)^2 \left(\frac{v_0}{v_\phi} \right)^{2n} \sim \left(\frac{v_0}{c} \right)^{2n}; \quad (49)$$

влияние высших гармоник совершенно ничтожно.

Рассмотрим теперь плазменные волны. Закон дисперсии плазменных волн сильно зависит от вида функции распределения и магнитного поля, фазовая скорость в несколько раз больше тепловой. В силу условия (44) можно считать, что, как и в отсутствие магнитного поля, частота распространяющихся плазменных волн близка к лэнгмюровской ω_0 . Поэтому для существования щелей в спектре плазменных волн необходимо, чтобы

$$\omega \sim \omega_0 = m\Omega; \quad m \geq 2. \quad (50)$$

Условие (50) связывает электронную концентрацию и напряженность магнитного поля; выполнение его маловероятно.

Незадействованную природу имеют звуковые волны в тяжелом молекулярном ионизованном газе, сопровождающиеся электрическим полем: Для этих волн фазовая скорость близка к скорости звука в молекулярном газе [16], т. е. по порядку величины совпадает с тепловой скоростью молекул газа. Для изотермической плазмы имеем

$$v_0/v_\phi \approx \sqrt{M/m} \sim 10^2 \div 10^3, \quad (51)$$

поэтому явления, связанные с резонансом на кратных частотах, могут быть довольно значительными.

Выводы

В работе вычислен тензор диэлектрической проницаемости плазмы, находящейся во внешнем стационарном магнитном поле. Показано, что в системе координат, связанной с движущимся электроном, поле монохроматической плоской волны оказывается частотно-модулированным, благодаря чему возникают резонансные эффекты на высших гармониках.

Дан критический разбор утверждения работы [4] о существовании щелей в спектре колебаний плазмы на частотах, кратных гиромагнитной.

Показано, что для существования щелей необходимо выполнение довольно жестких условий (45), (46). Исследование этих условий показывает, что в спектре радиоволн щели отсутствуют.

Повидимому, наиболее благоприятные условия для резонанса на кратных частотах имеют место в волнах неэлектродинамической природы, например, в звуковых волнах в ионизованном газе.

Автор выражает свою благодарность В. В. Потемкину за интересные замечания по работе.

Центральный научно-исследовательский институт
радиоизмерений

Поступила в редакцию
15 октября 1953 г.

Литература

- [1] А. И. Ахиезер и Л. Э. Паргаманик. Уч. зап. ХГУ, 27, 75, 1948.—
- [2] Г. В. Гордеев. ЖЭТФ, 23, 660, 1952; 24, 445, 1953.— [3] Б. Н. Гершман. ЖЭТФ, 24, 453, 669, 1953.— [4] Е. И. Гросс. Phys. Rev., 82, 232, 1951.—
- [5] В. Л. Гинзбург. ЖЭТФ, 21, 788, 1951.— [6] М. Е. Герценштейн. ЖЭТФ, 22, 303; 23, 669, 1952.— [7] Д. Габор. Proc. Roy. Soc., A 183, 436, 1945.—
- [8] Ф. Б. Левеллини. Инерция электронов, Гостехиздат, 1946.— [9] В. М. Лопухин. Генерирование радиоволн электронными потоками, ГИТТЛ, 1953.—
- [10] В. Л. Гинзбург. Распространение радиоволн в ионосфере, ГТИ, 1948.—
- [11] В. В. Степанов. Дифференциальные уравнения, ОНТИ, 1938.— [12] Лампа бегущей волны, Соврадио, 1952.— [13] Г. С. Горелик. Колебания и волны, гл. XI, ГИТТЛ, 1949.— [14] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 16, 574, 1946.— [15] А. И. Ахиезер и А. Г. Ситенко. ЖЭТФ, 23, 161, 1952.— [16] М. Е. Герценштейн. ЖЭТФ, 26, 57, 1954.

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ РАЗВИТИЯ ЛИДЕРА ДЛИННОЙ ИСКРЫ

И. С. Стекольников и М. А. Багиров

Исследуется зависимость скорости лидера длинной искры (50—400 см) от величины тормозного сопротивления ($R_t = 0,74 \div 100 \text{ к}\Omega$) в цепи искры, длины разрядного промежутка и степени перенапряжения на нем (в пределах $k = 1 \div 2$).

Время пробоя в длинных искровых промежутках практически определяется временем развития лидерного процесса. В связи с этим представляется важным определить скорость развития лидера в разрядном промежутке.

Целью настоящих исследований являлось выяснение зависимости скорости лидера длинной искры от величины «тормозного» сопротивления в цепи искры, длины разрядного промежутка и степени перенапряжения на разрядном промежутке. Применение новой методики измерений позволило произвести исследование слабо заторможенных лидеров и сравнить условия их развития с лидером сильно заторможенных разрядов.

Экспериментальная установка

Искры длиной от 50 до 400 см исследовались в промежутке «стержень—плоскость» при положительной полярности стержневого электрода. Источником высоких напряжений служил импульсный генератор (ГИН) с номинальным напряжением на выходе $U_{\text{ном}} = 3500 \text{ кV}$ и емкостью в разряде $C_p = 0,0182 \mu\text{F}$. Высоковольтный конец генератора соединялся с разрядным промежутком S_0 посредством «тормозного» сопротивления R_t , величина которого менялась от 0,74 до 1500 $\text{k}\Omega$.

Оптическая регистрация лидера производилась при помощи быстро вращающейся фотокамеры (максимальная линейная скорость фоторазвертки достигала 0,15 мм/мсек) и электрооптического затвора Керра (ЭОЗ). Одновременно осуществлялось осциллографирование лидерного тока.

На рис. 1 показана схема, применявшаяся для измерения скорости лидера электрооптическим затвором. Подробное описание схемы дано в работе [1]. Некоторой особенностью в данном случае является то, что необходимо было открыть ЭОЗ в лидерной стадии разряда и закрыть его до возникновения главного канала. С этой целью для управления работой затвора использовалось напряжение, обусловленное протеканием лидерного тока через сопротивление R_1 . Напряжение с сопротивления R_1 подводилось коротким экранированным кабелем L_k непосредственно к электродам ячейки ЭОЗ и через делитель $R_b + R_{\text{ш}}$ к отклоняющим пластинам электронного осциллографа ЭО. Разрядник S_k служил для среза напряжения на ячейке ЭОЗ в определенные моменты времени развития лидера. Путем среза напряжения на ячейке в различные моменты времени удалось проследить развитие лидера, вплоть до соприкосновения его с заземленной плоскостью P_1 .

На рис. 2 показаны одновременно полученные типичные осциллографма тока и фотография канала лидера, заснятая ЭОЗ. Срез напряжения на осциллограмме произошел в момент $t_l = 12,5 \cdot 10^{-6}$ сек.¹,

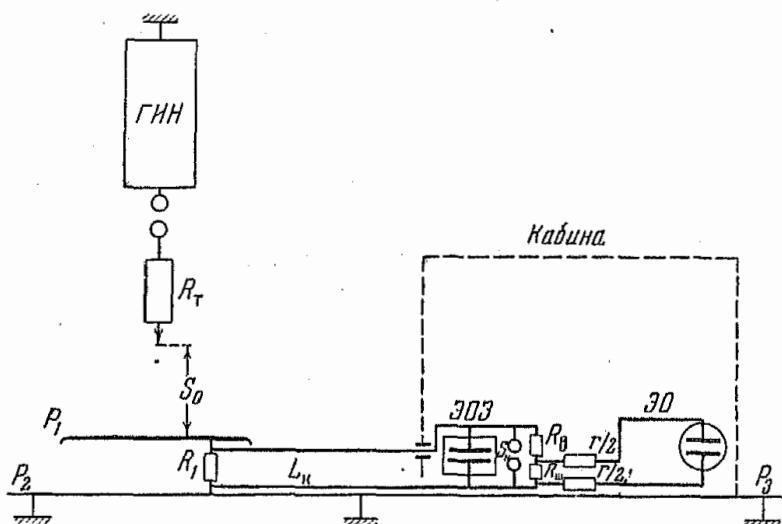


Рис. 1. Схема включения ЭОЗ и ЭО

а головка лидера прошла путь $l = 167$ см. Для анализа скорости лидера было получено 78 пар таких регистраций и обработано свыше 200 фоторазверток лидера.

Результаты опытов

В проведенных экспериментах были получены данные о средней скорости прорастания лидера $v_{l\text{ср}}$ в искровых промежутках различной длины S_0 , заторможенных разными сопротивлениями R_t в цепи. Средняя скорость лидера находилась делением длины разрядного промежутка, с учетом поправочного коэффициента 1,15, учитывающего пространственные извилины траектории лидера, на время развития лидера в разрядном промежутке.

Отметим, что определение времени развития лидера, произведенное по осциллографмам токов и фоторазверткам разряда при одинаковых условиях опыта, дало относительно близкие результаты (так при $R_t = 100-86 \text{ k}\Omega$ наибольшее расхождение не превышало 18%).

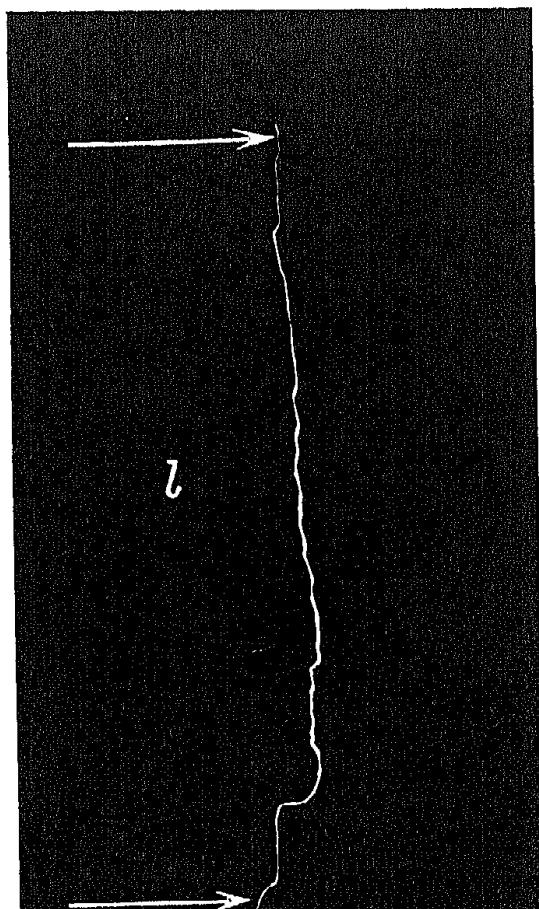
В табл. 1 приведены результаты подсчета средних скоростей лидера.

Нетрудно видеть, что при одном и том же R_t какой-либо определенной тенденции изменения средней скорости лидера от длины разрядного промежутка не имеется. Некоторое изменение скорости с ростом длины разрядного промежутка при больших торможениях нельзя считать убедительным, и оно лежит в пределах флюктуаций параметров разряда.

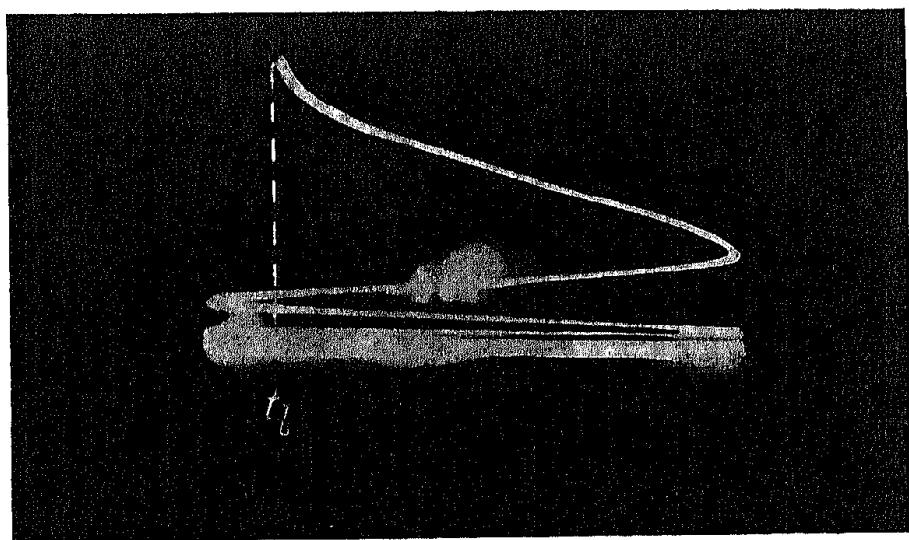
Исследование этого вопроса, произведенное ранее [2] для меньшего диапазона длины промежутков (38—183 см), также не выявило какой-либо зависимости изменения средней скорости лидера от длины разрядного промежутка. Полученные результаты дают основание полагать, что средняя скорость прорастания лидера не зависит от длины разрядного промежутка в пределах 50—400 см при U_0 , близком к U_{\min} .

¹ Для точного отсчета времени среза использовались осциллографмы с однократной разверткой.

К статье И. С. Стекольникова и М. А. Багирова «Исследование скорости развития лидера длинной искры»



a



b

Рис. 2. *a* — фотография канала лидера, $l = 167$ см, отсчет сверху;
b — осциллограмма тока, $t_l = 12,5 \cdot 10^{-6}$ сек. ($R_t = 0,74$ к Ω ,
 $S_0 = 200$ см)

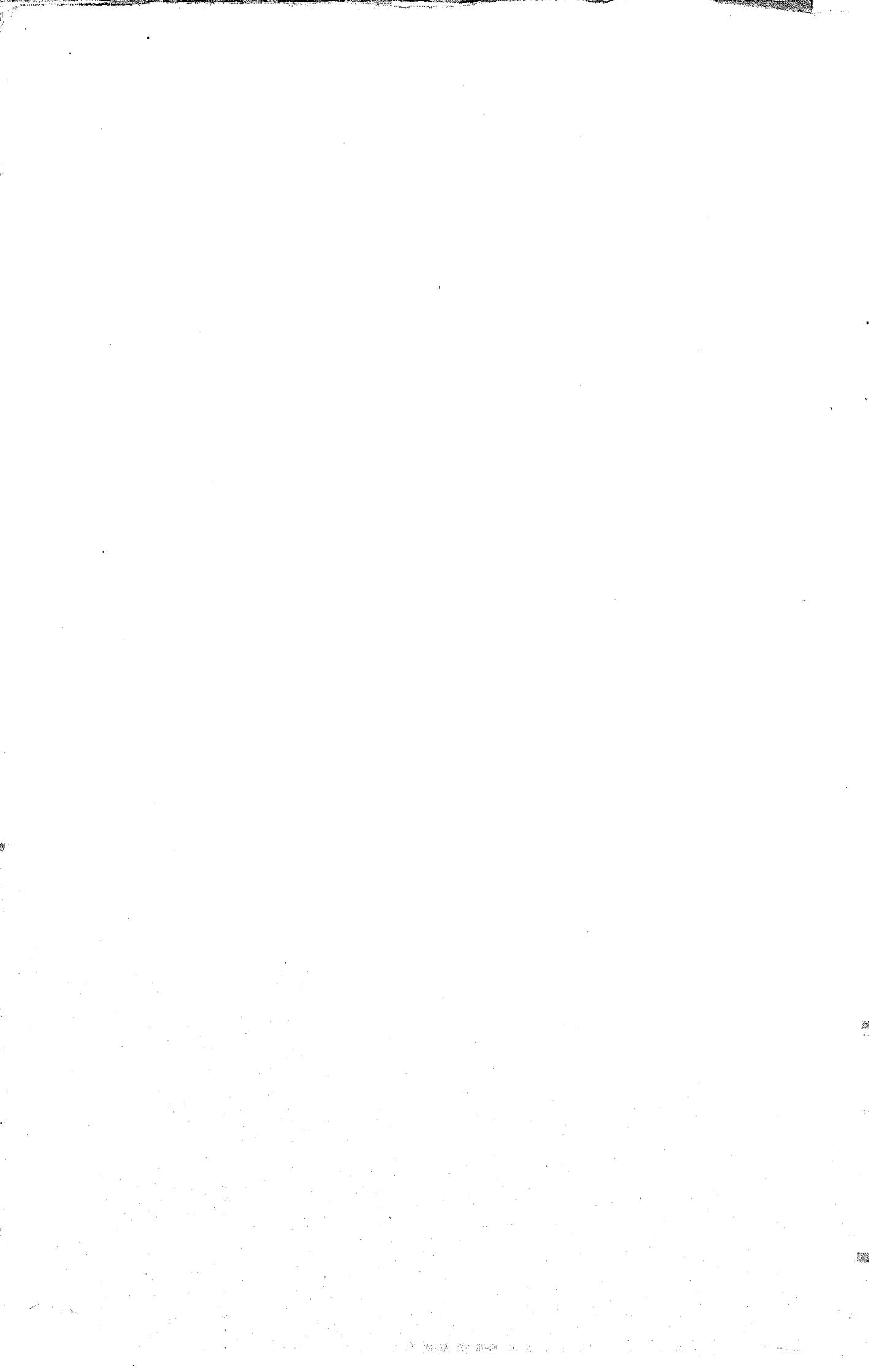


Таблица 1

№ п/п	$R_t, k\Omega$	$S_0, \text{см}$	$v_{l \text{ср}}, \text{см/сек.}$	Примечание
1	0,74	200	$1,54 \cdot 10^7$	
2	$1,65-1,6$	100	$1,18 \cdot 10^7$	Напряжение на разрядном промежутке, близкое к минимальному импульсному (U_{\min})
		200	$1,15 \cdot 10^7$	
		300	$1,23 \cdot 10^7$	
3	5,5—5	100	$6,75 \cdot 10^6$	
		200	$6,54 \cdot 10^6$	
		300	$6,4 \cdot 10^6$	
4	100—86	50	$2,86 \cdot 10^6$	
		100	$2,9 \cdot 10^6$	
		200	$3,0 \cdot 10^6$	
		300	$2,67 \cdot 10^6$	
		400	$2,7 \cdot 10^6$	
5	1500—1400	100	$1,05 \cdot 10^6$	
		300	$1,66 \cdot 10^6$	
		400	$1,54 \cdot 10^6$	

Основное влияние на скорость лидера оказывает тормозное сопротивление. С возрастанием R_t средняя скорость лидера уменьшается, что особенно резко обнаруживается для диапазона относительно малых сопротивлений $R_t = 1 \div 5 \text{ k}\Omega$. Уменьшение скорости лидера с возрастанием тормозного сопротивления может объясняться уменьшением тока, текущего через канал лидера, что, в свою очередь, приводит к уменьшению плотности ионизации на головке лидера. Увеличение R_t влечет за собой также снижение скорости нарастания напряжения на разрядном промежутке, что способствует росту времени пробоя и тем самым уменьшению скорости движения лидера.

Интересно отметить, что при очень слабо заторможенных разрядах ($R_t = 1,65 \text{ k}\Omega$ и меньше) лидер длинной искры обладает средней скоростью, превышающей 10^7 см/сек. Если предположить, что независимость $v_{l \text{ср}}$ от длины разрядного промежутка будет иметь место и при переходе к еще более длинным искрам, то заслуживает внимания тот факт, что измеренные для лидера молнии скорости $10^7 \div 10^8 \text{ см/сек.}$ [3] позволяют рассматривать лидерный разряд молнии как «заторможенный» процесс, где эффективное сопротивление подтекания заряда из тучи в канал имеет незначительную величину (порядка $R_t = 1 \text{ k}\Omega$).

На рис. 3 изображено изменение скорости лидера вдоль разрядного промежутка. Для сравнения воспроизведены кривые изменения скорости, полученные из двух произвольно выбранных фоторазверток разряда, и пунктиром показана величина средней скорости лидера, найденная усреднением из четырех измерений ($S_0 = 408 \text{ см}$, $R_t = 100 \text{ k}\Omega$). Из диаграммы $v_l = f(S_0)$ видно, что скорость лидера возрастает от некоторого начального значения и приобретает более или менее постоянную величину $v_{l \text{ср}} = (0,9 \div 1,1) \cdot 10^6 \text{ см/сек.}$ примерно в средней части разрядного промежутка.

В этот период, который условно можно назвать периодом «свободного развития», лидер менее всего подвержен приэлектродным влияниям. Продолжительность периода свободного развития лидера сокращается с уменьшением тормозного сопротивления в цепи искры и длины разрядного промежутка, т. е. с уменьшением полного времени

протекания разряда. Отметим, что периоду «свободного развития» лидера соответствует минимальное значение тока, текущего через канал лидера.

По мере приближения головки лидера к противоположному электроду (к земле) скорость лидера сильно возрастает, намного превосходя по величине среднюю скорость. Увеличение скорости по мере движения лидера к земле имеет место при всех значениях R_t и S_0 .

Многие авторы указывали, что бурное нарастание скорости лидера обычно начинается на последней четверти пути лидера. Наши исследования показали, что при сильно заторможенных разрядах (R_t — десятки и сотни килоом) быстрое увеличение скорости головки лидера начинается уже около середины промежутка. При слабо заторможенных искрах интенсивное нарастание скорости начинается уже в первой четверти пути лидера. Так, при $S_0 = 200$ см и $R_t = 0,74 \text{ k}\Omega$ резкое увеличение скорости лидера уже обнаруживается при прохождении лидером пути, составляющего $25 \div 30\%$ от всей

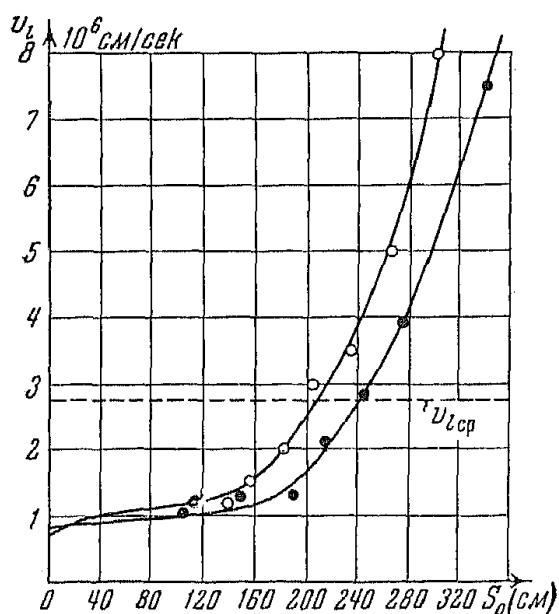


Рис. 3. Зависимость $v_l = f(S_0)$. ● — пленка № 54, ○ — пленка № 58; $S_0 = 408$ см; $R_t = 100 \text{ k}\Omega$

длины разрядного промежутка. Сказанное иллюстрирует рис. 4, где показаны кривые изменения скорости лидера вдоль разрядного промежутка при $R_t = 0,74 \text{ k}\Omega$ и $R_t = 100 \text{ k}\Omega$. Характер изменения скорости при разных R_t различен. В случае $R_t = 0,74 \text{ k}\Omega$ рост скорости лидера происходит более бурно. Скорость лидера в начале разрядного промежутка (S_0 до 44 см) при $R_t = 0,74 \text{ k}\Omega$ не удалось исследовать. Это объясняется тем, что при данных условиях эксперимента ввиду малой величины напряжения на ячейке ЭОЗ световой поток, пропускаемый им, оказался недостаточным для получения изображения на фотопленке канала лидера. Канал лидера на этих участках пути также обладает сравнительно слабой интенсивностью свечения.

При помощи ЭОЗ удалось оценить величину максимальной скорости лидера в конечной фазе его развития, т. е. непосредственно перед возникновением главного канала разряда. Известно, что ввиду чрезвычайно высо-

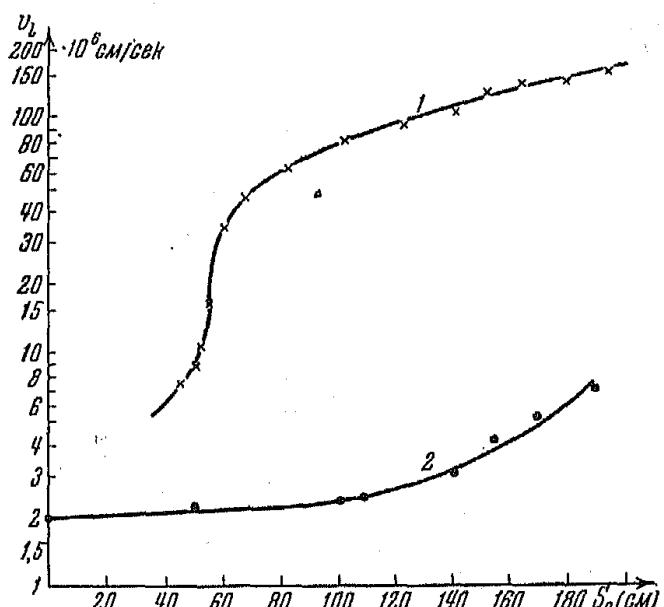


Рис. 4. Изменение скорости лидера вдоль разрядного промежутка при разных R_t . $S_0 = 200$ см. Напряжение на разрядном промежутке, близкое к минимальному импульсному. 1 — $R_t = 0,74 \text{ k}\Omega$; 2 — $R_t = 100 \text{ k}\Omega$

Таблица 2

№ п/п	S_0 , см	R_T , к Ω	k	v_{lcp} , см/сек
1	100	83	1	$2,94 \cdot 10^6$
	100	83	1,3	$3,37 \cdot 10^6$
	100	83	1,6	$4,17 \cdot 10^6$
	100	83	2	$5,0 \cdot 10^6$
2	200	83	1	$3,28 \cdot 10^6$
	200	83	1,3	$4,29 \cdot 10^6$
	200	83	1,6	$5,62 \cdot 10^6$
	200	83	2,0	$6,77 \cdot 10^6$
3	300	83	1	$3,1 \cdot 10^6$
	300	83	1,3	$5,3 \cdot 10^6$

кой скорости лидера и интенсивного светового излучения канала на обычных фоторазвертках разряда невозможно определить скорость лидера в конечной фазе его развития.

При $R_T = 0,74 \text{ к}\Omega$ лидер имеет максимальную скорость $v_{lmax} = (1,6 \div 1,65) \cdot 10^8 \text{ см/сек}$. Эта конечная скорость лидера превосходит приблизительно в 10 раз среднюю скорость лидера, подсчитанную при тех же условиях опыта.

Зависимость скорости лидера от перенапряжения на разрядном промежутке исследовалась следующим образом. После того как снималась фоторазвертка лидера при минимальном импульсном напряжении, при постоянной величине S_0 увеличивалось напряжение на промежутке. Время развития лидера находилось из фоторазвертки разряда путем измерения смещения лидера относительно главного канала.

Результаты измерений скорости приведены в табл. 2. Величины v_{lcp} в табл. 2 являются усредненными не менее, чем по данным трех замеров.

Скорость лидера возрастает примерно по линейному закону с увеличением кратности перенапряжения k . Так при увеличении перенапряжения в два раза средняя скорость лидера для $S_0 = 100 \text{ см}$ возрастает в 1,7 раза; для $S_0 = 200 \text{ см}$ скорость возрастает в 2,06 раза. Это не согласуется с данными, приводимыми в литературе [2], где утверждается, что при двукратном перенапряжении на разрядном промежутке скорость положительного лидера увеличивается лишь на 25%.

Выводы

В результате анализа экспериментальных материалов установлено следующее.

1. Средняя скорость прорастания лидера ($S_0 = 50 \div 400 \text{ см}$) при напряжении на разрядном промежутке, близком к минимальному импульсному, не зависит от длины разрядного промежутка.

2. Основное влияние на скорость развития лидера оказывает «тормозное» сопротивление в цепи искры. При уменьшении «тормозного» сопротивления R_T от 1500 до $0,74 \text{ к}\Omega$ средняя скорость лидера увеличивается от $1,5 \cdot 10^6$ до $1,54 \cdot 10^7 \text{ см/сек}$. Средняя скорость лидера при слабо заторможенных разрядах ($R_T = 1,65 \text{ к}\Omega$ и меньше) на участке «свободного развития» приближается по величине к скорости развития лидера молнии.

3. Скорость лидера не сохраняется постоянной вдоль разрядного промежутка и возрастает по мере продвижения лидера к заземленной плоскости. Характер изменения скорости лидера вдоль разрядного промежутка зависит от «тормозного» сопротивления; при торможении $R_t = 5 \text{ k}\Omega$ и меньше бурное нарастание скорости имеет место уже с четверти длины разрядного промежутка.

4. Максимальной скоростью лидер обладает непосредственно перед образованием главного канала. При $R_t = 0,74 \text{ k}\Omega$ лидер имеет максимальную скорость $(1,6 \div 1,65) \cdot 10^8 \text{ см/сек.}$

5. С увеличением перенапряжения, на разрядном промежутке в пределах $S_0 = 100 \div 300 \text{ см}$, средняя скорость лидера возрастает примерно по линейному закону.

Энергетический институт
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24 ноября 1953 г.

Литература

- [1] И. С. Стекольников. ДАН СССР, 85, 1013, 1952.—[2] Т. Allibone a. J. Meek. Proc. Roy. Soc., 166, 924, 1938.—[3] И. С. Стекольников. Физика молний и грозозащита, Изд-во АН СССР, 1943.

О РАЗРУШЕНИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ ПЛЕНОК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

A. B. Гуревич

Вопрос о разрушении магнитным полем сверхпроводимости пленок исследуется в рамках обобщенной теории сверхпроводимости Гинзбурга — Ландау [1-3]. Найдены поправки порядка x^2 к полученным ранее [1] выражениям для критического магнитного поля H_c сверхпроводящих пленок. Устранено расхождение между экспериментом и теорией, получившееся в [4].

1. Введение

Вопрос о разрушении сверхпроводимости пленок магнитным полем представляет большой экспериментальный и теоретический интерес. Теоретическое решение этого вопроса предложено в развитой Гинзбургом и Ландау обобщенной феноменологической теории сверхпроводимости [1-3]. В этой теории вводится эффективная волновая функция ψ сверхпроводящих электронов ($|\psi|^2$ играет роль концентрации сверхпроводящих электронов). Свободная энергия сверхпроводника выражается через ψ и векторный потенциал магнитного поля \mathbf{A} . Условие минимальности свободной энергии сверхпроводника в состоянии равновесия

$$F_{SH} = F_{s0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla\psi - \frac{e}{c} \mathbf{A}\psi \right)^2$$

приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + \frac{\partial F_{s0}(\psi, \psi^*)}{\partial \psi^*} &= 0; \\ \Delta \mathbf{A} = \frac{2\pi ie\hbar}{mc} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \frac{4\pi e^2}{mc^2} \mathbf{A} \psi^* \psi & \end{aligned} \quad (1)$$

и граничным условиям:

$$\mathbf{n} \left(-i\hbar\nabla\psi - \frac{e}{c} \mathbf{A}\psi \right) = 0,$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к границе.

При рассмотрении одномерной задачи, т. е. сверхпроводящего полупространства или пленки, уравнения (1) упрощаются:

$$\begin{aligned} d^2\psi' / dz'^2 &= \kappa^2 [- (1 - A'^2) \psi' + \psi'^3]; \\ d^2A' / dz'^2 &= \psi'^2 A'. \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия принимают вид:

для сверхпроводящего полупространства

$$\begin{aligned} \frac{d\psi'}{dz'} \Big|_{z'=0} &= 0; \quad \frac{d\psi'}{dz'} \Big|_{z'=\infty} = 0; \quad \psi' \Big|_{z'=\infty} = 1; \\ \frac{dA'}{dz'} \Big|_{z'=0} &= H_0'; \quad \frac{dA'}{dz'} \Big|_{z'=\infty} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

для пластинки толщиной $2d$ (точка $z = 0$ в середине пластиинки)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi'}{dz'} \Big|_{z'=d/\delta} &= \frac{d\psi}{dz'} \Big|_{z'=-d/\delta} = 0; \\ \frac{dA'}{dz'} \Big|_{z'=d/\delta} &= \frac{dA'}{dz'} \Big|_{z'=-d/\delta} = H'_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \psi' &= \frac{\psi}{\psi_\infty}; \quad z' = \frac{z}{\delta}; \quad A' = \frac{A}{V^2 H_{km}\delta}; \quad H' = \frac{dA'}{dz'} = \frac{H}{V^2 H_{km}}; \\ \psi_\infty^2 &= -\frac{\alpha}{\beta}; \quad \delta^2 = \frac{mc^2}{4\pi e^2 |\psi_\infty|^2}; \quad H_{km}^2 = \frac{4\pi\alpha^2}{\beta}; \quad \kappa^2 = \frac{\beta}{2\pi} \left(\frac{mc}{e\hbar} \right)^2. \end{aligned}$$

(Штрихи при новых переменных мы будем в дальнейшем опускать, за исключением тех случаев, когда они необходимы.) Далее, H_{km} — критическое магнитное поле для массивных сверхпроводников; δ — глубина проникновения поля в массивный сверхпроводник; κ^2 — параметр, зависящий от вещества сверхпроводника (для ртути $\kappa^2 = 0,027$ [1]; для олова $\kappa^2 = 0,020$ [4]; для индия $\kappa^2 = 0,011$ [4]).

В [1] уравнения (2) для пленок были решены в предположении, что $\kappa^2 = 0^1$. Это позволило найти зависимость глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник от величины напряженности поля и зависимость критического поля от толщины пленки: для тонких пленок ($d \ll d_k = 1,12\delta$)

$$H_k / H_{km} = \sqrt{6} \delta / d; \quad (5)$$

для пленок с $d > d_k$

$$\left(\frac{H_k}{H_{km}} \right)^2 = \frac{\psi_0^2 (2 - \psi_0^2)}{1 - [\operatorname{th}(\psi_0 d / \delta) / (\psi_0 d / \delta)]}, \quad (6)$$

$$\left(\frac{H_k}{H_{km}} \right)^2 = \frac{4\psi_0^2 (\psi_0^2 - 1) \operatorname{ch}^2(\psi_0 d / \delta)}{1 - [\operatorname{sh}(2\psi_0 d / \delta) / (2\psi_0 d / \delta)]}, \quad (7)$$

где ψ_0 — значение ψ в поле H_k (в предположении, что $\kappa = 0$, ψ не зависит от z). При этом для тонких пленок переход в сверхпроводящее состояние в присутствии магнитного поля является фазовым переходом II рода, в то время как для пленок с $d > d_k$ и для массивных образцов имеет место переход I рода, причем нормальная фаза может существовать и при $H < H_k$. Поэтому для образцов с $d > d_k$ переход в сверхпроводящее состояние сопровождается гистерезисом.

Экспериментальная проверка в общем хорошо подтвердила выводы новой теории сверхпроводимости (см. [4]). Однако при рассмотрении свойств пленок с $d > d_k$ Заварицкий [4], пользуясь при расчете формулой, верной лишь для очень толстых пленок (см. [1], формула (53))

$$H_k / H_{km} = 1 + (\delta / 2d), \quad (8)$$

получил расхождение между результатами теории и эксперимента. Результаты эксперимента, согласно [4], согласуются с формулой

$$H_k / H_{km} = 1 + (k\delta / 2d), \quad (9)$$

где константа $k \sim 1,5$.

¹ Как указано в [3] (стр. 99), найденное в [1] решение с $\kappa^2 \neq 0$ не корректно.

Целью настоящей работы являлось решение уравнений (2), в предположении, что $\kappa^2 \neq 0$, и нахождение поправок порядка κ^2 к полученным в [1] выражениям для критического магнитного поля H_c ; обсуждается также вопрос о сравнении теории с опытом в случае толстых пленок.

Поправки порядка κ^2 приведены в пп. 2, 3 [см. ниже формулы (30), (44), (47), (59)] и оказались невелики (менее 1%). В п. 2 показано, что расчет результатов, полученных в [4] не по формуле (8), а по более точной формуле (30), приводит к хорошему согласию с теорией.

2. Толстые пленки ($d > 2\delta$)

Рассмотрим уравнения (2) с граничными условиями (3), (4). Для полупространства $H_0^2 = H_0^2 / 2H_{km}^2 \leqslant 1/2$ и мы будем считать пластинки (пленки) толстыми, если $d \geqslant 2\delta$; в этом случае $H_0' \leqslant 0,75$. Поэтому как для полупространства, так и для толстых пластинок решение уравнений (2) можно искать в виде ряда по степеням $H_0'^2$. Учитывая, что ψ является четной функцией H_0 , а A — нечетной, можем записать

$$\begin{aligned}\psi &= \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{2n} \varphi_n; \\ A &= \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{2n-1} A_n.\end{aligned}\tag{10}$$

Для φ_0 получаем из (2)

$$d^2\varphi_0 / dz^2 = \kappa^2 \{-\varphi_0 + \varphi_0^3\}.\tag{11}$$

Интегрируя один раз это уравнение, находим

$$\frac{d\varphi_0}{dz} = \pm \sqrt{2\kappa} \left(\frac{\varphi_0^4}{4} - \frac{\varphi_0^2}{2} + C \right)^{1/2}$$

и устанавливаем, что φ_0 — монотонная функция от z . Следовательно, очевидное решение

$$\varphi_0 \equiv 1\tag{12}$$

есть единственное решение уравнения (11), удовлетворяющее граничным условиям (3), (4).

Подставляя (10) в (2) и учитывая (12), получаем для φ_n и A_n

$$\begin{aligned}d^2\varphi_n / dz^2 &= \kappa^2 [2\varphi_n + \chi_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}; A_1, \dots, A_n)]; \\ d^2A_n / dz^2 &= A_n + f_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}; A_1, \dots, A_{n-1}),\end{aligned}\tag{13}$$

где χ и f — некоторые функции указанных аргументов.

Отсюда

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \kappa^2 e^{-V\bar{\kappa}z} \int e^{\bar{\kappa}v} V\bar{\kappa}v dv \int e^{-V\bar{\kappa}t} \chi_n(t) dt; \\ A_n &= e^{-z} \int e^{2v} dv \int e^{-t} f_n(t) dt.\end{aligned}\tag{14}$$

В случае сверхпроводящего полупространства [граничные условия (3)] имеем

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 1; \quad A_1 = -e^{-z}; \quad \chi_1 = A_1^2 = e^{-2z}; \\ \varphi_1 &= \frac{\kappa^2}{2(2-\kappa^2)} e^{-2z} + C_1 e^{V\sqrt{2}\kappa z} + C_2 e^{-V\sqrt{2}\kappa z}.\end{aligned}$$

Границные условия (3) дают

$$\varphi_1 = \frac{\kappa^2}{2(2-\kappa^2)} e^{-2z} - \frac{V\sqrt{2}\kappa}{2(2-\kappa^2)} e^{-V\sqrt{2}\kappa z}. \quad (15)$$

Далее,

$$\begin{aligned}f_2 &= 2\varphi_1 A_1 = -\frac{V\sqrt{2}\kappa}{2-\kappa^2} \exp\{-z(1+V\sqrt{2}\kappa)\} + \frac{\kappa^2}{2-\kappa^2} e^{-3z}; \\ A_2 &= -\frac{V\sqrt{2}\kappa}{2(2-\kappa^2)} \left[\frac{\kappa}{4V^2} e^{-3z} - \frac{\exp\{-(1+V\sqrt{2}\kappa)z\}}{\kappa(V\sqrt{2}+\kappa)} + \frac{4V^2+8\kappa-3V\sqrt{2}\kappa^2-3\kappa^3}{4V\sqrt{2}\kappa(V\sqrt{2}+\kappa)} e^{-z} \right].\end{aligned} \quad (16)$$

Это приближение было найдено в [1]. Функции φ_1 и A_2 малы (по порядку κ); из (14) и (3) можно заключить, что $\varphi_n = [\alpha_n \kappa^n + O(\kappa^{n+1})]$, т. е. n -й член разложения имеет порядок малости $(\kappa H_0^2)^n$.

В случае сверхпроводящей пластинки [границные условия (4)] имеем

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 1; \quad A_1 = \operatorname{sh} z / \operatorname{ch} d; \quad \chi_1 = A_1^2 = \operatorname{sh}^2 z / \operatorname{ch}^2 d; \\ \varphi_1 &= \frac{1}{4\operatorname{ch}^2 d} \left(1 + \frac{\kappa^2 \operatorname{ch} 2z}{2-\kappa^2} \right) + C_1 e^{-V\sqrt{2}\kappa z} + C_2 e^{V\sqrt{2}\kappa z}.\end{aligned}$$

Используя граничные условия (4), определяем константы C_2 и C_1

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{4\operatorname{ch}^2 d} \left[1 - \frac{V\sqrt{2}\kappa \operatorname{sh} 2d}{(2-\kappa^2) \operatorname{sh} V\sqrt{2}\kappa d} \operatorname{ch} V\sqrt{2}\kappa z + \frac{\kappa^2}{2-\kappa^2} \operatorname{ch} 2z \right]. \quad (17)$$

Таким же образом находим A_2

$$\begin{aligned}A_2 &= \frac{1}{2\operatorname{ch}^3 d} \left[\frac{z \operatorname{ch} z}{2} - \frac{\operatorname{sh} 2d}{2(2-\kappa^2) \operatorname{sh} V\sqrt{2}\kappa d} \left(\frac{\operatorname{sh}(1+V\sqrt{2}\kappa)z}{2+V\sqrt{2}\kappa} - \frac{\operatorname{sh}(1-V\sqrt{2}\kappa)z}{2-V\sqrt{2}\kappa} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa^2}{4(2-\kappa^2)} \left(\frac{\operatorname{sh} 3z}{4} - z \operatorname{ch} z \right) + \frac{\alpha(d)}{\operatorname{ch} d} \operatorname{sh} z \right].\end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\alpha(d) &= - \left\{ \frac{\operatorname{ch} d}{2} + \frac{d \operatorname{sh} d}{2} - \frac{\operatorname{sh} 2d}{2(2-\kappa^2) \operatorname{sh} V\sqrt{2}\kappa d} \left[\frac{(1+V\sqrt{2}\kappa) \operatorname{ch}(1+V\sqrt{2}\kappa)d}{2+V\sqrt{2}\kappa} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(1-V\sqrt{2}\kappa) \operatorname{ch}(1-V\sqrt{2}\kappa)d}{2-V\sqrt{2}\kappa} \right] + \frac{\kappa^2}{4(2-\kappa^2)} \left(\frac{3}{4} \operatorname{ch} 3d - \operatorname{ch} d - d \operatorname{sh} d \right) \right\}.\end{aligned} \quad (19)$$

Найдем еще член 2-го приближения φ_2 и сравним его с φ_1 . Подставляя χ_2 в (14) и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned}\varphi_2(z) &= \frac{1}{2\operatorname{ch}^4 d} \left\{ \frac{\kappa^2}{8} (z \operatorname{sh} 2z - \operatorname{ch} 2z) - \frac{\kappa^2 \operatorname{sh} 2d}{16 \operatorname{sh} V\sqrt{2}\kappa d} \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{\operatorname{ch}(2+V\sqrt{2}\kappa)z}{(2+V\sqrt{2}\kappa)(1+V\sqrt{2}\kappa)} - \frac{\operatorname{ch}(2-V\sqrt{2}\kappa)z}{(2-V\sqrt{2}\kappa)(1-V\sqrt{2}\kappa)} \right] + \left(2 \frac{\alpha(d)}{\operatorname{ch} d} + \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa^2 \operatorname{ch} 2z}{8} \right) - \\ &\quad - \frac{\kappa^3}{8} \frac{\operatorname{sh} 2d}{\operatorname{ch} V\sqrt{2}\kappa d} \left[\frac{\operatorname{ch}(2+V\sqrt{2}\kappa)z}{2+V\sqrt{2}\kappa} + \frac{\operatorname{ch}(2-V\sqrt{2}\kappa)z}{2-V\sqrt{2}\kappa} - \frac{z \operatorname{sh} V\sqrt{2}\kappa z}{V\sqrt{2}\kappa} \right] - \\ &\quad - \frac{3}{16} - \frac{3\kappa^2}{16} \frac{\operatorname{sh} 2d}{\operatorname{sh} V\sqrt{2}\kappa d} z \operatorname{sh} V\sqrt{2}\kappa z + \frac{3\kappa^2}{32} \frac{\operatorname{sh}^2 2d}{\operatorname{sh}^2 V\sqrt{2}\kappa d} \left(\frac{\operatorname{ch} V\sqrt{2}\kappa z}{3} - 1 \right) + \\ &\quad \left. + C \operatorname{ch} V\sqrt{2}\kappa z + O(\kappa^4) \right\}.\end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$C = - \frac{\sqrt{2}\kappa}{\sinh V\sqrt{2}\kappa d} \left\{ \frac{2d \operatorname{ch} 2d - \operatorname{sh} 2d}{16} - \frac{\operatorname{sh} 2d}{32 \sinh V\sqrt{2}\kappa d} \left[\frac{\operatorname{sh}(2+V\sqrt{2}\kappa)d}{1+V\sqrt{2}\kappa} - \frac{\operatorname{sh}(2-V\sqrt{2}\kappa)d}{1-V\sqrt{2}\kappa} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh} 2d}{16} + \alpha(d) \operatorname{sh} d - \frac{\kappa d}{4V^2} \operatorname{th} V\sqrt{2}\kappa d + O(\kappa^2) \right\};$$

$$\left| \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right| \sim \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 d} + a\kappa \right); \quad a \sim 1.$$

Таким образом разложение фактически ведется по степеням $H_0^2 [(1/\operatorname{ch}^2 d) + \kappa]$, что обеспечивает быструю сходимость ряда. Если поместить начало координат не в середине пластинки, а у ее края, то $\varphi_1(z)$ в (17) и $A_2(z)$ в (18) переходят соответственно в $\varphi_1(z-d)$ и $A_2(z-d)$. Устремляя толщину пластинки $2d$ к бесконечности, т. е. переходя к полупространству, получаем из $\varphi_1(z-d)$, $A_2(z-d)$ соответствующее решение для полупространства (15), (16).

Переход пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное совершается в поле H_k , несколько большем, чем H_{km} (критическое поле для массивных сверхпроводников):

$$\left(\frac{H_k}{H_{km}} \right)^2 = 1 - \frac{8\pi\sigma}{\delta H_{km}^2}, \quad (21)$$

где поверхностное напряжение σ , как показано в [1], определяется следующим образом:

$$\sigma = \frac{H_{km}^2 \delta}{4\pi} \int_0^d \left[\frac{1}{2} - (1 - A^2) \psi^2 + \frac{\psi^4}{2} + \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 + H^2 - 2H_k H \right] dz. \quad (22)$$

Выражение (22) можно несколько упростить путем интегрирования по частям:

$$\sigma = \frac{H_{km}^2 \delta}{4\pi} \left\{ [(H - 2H_k) A]_0^d + \int_0^d \left[\frac{1}{2} (\psi^2 - 1)^2 + \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 \right] dz \right\}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (21) и используя (17), (18), находим критическое поле для толстых пленок

$$H_k^2 = \frac{1}{2} - \frac{I_1(d)}{d} H_k^2 - \frac{I_2(d)}{d} H_k^4 + H_k^6 O; \quad (24)$$

$$I_1(d) = - \operatorname{th} d;$$

$$I_2(d) = \frac{d}{4\operatorname{ch}^4 d} \left[\frac{\operatorname{sh} 2d}{2d} - \frac{1}{2} - \frac{V\sqrt{2}\kappa}{4(2-\kappa^2)} \frac{\operatorname{sh} 2d}{\sinh V\sqrt{2}\kappa d} \left(\frac{\operatorname{sh}(2+V\sqrt{2}\kappa)d}{(2+V\sqrt{2}\kappa)d} + \frac{\operatorname{sh}(2-V\sqrt{2}\kappa)d}{(2-V\sqrt{2}\kappa)d} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\kappa^2}{2(2-\kappa^2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sh} 4d}{8d} - \frac{\operatorname{sh} 2d}{2d} \right) \right]$$

и $O \sim 0,001$. Отсюда при $d \geq V\sqrt{2}\kappa$

$$H_k^2 = \frac{1}{2[1 - (\operatorname{th} d/d)]} \left[1 + \frac{\kappa(1 + \exp\{-2V\sqrt{2}\kappa d\})}{8V\sqrt{2}d[1 - (\operatorname{th} d/d)]^2} + O(\kappa^2) \right], \quad (25)$$

или (в первоначальных переменных):

$$\left(\frac{H_k}{H_{km}} \right)^2 = 1 + \frac{\delta}{d} \left[1 + \frac{\kappa}{8V^2} (1 + \exp\{-2V\sqrt{2}\kappa d/\delta\}) \right] +$$

$$+ \left(\frac{\delta}{d} \right)^2 \left[1 + \frac{3\kappa}{8V^2} (1 + \exp\{-2V\sqrt{2}\kappa d/\delta\}) \right] + O \left[\left(\frac{\delta}{d} \right)^3 \right]. \quad (26)$$

Для очень толстых пленок ($d \gg \delta / \sqrt{2\kappa}$) последнее выражение совпадает с найденным в [1]

$$\frac{H_k}{H_{km}} = 1 + \frac{\delta}{2d} \left(1 + \frac{\kappa^2}{8\sqrt{2}} \right). \quad (27)$$

При $d < \delta / \sqrt{2\kappa}$, разлагая $I_2(d)$ по степеням $\sqrt{2\kappa}d$, находим

$$I_2 = -\frac{d}{8 \operatorname{ch}^4 d} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2d}{2d} \right)^2 + \kappa^2 \frac{d\gamma(d)}{32 \operatorname{ch}^4 d}, \quad (28)$$

где

$$\gamma(d) = 1 + 3 \frac{\operatorname{sh} 4d}{4d} - 4 \left(\frac{\operatorname{sh} 2d}{2d} \right)^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{sh} 2d)^2. \quad (29)$$

Критическое поле для пленок с толщиной $2\delta < d < \delta / \sqrt{2\kappa}$:

$$H_k^2 = \frac{1}{2[1 - (\operatorname{th} d/d)]} \left[1 + \frac{[1 - (\operatorname{sh} 2d/2d)]^2}{16 \operatorname{ch}^4 d [1 - (\operatorname{th} d/d)]^2} - \kappa^2 \frac{\gamma(d)}{64 \operatorname{ch}^4 d} \right]. \quad (30)$$

Без учета поправки $\sim \kappa^2$ (30) совпадает с выражением, полученным из (6), (7), так как, если $\psi_0^2 = 1 - \alpha$; $\alpha \ll 1$, то из (7)

$$\alpha = H_k^2 \frac{(\operatorname{sh} 2d/2d) - 1}{2 \operatorname{ch}^2 d},$$

и из (6)

$$H_k^2 = \frac{1}{2[1 - (\operatorname{th} d/d)]} \left[1 + \frac{[1 - (\operatorname{sh} 2d/2d)]^2}{16 \operatorname{ch}^4 d [1 - (\operatorname{th} d/d)]^2} \right].$$

В работе Заварицкого [4] экспериментально исследовался вопрос о зависимости критического поля от толщины пленки. Как уже отмечалось, автор получил в общем хорошее совпадение с результатами теории. Однако при измерении зависимости H_k от d для толстых пленок получилось для δ_0 (глубины проникновения поля в сверхпроводник при $T = 0$) значение², в 1,5 раза превышающее значение δ_0 , измеренное на основании изучения зависимости H_k от d для тонких пленок:

	Тонкие пленки $\delta_0 \cdot 10^6$	Толстые пленки $\delta_0 \cdot 10^6$
Олово	$6,8 \pm 0,5$	$9,9 \pm 0,7$
Индий	$6,3 \pm 0,3$	$9,7 \pm 0,4$

Однако автор пользовался при расчете пленок с $2\delta < d < 7\delta$ формулой (8), верной только для очень толстых пленок $d \gg \delta / \sqrt{2\kappa}$. При этом, поскольку значение δ_0 определяется величиной $(H_k/H_{km}) - 1$, то, как видно из рис. 1, между результатами вычисления δ_0 по формуле (8) и по формуле (30), возникает значительное расхождение: от 18% при $d = 7$ до 70% при $d = 2$. Произведенный подсчет δ_0 по данным [4] для толстых пленок на основании формулы (30) приводит к следующим результатам:

² δ_0 определяется нами так же, как и в [5], из соотношения

$$\delta = \delta_0 [1 - (T/T_k)^4]^{-1/2}.$$

δ_0 в [4] ($\delta_0^{[4]}$) связано с δ_0 следующим образом:

$$\delta_0^{[4]} = (\sqrt{T_k}/2) \delta_0.$$

Олово	$\delta_0 = (6,5 \pm 0,6) \cdot 10^{-6}$
Индий	$\delta_0 = (6,4 \pm 0,5) \cdot 10^{-6}$

Полученные значения δ_0 хорошо согласуются с результатами [4] для тонких пленок. Значение $(H_k / H_{km}) - 1$ для достаточно толстых пленок $d \sim 4\delta$ становится весьма малым ($0,1 \div 0,15$); поэтому экспериментальная ошибка измерения δ_0 для толстых пленок больше, чем для тонких.

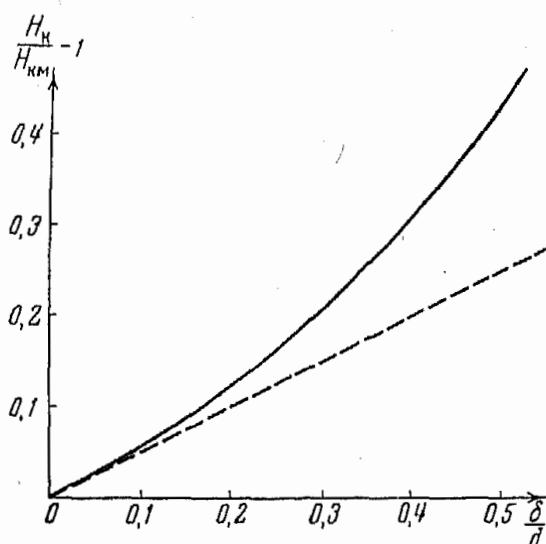


Рис. 1. Сплошная линия — расчет по формуле (30), пунктируя — по формуле (8)

Однако более тщательная обработка результатов измерения для толстых пленок, исключающая, например, ошибку в измерении толщины пленки (см. [5]), позволит уточнить значение δ_0 . Заметим, что подсчет глубины проникновения δ_0 по данным для критического поля, взятым из работы [5], дает значение δ_0 , сильно превышающее глубину проникновения, найденную по измерению магнитного момента пленок в [5]:

	Магнитный момент $\delta_0 \cdot 10^6$	Критическое поле $\delta_0 \cdot 10^6$
Олово	$5,0 \pm 0,1$	$6,6 \pm 0,7$
Индий	$6,4 \pm 0,3$	$7,6 \pm 1,0$
Свинец	$3,9 \pm 0,3$	$6,0 \pm 0,4$

Мы видим, что согласование результатов [4] и [5], полученных из измерения критического поля, вполне удовлетворительное ⁴.

3. Разрушение сверхпроводимости в тонких пленках

Решение уравнений (2) для тонких пленок будем искать, разлагая ψ и A в ряды по степеням параметра x^2

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + x^2 \psi_1 + x^4 \psi_2 + \dots, \\ A &= A_0 + x^2 A_1 + x^4 A_2 + \dots \end{aligned} \tag{31}$$

³ Разрушение идеального диамагнетизма сверхпроводящей пленки происходит в некотором интервале полей (см. [6]), причем H_k лежит вблизи нижней границы интервала; поэтому при измерении H_k возможна ошибка, из-за которой, повидимому, результаты измерения δ_0 по H_k систематически превышают результаты измерения δ_0 по величине магнитного момента пленки.

⁴ Автор пользуется случаем выразить благодарность Н. В. Заварницкому за обсуждение результатов настоящей работы.

Эти ряды хорошо сходятся в области $\kappa d / \delta < 1$ [см. (28)], т. е. такое разложение хорошо применимо для тонких пленок.

Для нулевого приближения, найденного в [1], имеем из (2) и (3)

$$\frac{d^2\psi_0}{dz^2} = 0; \quad \frac{d\psi_0}{dz}(d) = \frac{d\psi_0}{dz}(-d) = 0;$$

$$\frac{d^2A_0}{dz^2} = \psi_0^2 A_0; \quad \frac{dA_0}{dz}(d) = \frac{dA_0}{dz}(-d) = H_0.$$

Отсюда

$$\psi_0 = \text{const}; \quad A_0 = \frac{H_0}{\psi_0} \frac{\sinh \psi_0 z}{\cosh \psi_0 d}. \quad (32)$$

Для 1-го приближения:

$$\frac{d^2\psi_1}{dz^2} = \psi_0 \left(-1 + \frac{H_0^2}{\psi_0^2} \frac{\sinh^2 \psi_0 z}{\cosh^2 \psi_0 d} + \psi_0^2 \right).$$

Вводя коэффициенты:

$$\beta = H_0^2 / 2\psi_0 \cosh^2 \psi_0 d; \quad \alpha = \psi_0 (\psi_0^2 - 1) - \beta, \quad (33)$$

находим

$$\psi_1 = (\alpha / 2) z^2 + (\beta / 4\psi_0^2) (\cosh 2\psi_0 z - 1 - b) + az, \quad (34)$$

где a и b — постоянные интегрирования.

Границные условия (3) дают

$$a = 0;$$

$$ad + (\beta / 4\psi_0^2) 2\psi_0 \sinh 2\psi_0 d = 0$$

или

$$H_0^2 = \frac{2\psi_0^2 (\psi_0^2 - 1) \cosh^2 \psi_0 d}{1 - (\sinh 2\psi_0 d / 2\psi_0 d)}. \quad (35)$$

Это уравнение связывает константу ψ_0 с толщиной пленки d и величиной магнитного поля H_0 . Так, если ψ_0 близко к нулю, то

$$\psi_0^2 = \frac{1 - \frac{1}{3} H_0^2 d^2}{1 - \frac{4}{5} d^2}. \quad (36)$$

Таким образом ψ_0 определяется из требования выполнения граничных условий для ψ_1 . Аналогично, константа b определяется из граничных условий для ψ_2 .

Найдем теперь A_1 .

$$\frac{d^2A_1}{dz^2} = \psi_0^2 A_1 + H_0 \left[\alpha z^2 + \frac{\beta}{2\psi_0^2} (\cosh 2\psi_0 z - 1 - b) \right] \frac{\sinh \psi_0 z}{\cosh \psi_0 d} = \psi_0^2 A_1 + f(z);$$

$$A_1 = e^{\psi_0 z} \int^z e^{-2\psi_0 v} dv \int^v e^{\psi_0 t} f(t) dt.$$

Интегрируя и используя граничные условия:

$$\frac{dA_1}{dz}(d) = \frac{dA_1}{dz}(-d) = 0,$$

находим

$$A_1 = \frac{H_0}{\operatorname{ch} \psi_0 d} \left(\frac{\alpha}{6\psi_0} z^3 \operatorname{ch} \psi_0 z - \frac{\alpha}{4\psi_0^2} z^2 \operatorname{sh} \psi_0 z + \frac{\alpha}{4\psi_0^3} z \operatorname{ch} \psi_0 z + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{32\psi_0^4} \operatorname{sh} 3\psi_0 z - \frac{(3+2b)\beta}{8\psi_0^3} z \operatorname{ch} \psi_0 z + O_1 \operatorname{sh} \psi_0 z \right), \quad (37)$$

где

$$O_1 = -\frac{1}{\psi_0 \operatorname{ch} \psi_0 d} \left[\frac{\alpha}{6} d^3 \operatorname{sh} \psi_0 d + \frac{\alpha}{4\psi_0} d^2 \operatorname{ch} \psi_0 d - \frac{2\alpha + (3+2b)\beta}{8\psi_0^2} d \operatorname{sh} \psi_0 d + \right. \\ \left. + \frac{3\beta}{32\psi_0^3} \operatorname{ch} 3\psi_0 d + \frac{2\alpha - (3+2b)\beta}{8\psi_0^3} \operatorname{ch} \psi_0 d \right]. \quad (38)$$

Для поля H внутри пленки имеем

$$H_1(z) = \frac{H_0}{\operatorname{ch} \psi_0 d} \left[\frac{\alpha}{6} z^3 \operatorname{sh} \psi_0 z + \frac{\alpha}{4\psi_0} z^2 \operatorname{ch} \psi_0 z - \frac{2\alpha + (3+2b)\beta}{8\psi_0^2} z \operatorname{sh} \psi_0 z + \right. \\ \left. + \frac{2\alpha - (3+2b)\beta}{8\psi_0^3} \operatorname{ch} \psi_0 z + \frac{3\beta}{32\psi_0^3} \operatorname{ch} 3\psi_0 z + \psi_0 O_1 \operatorname{ch} \psi_0 z \right]. \quad (39)$$

Определим теперь константу b . Из (2) и (31) имеем

$$\frac{d^2 \psi_2}{dz^2} = -\psi_1 + 2A_0 A_1 \psi_0 + A_0^2 \psi_1 + 3\psi_0^2 \psi_1.$$

Эта функция — четная. Кроме того, из граничных условий имеем

$$\frac{d\psi_2}{dz} (\pm d) = 0. \quad (40)$$

Отсюда следует

$$\frac{d\psi_2}{dz} (z) = \int_0^z \frac{d^2 \psi_2}{dz^2} dz.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{d\psi_2}{dz} (d) = (3\psi_0^2 - 1) \left[\frac{\alpha}{6} d^3 + \frac{\beta}{4\psi_0^2} \left(\frac{\operatorname{sh} 2\psi_0 d}{2\psi_0} - (b+1)d \right) \right] + \frac{H_0^2}{2\psi_0 \operatorname{ch}^2 \psi_0 d} \times \\ \times \left[-\frac{\alpha d^3}{6\psi_0} + \frac{\alpha d^2}{4\psi_0^2} \operatorname{sh} 2\psi_0 d - \frac{\alpha}{4\psi_0^3} d \operatorname{ch} 2\psi_0 d + \frac{(3+2b)\beta d}{8\psi_0^3} + \frac{\beta}{32\psi_0^4} \operatorname{sh} 4\psi_0 d + \right. \\ \left. + \frac{\alpha - (2+b)\beta}{8\psi_0^4} \operatorname{sh} 2\psi_0 d \right] + \frac{H_0^2}{\psi_0 \operatorname{ch}^2 \psi_0 d} \left[\frac{\alpha}{12\psi_0} d^3 (\operatorname{ch} 2\psi_0 d + 1) - \frac{\alpha}{4\psi_0^2} d^2 \operatorname{sh} 2\psi_0 d + \right. \\ \left. + \frac{3(2\alpha - \beta) - 2b\beta}{16\psi_0^3} d \operatorname{ch} 2\psi_0 d + \frac{\beta}{128\psi_0^4} \operatorname{sh} 4\psi_0 d - \right. \\ \left. - \frac{12\alpha - 5\beta - 4b\beta}{64\psi_0^4} \operatorname{sh} 2\psi_0 d + \psi_0 d \left(\frac{\operatorname{sh} 2\psi_0 d}{2\psi_0 d} - 1 \right) O_1 \right]. \quad (41)$$

Из (40) и (41) определяем

$$b = \left\{ (3\psi_0^2 - 1) \left(\frac{\operatorname{sh} 2\eta}{2\eta} - 1 - \frac{2\eta^2 \operatorname{sh} 2\eta}{3} \right) + \frac{2H_0^2}{\operatorname{ch}^2 \eta} \left[-\frac{d^2 \operatorname{sh} 2\eta}{12\eta} (1 + 2\eta \operatorname{th} \eta) + \right. \right. \\ \left. + \frac{d^2 (\operatorname{sh} 2\eta)^2}{(2\eta)^2} \left(1 + \frac{1}{\eta^2} \right) - \frac{15}{16\psi_0^2} \frac{\operatorname{sh} 4\eta}{4\eta} - \frac{19 + 12\eta \operatorname{th} \eta}{16\psi_0^2} + \frac{5\operatorname{ch} 2\eta}{8\psi_0^2} + \frac{1}{2\psi_0^2} \frac{\operatorname{sh} 2\eta}{2\eta} (1 - \eta^2) \right] \times \\ \times \left. \left\{ 3\psi_0^2 - 1 - \frac{H_0^2}{2\psi_0^2 \operatorname{ch}^2 \eta} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2\eta}{\eta} + 2\eta \operatorname{th} \eta - \operatorname{th} \eta \cdot \operatorname{sh} 2\eta + \operatorname{ch} 2\eta \right) \right\}^{-1} \right\}. \quad (42)$$

Здесь $\eta = \psi_0 d$.

Переход из сверхпроводящего состояния в нормальное под действием магнитного поля является для пленок с толщиной $d > d_k$ фазовым переходом I рода. Критическое поле для фазового перехода I рода определяется соотношениями (21), (22).

Подставляем в (21) и (22) найденные значения Ψ , A и H :

$$H_k^2 = \frac{\psi_0^2(2 - \psi_0^2)}{2} + H_k^2 \frac{\operatorname{th} \psi_0 d}{\psi_0 d} - \chi^2 \frac{2}{d} I. \quad (43)$$

Здесь

$$I = -\psi_0 I_1 + \psi_0 I_4 + \psi_0^2 I_3 + \psi_0^3 I_1 + \frac{1}{2} I_2 + I_5 - H_0 [A_1(d) - A_1(0)];$$

$$I_1 = \int_0^d \psi_1 dz; \quad I_2 = \int_0^d \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 dz; \quad I_3 = \int_0^d A_0 A_1 dz;$$

$$I_4 = \int_0^d A_0^2 \psi_1 dz; \quad I_5 = \int_0^d H_0(z) H_1 dz.$$

Интегрируя и используя соотношение (35), получаем окончательно для фазового перехода I рода

$$H_k^2 = \frac{\psi_0^2(2 - \psi_0^2)}{2[1 - (\operatorname{th} \eta/\eta)]} - \chi^2 \frac{(\psi_0^2 - 1)^2}{2[1 - (\operatorname{th} \eta/\eta)][1 - (\operatorname{sh} 2\eta/2\eta)]^2} \times \\ \times \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{\operatorname{sh} 4\eta}{4\eta} - \left(\frac{\operatorname{sh} 2\eta}{2\eta} \right)^2 - \frac{\operatorname{sh}^2 2\eta}{6} \right]. \quad (44)$$

Здесь $\eta = \psi_0 d$ и ψ_0 определяется соотношением (35).

Из (35) видно, что с увеличением поля концентрация свободных электронов $|\psi|^2$ убывает, и если она обратится в нуль, то пленка перейдет в нормальное состояние, причем будет иметь место фазовый переход II рода. Из (31) следует, что

$$\psi^2 = \psi_0^2 + \chi^2 2\psi_0 \psi_1 + O(\chi^4). \quad (45)$$

Подставляя сюда ψ_1 из (34) и учитывая (33), (42), находим при $\psi_0^2 \rightarrow 0$

$$\psi^2 = \psi_0^2 + \frac{8(\chi d)^2}{105(1 - 4/5d^2)} + O(\chi^4; \chi^2 \psi_0^2). \quad (46)$$

Из (35), полагая $\psi^2 \rightarrow 0$, находим критическое поле для фазового перехода II рода

$$\left(\frac{H_k}{H_{km}} \right)^2 = \frac{6\delta^2}{d^2} \left[1 + \frac{8}{105} \left(\frac{\chi d}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (47)$$

Этот результат совпадает с получаемым из (44) при малых концентрациях сверхпроводящих электронов ($\psi \rightarrow 0$).

Как видно из (46), в точке $d = d_k = \sqrt{5}/2$ [точнее, в точке

$$5\psi_0^2 - 3 + \frac{\psi_0^2 - 1}{1 - (\operatorname{sh} 2\psi_0 d / 2\psi_0 d)} 2\psi_0 d \operatorname{th} \psi_0 d = 0, \quad (48)$$

т. е. в точке максимума кривой $H_k^2(\psi_0^2)$ (35)] первая поправка к ψ_0^2 обращается в бесконечность. Следовательно, в этой точке и в некоторой ее окрестности ряд (31) расходится, и выражения для величины кри-

тического поля (43), (44), (47) неприменимы. (При $\kappa \sim 0,2 \div 0,3$ область, в которой неприменимы выражения (43), (44), (47), определяется условием:

$$|d - d_k| \ll \kappa. \quad (49)$$

Оценка области сходимости ряда (31) производится при помощи теоремы Пуанкаре [7].)

Найденные выражения для H_k при $\kappa = 0$ совпадают с полученными в [1]. Поправки порядка κ^2 в (44), (47) малы. Как видно из (34), (42), при ψ_0 , стремящемся к нулю, первая поправка порядка κ^2 , т. е. ψ_1 , неограниченно возрастает, хотя ψ^2 с точностью до членов порядка κ^2 остается конечной. Конечной остается также поправка $\sim \kappa^2$ к H_k в (43). Если произвести подстановку $\psi^2 = u$ в уравнениях (2) и разложение (31) провести уже для u и A , можно избежать указанной расходимости:

при

$$u_0 \rightarrow 0, \quad u_1 \rightarrow \frac{8(xd)^2}{105(1 - 4/d^2)}. \quad (49)$$

Для проверки наших результатов найдем в заключение решение для очень тонких пленок $d \ll \delta$. В этом случае решение можно найти, разлагая его в ряд по степеням $z' = z/\delta \ll 1$.

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} z^n; \\ A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{(n)}(0)}{n!} z^n. \end{aligned} \quad (50)$$

Границные условия для пленки толщиной $2d$ (от 0 до $2d$):

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\psi}{dz} \right|_{z=0} &= \left. \frac{d\psi}{dz} \right|_{z=2d} = 0; \\ \left. \frac{dA}{dz} \right|_{z=0} &= \left. \frac{dA}{dz} \right|_{z=2d} = H_0. \end{aligned} \quad (51)$$

Используя уравнение (2) и граничные условия (51), находим $\psi^{(n)}(0)$ и $A^{(n)}(0)$:

1. $\psi(0) = \psi^0.$
2. $\psi^{(1)}(0) = 0.$
3. $\psi^{(2)}(0) = \kappa^2 \psi^0 [A_0^2 - 1 + \psi^{0^2}].$
4. $\psi^{(3)}(0) = 2\kappa^2 \psi^0 H_0 A_0.$
5. $\psi^{(4)}(0) = \kappa^2 (2H_0^2 \psi^0 + 2A_0^2 \psi^{0^2}) + \kappa^4 \psi^0 (A_0^2 - 1 + \psi^{0^2}) (A_0^2 - 1 + 3\psi^{0^2}). \quad (52)$
6. $\psi^{(5)}(0) = \kappa^2 (8H_0 A_0 \psi^{0^2}) + \kappa^4 [8A_0^3 H_0 \psi^0 - 8A_0 H_0 \psi^0 + 12A_0 H_0 \psi^{0^2}].$
7. $\psi^{(6)}(0) = \kappa^2 [8\psi^{0^5} A_0^2 + 8\psi^{0^3} H_0^2] + \kappa^4 [-14H_0^2 \psi^0 + 18\psi^{0^3} H_0^2 - 18\psi^{0^5} A_0^2 + 18\psi^{0^3} A_0^4 + 22\psi^{0^5} A_0^2 + 30H_0^2 A_0^2 \psi^0] + O(\kappa^6).$

Выпишем еще члены, содержащие наивысшую степень H_0 (так как $H_k \sim 1/d$).

8. $\psi^{(7)}(0) = \kappa^2 (32A_0 H_0 \psi^{0^6}) + \kappa^4 (60H_0^3 A_0 \psi^0) + O_7.$
9. $\psi^{(8)}(0) = \kappa^2 (32A_0^2 \psi^{0^7} + 32H_0^2 \psi^{0^6}) + \kappa^4 (60H_0^4 \psi^0) + O_8.$

Все невыписанные коэффициенты $\psi^{(n)}(0)$ имеют более высокий порядок по d^2 или по x^2 . Для A :

1. $A(0) = A_0$.
 2. $A^{(1)}(0) = H_0$.
 3. $A^{(2)}(0) = \psi^{0^2} A_0$.
 4. $A^{(3)}(0) = \psi^{0^2} H_0$.
 5. $A^{(4)}(0) = \psi^{0^4} A_0 + 2\psi^{0^2} A_0 x^2 (A_0^2 - 1 + \psi^{0^2})$.
 6. $A^{(5)}(0) = \psi^{0^4} H_0 + 2\psi^{0^2} x^2 [H_0 (A_0^2 - 1 + \psi^{0^2}) + 2A_0^2 H_0]$.
- (53)

При $\psi^0 \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow 0$, а $A \rightarrow H_0 z + A_0$. Здесь переход при ψ^0 , стремящемся к нулю, гладкий: $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots$ не имеют расходимостей.

Из (51) определяем A_0 и ψ^0 :

$$H_0 = \frac{dA}{dz}(2d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{(n)}(0)}{(n-1)!} (2d)^{n-1}. \quad (54)$$

Подставляя сюда $A^{(n)}(0)$ из (53), находим, что (54) удовлетворяется:

- a) при $\psi^{0^2} = 0$,
- б) при $\psi^{0^2} \neq 0$;

тогда

$$A_0 = -H_0 d \left\{ 1 - \frac{\psi^{0^2} d^2}{3} + (xd)^2 \left[\frac{2}{3} (1 - \psi^{0^2}) - \frac{2}{5} H_0^2 d^2 \right] + O(d^4; x^2 d^4; x^4) \right\}. \quad (55)$$

Для определения ψ^0 имеем

$$0 = \frac{d\psi}{dz}(2d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(0)}{(n-1)!} (2d)^{n-1}. \quad (56)$$

Используя (52) и (55), получаем отсюда

$$\begin{aligned} \psi^{0^2} &= 1 - \frac{H_0^2 d^2}{3} + \frac{4}{5} d^2 \frac{H_0^2 d^2}{3} \left(1 - \frac{H_0^2 d^2}{3} \right) + \\ &+ (xd)^2 \left[\frac{H_0^2 d^2}{3} \left(-\frac{4}{15} + \frac{12}{35} \frac{H_0^2 d^2}{3} \right) \right] + O(x^4; d^6; H_0^2 d^8; x^2 d^4 \dots). \end{aligned} \quad (57)$$

Найдем теперь критическое магнитное поле (21), (22)

$$H_k^2 = \frac{1}{2} - \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{2d}; \quad (58)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2d} \psi^2 dz = \psi^{0^4}(2d) + \psi^{0^2} \psi^{(2)} \frac{(2d)^3}{3} + \frac{2\psi^0 \psi^{(3)}}{3!} \frac{(2d)^4}{4} + \\ &+ \frac{2\psi^0 \psi^{(4)}}{4!} \frac{(2d)^5}{5} + O(x^4, d^6); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{2d} \psi^4 dz = \frac{1}{2} \left[\psi^{0^4}(2d) + 4\psi^{0^2} \frac{\psi^{(2)}}{2!} \frac{(2d)^3}{3} + 4\psi^{0^2} \frac{\psi^{(3)}}{3!} \frac{(2d)^4}{4} + \right. \\ &\left. + 4\psi^{0^2} \frac{\psi^{(4)}}{4!} \frac{(2d)^5}{5} \right] + O(x^4, d^6); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{1}{\kappa^2} \int_0^{2d} \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 dz = \frac{1}{\kappa^2} \left[\psi^{(2)^2} \frac{(2d)^3}{3} + \frac{2\psi^{(2)}\psi^{(3)}}{2!} \frac{(2d)^4}{4} + \frac{2\psi^{(2)}\psi^{(4)}}{3!} \frac{(2d)^5}{5} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\psi^{(3)^2}}{(2!)^2} \frac{(2d)^5}{5} + \frac{2\psi^{(3)}\psi^{(4)}}{2!3!} \frac{(2d)^6}{6} + \frac{\psi^{(4)^2}}{(3!)^2} \frac{(2d)^7}{7} \right] + O(\kappa^4, d^6); \\
 I_4 &= \int_0^{2d} (A^2\psi^2 + H^2 - 2H_0H) dz = -2dH_0^2 + A_0^2\psi^{(0)^2}(2d) + \\
 &\quad + 2A_0H_0\psi^{(0)} \frac{(2d)^2}{2} + (H_0^2\psi^{(0)^2} + 2A_0^2\psi^{(0)^4}) \frac{(2d)^3}{3} + \frac{7}{3}(A_0H_0\psi^{(0)}) \frac{(2d)^4}{4} + \\
 &\quad + \frac{7}{12}H_0^2\psi^{(0)} \frac{(2d)^5}{5} + O(d^4; H_0^2d^6\dots).
 \end{aligned}$$

Используя теперь (52), (53), (55), находим, что (58) удовлетворяет-
ся при $\psi^{(0)} = 0$, т. е. имеет место фазовый переход II рода. Из (57)
получаем, что для этого перехода

$$\left(\frac{H_k}{H_{km}} \right)^2 = \frac{6\delta^2}{d^2} \left[1 + \frac{8}{105} \left(\frac{\kappa d}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (59)$$

Уравнение (58) удовлетворяется также при отрицательных ψ^2 , что
не имеет физического смысла. Соотношение (59), как это и должно
быть, получается из (46) при $d \ll 1$. Из (57) видно также,
что если $\psi^{(0)} [см. (36)]$ стремится к нулю (т. е. $1/3 H_0^2 d^2 \rightarrow 1$), то $\psi^{(0)} \rightarrow \rightarrow (8/105) \kappa^2 d^2 + O(\kappa^4\dots)$. Этот результат совпадает с (45) для очень
тонких пленок. Отметим, что полученные нами поправки порядка κ^2
к H_k [см. (25), (30), (43), (44), (47)] малы (порядка 0,1%—0,3%) и лежат
пока за пределами точности эксперимента.

В заключение автор выражает глубокую признательность своему
руководителю проф. В. Л. Гинзбургу за внимание и многочисленные
советы.

Поступила в редакцию
24 сентября 1953 г.

Литература

- [1] В. Л. Гинзбург и Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 20, 1064, 1950.—[2] В. Л. Гинз-
бург. Усп. физ. наук, 42, 169, 1950.—[3] В. Л. Гинзбург. Усп. физ. наук,
48, 25, 1952.—[4] Н. В. Заварецкий. ДАН СССР, 78, 665, 1951; 82, 229, 1952.—
[5] J. M. Lock. Proc. Roy. Soc., 208, 391, 1951.—[6] В. Л. Гинзбург. ДАН
СССР, 83, 385, 1952.—[7] Н. Пoincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique
céleste, т. I, стр. 58.

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МАГНИТОСТРИКЦИИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ СПЛАВОВ

Д. И. Волков и В. И. Чечерников

Проведено исследование температурной зависимости магнитострикции насыщения ферромагнитных сплавов на никелевой основе ($\text{Ni} - \text{Cu}$, $\text{Ni} - \text{Mn}$, $\text{Ni} - \text{Fe}$). Показано, что результаты измерения находятся в хорошем согласии с теорией.

1. Введение

Теория температурной зависимости четных эффектов, предложенная Акуловым [1], приводит к линейному закону зависимости констант, характеризующих четный эффект, от температуры. Для магнитострикции этот закон имеет вид

$$\lambda_s^{(T)} = \lambda_s^{(0)} (1 - (T/\Theta)), \quad (1)$$

где $\lambda_s^{(0)}$, $\lambda_s^{(T)}$ — магнитострикция насыщения соответственно при абсолютном нуле и температуре T , Θ — точка Кюри.

Экспериментальная проверка формулы (1), проведенная рядом исследователей [2,3], показала, что эта формула находится в согласии с данными измерений λ_s , полученными на чистом никеле в широком интервале температур. Однако зависимость магнитострикции от температуры для ферромагнитных сплавов до сих пор экспериментально почти не изучалась. Систематические измерения, проведенные Штуркиным [4] на монокристаллах кремнистого железа (3,5 вес. %Si), дали для этого сплава крайне сложную зависимость констант магнитострикции от температуры. Исследование температурной зависимости магнитострикции насыщения ферромагнитных сплавов из неферромагнитных компонентов (Mn, Sb), проведенное Волковым [5], показало также, что вдали от точки Кюри λ_s изменяется не по линейному закону. Таким образом вопрос о применимости формулы (1) к сплавам остается в полной мере не выясненным.

Целью настоящей работы является исследование температурной зависимости магнитострикции насыщения ферромагнитных сплавов с никелевой основой (сплавы $\text{Ni} - \text{Cu}$, $\text{Ni} - \text{Mn}$, $\text{Ni} - \text{Fe}$). При этом мы ставили своей задачей изучение температурной зависимости $\lambda_s^{(T)}$ не в широком интервале температур, а в области, сравнительно близкой к точке Кюри ($T \leq \Theta$). Это было сделано из тех соображений, что для этой области температур линейный закон в форме (1) непосредственно вытекает, как известно, из самых общих термодинамических положений [6]. В этом смысле линейный закон (1) здесь является точным законом; однако экспериментальные исследования температурной зависимости магнитострикции насыщения, проведенные в [7] и [8] на чистом никеле, показали противоречивые результаты. По данным [7] λ_s монотонно уменьшается с изменением температуры по некоторой кривой, асимптотически стремящейся к оси T при $T > \Theta$. В то же время результаты работы [8] подтверждают линейный закон

зависимости λ_s от T , и при $T = \Theta$, λ_s оказывается действительно равной нулю. С этой точки зрения, постановка исследования температурной зависимости магнитострикции ферромагнитных сплавов с никелевой основой в области температур, близких к точке Кюри, представляет особый интерес.

2. Установка и методика измерений

При измерении магнитострикции в последнее время (начиная с 1947—1948 гг.) получил широкое применение метод проволочных тензометров (датчиков), предложенный для этих целей Акуловым и Волковым [9]. Измерения температурной зависимости магнитострикции при помощи тензометров, наклеенных непосредственно на поверхность испытуемых образцов, возможны для области температур от низких до $\approx 200^\circ\text{C}$. При более высоких температурах приходится применять выносные датчики. Впервые разработка выносного тензометра для измерения магнитострикции и термического удлинения была проведена конструкторским бюро завода «Эталон». Простейший тип выносного датчика, состоящего из одной натянутой проволочки тензометра, использовали в своей работе Белов и Шмидт [10].

В нашей работе был применен выносной тензометр несколько иного типа. Испытуемый образец (в форме удлиненного цилиндра или эллипсоида) нижним своим концом упирался в дно кварцевой трубки, верхний конец образца через тонкую кварцевую трубочку зажимался цангой направляющей головки. Между направляющей головкой и специальными хомутиками, жестко связанными с кварцевой трубкой, натягивались две параллельные и расположенные симметрично относительно оси испытуемого образца тонкие (20—25 μ) проволочки тензометра. Предварительное растяжение проволочек тензометра производилось всякий раз при постоянном натяжении. Проволочки тензометра, как обычно, включались в мост Уитстона. Опыт показал, что описанный выносной тензометр с двумя проволочками работает значительно более стабильно, чем выносной датчик с одной проволочкой. Кварцевая трубка с испытуемым образцом и тензометром вставлялась в расположенную в канале намагничивающей катушки печь с бифилярной обмоткой. Отклонение по шкале в 1 мм (чувствительность установки) соответствовало изменению длины образца $\Delta l/l = 0,6 \cdot 10^{-7}$. Дополнительная проверка чувствительности установки производилась при помощи измерения магнитострикции на никелевых образцах, причем измерения повторялись многократно при различных натяжениях проволочек тензометра в различных условиях опыта. Опыт показал, что относительная ошибка этих измерений составляет не более 2%. В опытах использовалась удлиненная электрическая печь, так что по длине образца создавалось однородное температурное поле. Размагничивание образцов перед каждым измерением осуществлялось способом коммутации постоянного тока и затем переменным током убывающей амплитуды. При размагничивании испытуемых образцов путем нагревания их выше точки Кюри, с компенсацией земного магнитного поля, величина магнитострикции насыщения, как показал опыт, остается практически той же, что и в первом случае.

Объектами исследования являлись образцы из сплавов Ni—Cu (7,4; 14; 18,8; 23,5 ат. % Cu, остальное Ni), Ni—Mn (3,7; 8,5 ат. % Mn), Ni—Fe (55 вес. % Fe, 45 вес. % Ni). Исходными материалами для изготовления образцов служили электролитические никель, медь, марганец и карбонильное железо. Плавка производилась в высокочастотной печи. Образцы получались путем насасывания расплава в фарфоровые трубы. Образцы отжигались при температуре 1000°C в течение 5 час., с последующим медленным охлаждением вместе с печью.

Условия опыта были таковы, что при наложении магнитного поля измерялось адиабатическое изменение длины испытуемых образцов, обусловленное явлением магнитострикции и термическим расширением, вследствие магнетокалорического эффекта. Однако, как показано в одной из последних работ [11], магнетокалорический эффект в сплавах с никелевой основой (сплавы Ni—Cu) мал по величине. К тому же влияние этого эффекта на ход магнитострикции может проявиться заметным образом лишь при температурах в непосредственной близости к точке Кюри.

3. Результаты измерений

Как уже указывалось, исследования температурной зависимости магнитострикции насыщения λ_s в области температур, близких к точке Кюри, проведенные в [7,8] на никеле, дали противоречивые результаты.

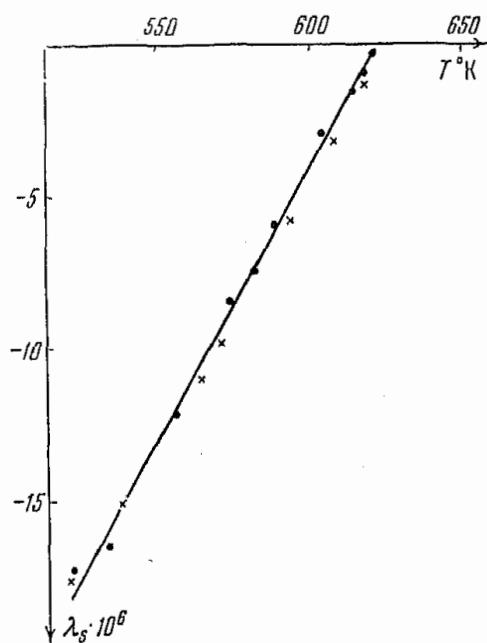


Рис. 1. Никель. \times —данные работы [8]

В целях уточнения данных этих исследований для никеля нами вначале были измерены изотермы магнитострикции никеля и по ним определена температурная зависимость λ_s , приведенная на рис. 1. Как видно, магнитострикция насыщения никеля с повышением температуры изменяется по линейному закону в области температур от 533°К до точки Кюри ($\Theta \approx 623^{\circ}\text{K}$). Точка Кюри исследуемого никеля определялась при помощи измерений намагниченности и восприимчивости на магнитометре в слабых полях. При этом измеренная указанным способом точка Кюри совпала со значением температуры, при которой продолжение прямой рис. 1 пересекает ось T .

Из рис. 1 видно также, что результаты наших измерений находятся в хорошем согласии с данными работы [8], которые на рисунке обозначены крестиками. Необходимо далее отметить, что с целью проверки влияния способа размагничивания на ход изотерм были произведены измерения магнитострикции насыщения после размагничивания образцов методом нагревания выше точки Кюри, при одновременной компенсации земного поля. Образцы нагревались до 690°К и некоторое время выдерживались при этой температуре, после чего производилось охлаждение до нужной температуры и включалось поле максимальной величины ($H \approx 1300$ Ое). Полученные результаты показали, что величина магнитострикции насыщения существенно не изменяется при изменении способа размагничивания испытуемых образцов, и, следовательно, характер зависимости λ_s от T этим не нарушается.

Таким образом наши измерения дают для никеля линейную зависимость магнитострикции насыщения от температуры лишь в сравнительно узком интервале температур ($\approx 90^{\circ}$ ниже точки Кюри), что и следовало ожидать, исходя из термодинамического закона зависимости изменения λ от T .

Из ферромагнитных сплавов на никелевой основе наиболее подробно нами была исследована температурная зависимость магнитострикции

никель-медных сплавов, которые были взяты по следующим соображениям. Сплавы Ni—Cu в широкой области концентрации образуют, как известно, твердые растворы. Под влиянием меди понижается точка Кюри и уменьшается константа энергетической анизотропии, что делает возможным в процессе измерения λ_s использовать сравни-

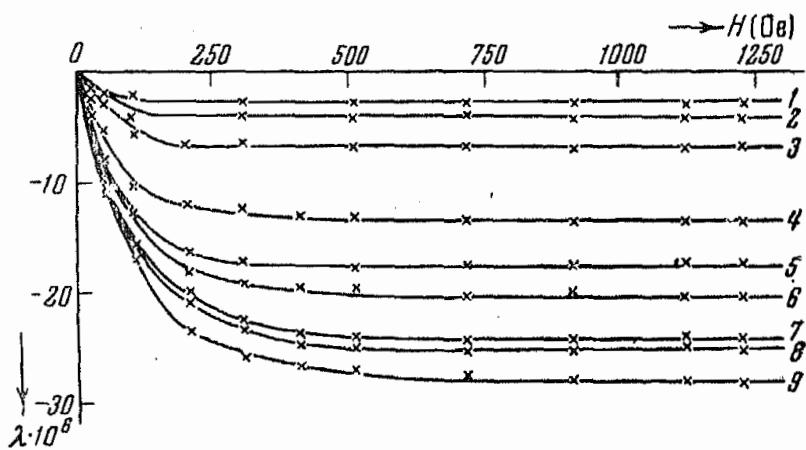


Рис. 2. 92,6 ат. % Ni и 7,4 ат. % Cu. 1— $T = 533^\circ\text{K}$; 2— $T = 525^\circ\text{K}$; 3— $T = 507^\circ\text{K}$; 4— $T = 457^\circ\text{K}$; 5— $T = 421^\circ\text{K}$; 6— $T = 389^\circ\text{K}$; 7— $T = 347^\circ\text{K}$; 8— $T = 324^\circ\text{K}$; 9— $T = 285^\circ\text{K}$

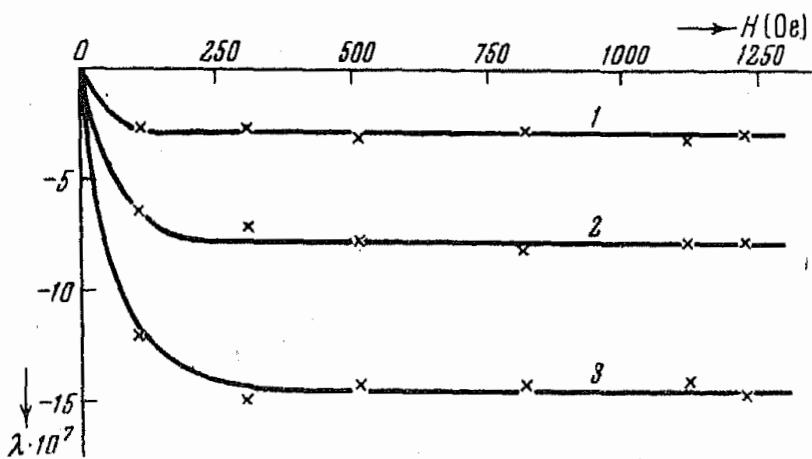


Рис. 3. 92,6 ат. % Ni и 7,4 ат. % Cu. 1— $T = 556^\circ\text{K}$; 2— $T = 546^\circ\text{K}$; 3— $T = 541^\circ\text{K}$

тельно невысокие температуры и относительно слабые магнитные поля для получения технического насыщения. Поэтому влияние парапропцесса на величину λ_s здесь существенно мало. Вместе с тем магнетокалорический эффект в этих сплавах, как уже отмечалось, имеет относительно малую величину, и поэтому добавочное изменение длины испытуемых образцов, связанное с этим эффектом, практически можно для этих сплавов не учитывать.

На рис. 2, 3 в качестве примера даны изотермы магнитострикции сплавов Ni—Cu с содержанием меди 7,4 ат.%. Общий вид этих изотерм, как и изотерм для остальных сплавов никель-медь, подобен изотермам чистого никеля.

Интересующая нас температурная зависимость магнитострикции насыщения сплавов Ni—Cu представлена на рис. 4 и 5. Как видно, для всех сплавов Ni—Cu, концентрация меди в которых изменялась в широком интервале (от 7,4 до 23,5 ат.%), λ_s при температурах, близких к точке Кюри, уменьшается пропорционально T .

Таким образом для сплавов Ni—Cu, как и для чистого никеля, выполняется термодинамический закон зависимости λ_s от T в области температур, близких к Θ . Вне этой области имеет место отступление от линейного закона, и λ_s медленнее изменяется с изменением температуры.

Укажем, что для сплавов Ni—Cu точка Кюри определялась нами независимо от магнитных измерений на магнитометре. Точки Кюри, найденные таким способом, совпали со значениями температур, определенными путем экстраполяции прямых рис. 4 и 5, а также с данными работы [12]. Это обстоятельство дает основание сделать заключение, что точка Кюри ферромагнетиков может быть определена также из измерений магнитострикций насыщения при повышенных температурах. Поскольку здесь

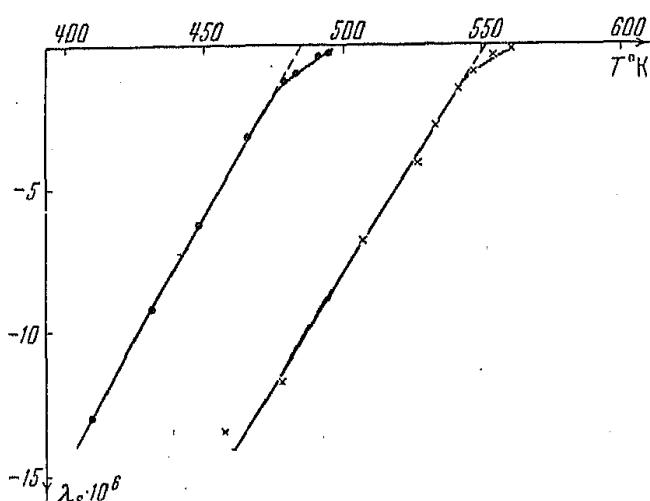


Рис. 4. \times — 92,6 ат. % Ni и 7,4 ат. % Cu;
● — 86 ат. % Ni и 14 ат. % Cu

точка Кюри определяется исходя из точного термодинамического закона, этот метод является, как нам представляется, с принципиальной стороны достаточно обоснованным.

Интересно отметить, что кривые зависимости λ_s от T для исследованных сплавов Ni—Cu имеют в неизменной близости к точке Кюри резкий излом и отчетливо выраженные асимптотические «хвосты», которые исчезают лишь при некоторой температуре $T_h > \Theta$. При этом, чем больше концентрация меди в сплаве, тем больше разность $T_h - \Theta$. Заметим, что аналогичные «хвосты» были обнаружены в [13] при исследовании температурной зависимости спонтанной намагниченности бинарных сплавов. Наличие резко выраженных «хвостов» на кривых зависимости λ_s от T связано, повидимому, с тем, что обменное взаимодействие электронов атомов в различных участках кристаллической решетки сплавов Ni—Cu различно. Эта «неоднородность» обменных сил, обусловленная, возможно, микронеоднородностями по составу (флуктуациями концентрации атомов) приводит к значительной «размытости» ферромагнитного превращения в сплавах Ni—Cu. Подобные сплавы не имеют, следовательно, фиксированной точки Кюри; их температуры ферромагнитного превращения лежат в некотором, хотя бы и узком интервале значений. Аналогичный результат в общем был получен и при исследовании температурной зависимости магнитострикций сплавов Ni—Mn с небольшим содержанием марганца (3,7 и 8,5 ат. % Mn). Сплавы с большой концентрацией марганца не исследовались в связи с тем, что магнитострикция

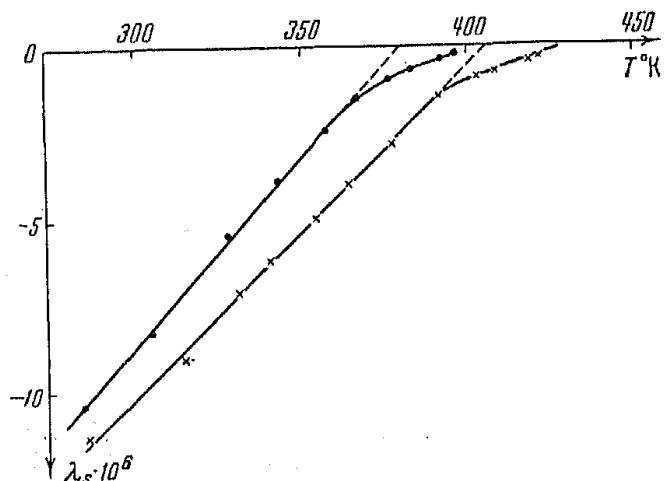


Рис. 5. \times — 81,2 ат. % Ni и 18,8 ат. % Cu;
● — 76,5 ат. % Ni и 23,5 ат. % Cu

насыщения их изменяется в результате упорядочения атомов, возникающего под влиянием температуры. Результаты измерений для сплавов Ni—Mn даны на рис. 6. Для этих сплавов, так же как и для сплавов Ni—Cu, линейный закон изменения λ_s с T соблюдается при температурах, близких к точке Кюри, и приблизительно в том же температурном интервале (для 3,7 ат.% Mn — от $\approx 525^\circ$ до 625°K и для 8,5 ат.% Mn — от 475 до 575°K). В непосредственной близости к точке Кюри наблюдается та же качественная картина, а именно, обнаруживаются «хвосты» на кривых зависимости λ_s от T . Характерно, однако, что эти «хвосты» на сплавах Ni—Mn менее выражены.

Исследование температурной зависимости магнитострикции железоникелевых сплавов, как и предыдущих сплавов Ni—Cu, Ni—Mn, до

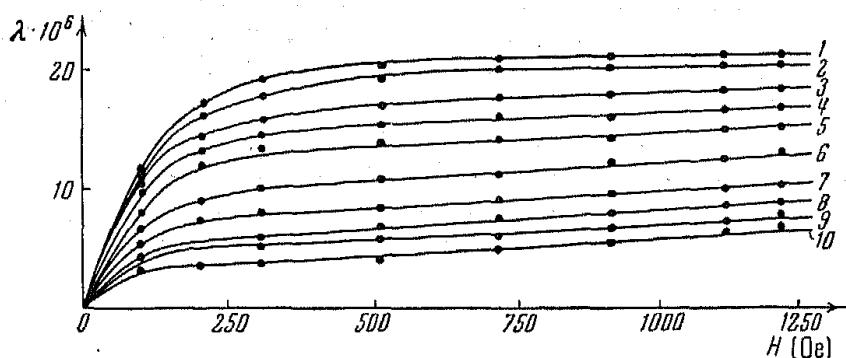


Рис. 7. 45 вес. % Ni и 55 вес. % Fe. 1 — $T_1 = 283^\circ\text{K}$; 2 — $T_2 = 323^\circ\text{K}$; 3 — $T_3 = 411^\circ\text{K}$; 4 — $T_4 = 447^\circ\text{K}$; 5 — $T_5 = 513^\circ\text{K}$; 6 — $T_6 = 565^\circ\text{K}$; 7 — $T_7 = 615^\circ\text{K}$; 8 — $T_8 = 647^\circ\text{K}$; 9 — $T_9 = 660^\circ\text{K}$; 10 — $T_{10} = 696^\circ\text{K}$

сих пор не проводилось. Из всей серии железо-никелевых сплавов нами был взят лишь сплав, содержащий 45 вес.% Ni и 55 вес.% Fe.

Указанный сплав удобен для подобных исследований в том отношении, что одна из констант магнитострикции, как показали измерения [14], при комнатной температуре близка к нулю ($\lambda_{100} \approx 0$). Таким образом изучение температурной зависимости магнитострикции насыщения λ_s поликристаллических образцов данного сплава дает в то же время

определенные сведения о температурной зависимости константы магнитострикции (константы λ_{111}). Часть изотерм магнитострикции сплава 45 вес.% Ni, 55 вес. % Fe даны на рис. 7. В целях исключения магнитострикции парапроцесса, которая для этого сплава имеет

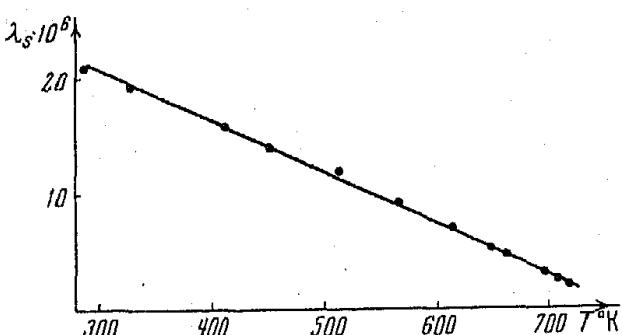


Рис. 8. 45 вес. % Ni и 55 вес. % Fe

достаточно большую величину уже в сравнительно слабых магнитных полях, кривые $\lambda(H)$ экстраполировались на ось $H = 0$. Таким образом определялось значение магнитострикции насыщения λ_s и строилась зависимость этой величины от температуры, показанная на рис. 8. Приведенные данные показывают, что магнитострикция насыщения сплава 45 вес.% Ni, 55 вес.% Fe уменьшается по линейному закону с увеличением температуры. В отличие от исследованных нами сплавов Ni—Cu и Ni—Mn линейный ход зависимости λ_s от T для указанного сплава имеет место, однако, в более широком интервале температур.

В связи с результатами, полученными в настоящей работе, представляет существенный интерес изучить зависимость спонтанной намагниченности ферромагнитных сплавов от T в области температур, близких к точке Кюри.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
26 октября 1953 г.

Литература

- [1] Н. С. Акулов. Ферромагнетизм, ГТТИ, 1939, стр. 142.—[2] Г. П. Дьяков. Изв. АН СССР, сер. физ., 11, 667, 1947.—[3] А. Я. Власов. Уч. зап. МГУ, 162, кн. 6, стр. 183, 1952.—[4] Д. А. Штуркин. ДАН СССР, 58, 581, 1947.—[5] Д. И. Волков. Уч. зап. МГУ, 162, кн. 6, стр. 33, 1952.—[6] С. В. Вопсовский и Я. С. Шур. Ферромагнетизм, ГИТТЛ, 1948, стр. 154.—[7] W. Döring. ZS. f. Phys., 103, 92, 1937.—[8] J. Kirkham. Phys. Rev., 52, 1162, 1937.—[9] Н. С. Акулов и Д. И. Волков. Вестн. МГУ, 4, № 6, 21, 1950.—[10] К. П. Белов и В. В. Шмидт. Журн. техн. физ., 23, 44, 1953.—[11] W. Sucksmith, C. Clark, D. Oliver a. J. Thompson. Rev. Mod. Phys., 25, 34, 1953.—[12] У. Делингер. Энцикл. металлофизики, т. I, ОНТИ, 1937, стр. 266.—[13] J. J. Went. Physica, 17, 596, 1951.—[14] F. Lichtenberger. Ann. d. Phys., 15, 45, 1932.

ВТОРИЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ ТОНКИХ СЛОЕВ Ве. I

И. М. Бронштейн и Т. А. Смородина

Исследовано изменение коэффициента вторичной электронной эмиссии σ и распределение вторичных электронов по энергиям при адсорбции атомов Ве на Ni. Показано, что при адсорбции чистого Ве σ монотонно уменьшается, в случае же адсорбции не совсем чистого Ве коэффициент вторичной эмиссии σ сначала возрастает, а затем уменьшается до значения σ_{Be} . Установлено, что в интервале от 100 до 600 eV глубина выхода вторичных электронов линейно зависит от энергии первичных электронов.

1. Введение

Исследование вторичной электронной эмиссии из тонких металлических пленок позволяет определить глубину выхода вторичных электронов и выяснить другие вопросы, связанные с механизмом явления. Этому вопросу посвящено несколько работ. Так, например, в работе [1] при изучении вторичной эмиссии из тонких слоев серебра, нанесенных на платину, показано, что при $E_p = 20 \text{ eV}$ глубина выхода вторичных электронов составляет ~ 12 атомных слоев, при $E_p = 50 \text{ eV} - \sim 25$ атомных слоев и для $E_p = 100 \text{ eV} - \sim 150$ атомных слоев.

В работе [2] исследована вторичная электронная эмиссия тонких пленок платины, нанесенных на алюминиевую подложку. В области $E_p < 8000 \text{ eV}$ была обнаружена линейная зависимость между глубиной выхода d вторичных и энергией первичных электронов, причем $E_p = 800 \text{ eV}$ соответствует глубина $d = 25$ атомных слоев. В интервале $E_p = 800 - 2000 \text{ eV}$ глубина выхода вторичных электронов возросла значительно быстрее, чем энергия первичных, и достигала при $E_p = 2000 \text{ eV}$ 100 атомных слоев. В этой работе, однако, получены завышенные значения коэффициента вторичной электронной эмиссии σ . Так, например, при $E_p = 750 \text{ eV}$ получено значение коэффициента $\sigma = 2,25$, в то время как на самом деле для чистой платины $\sigma_{\text{макс}} = 1,78$ при $E_p = 700 \text{ eV}$ [3].

Будынский [4] изучал вторичную эмиссию клиновидного слоя серебра, нанесенного на необезгаженные поверхности алюминия и слюды. Им была обнаружена линейная зависимость между глубиной выхода вторичных и энергией первичных электронов в большом интервале энергий последних (300—9000 eV). Глубина выхода оказалась $\sim 10 - 50$ мк.

В работе Будынского наблюдались дополнительные эффекты, обусловленные, повидимому, наличием потенциальных барьеров на границе пленки серебра и окиси алюминия в одном случае и серебра и слюды — в другом. Кроме того, им получены завышенные значения σ для серебра. Все это до некоторой степени снижает ценность полученных им результатов.

Бронштейн [5] исследовал вторичную эмиссию пленок серебра, нанесенных на никелевую подложку. До нанесения на нее серебра $\sigma_{\text{макс}}$ подложки был равен 1,33 при $E_p = 500 \text{ eV}$. В процессе предва-

рительных экспериментов, после того как серебро неоднократно наносилось на мишень, а затем удалялось с нее испарением, коэффициент σ никеля увеличился на 0,1, что могло быть отнесено за счет увеличения шероховатости поверхности. Следовательно, в этой работе пленки серебра наносились на подложку, σ_{\max} которой при $E_n = 500 \text{ eV}$ был равен 1,43.

При нанесении полутораатомного слоя серебра коэффициент вторичной эмиссии σ никелевой подложки изменился таким образом, что в интервале $E_n = 30 - 800 \text{ eV}$ он оказался равным σ_{Ag} . На этом основании был сделан вывод о поверхностном характере вторичной электронной эмиссии. Однако при исследовании тонких пленок серебра, нанесенных на различные подложки со значениями σ от 1,3 до 0,58, нами в настоящее время выяснено, что такой вывод является ошибочным, так как для того метода измерения глубины выхода вторичных электронов, которым мы пользуемся, существенную роль играют вторично-эмиссионные свойства самой подложки.

Вторично-эмиссионный ток эмиттера, который образуют собой пленка и подложка, состоит из двух частей — вторичных токов подложки и пленки. Чем значительнее отличается вторичный электронный ток подложки («темновой» ток) от тока адсорбированного слоя, тем экспериментально определенная глубина выхода вторичных электронов из слоя будет ближе к истинной. В случае пренебрежимо малого тока подложки вторичный ток эмиттера почти целиком определяется свойствами адсорбированного слоя. Если же вторичный ток подложки значителен, то определение глубины выхода вторичных электронов сводится к нахождению таких толщин адсорбированных слоев, при которых влияние подложки перестает сказываться. Следовательно, для измерения глубины выхода вторичных электронов необходимо, как это заметил Кадышевич [6], выбрать такие два металла, значения σ которых намного отличаются друг от друга. Подложка должна, таким образом, обладать либо малым, либо большим значением σ по сравнению с σ адсорбированного слоя.

Для того чтобы полностью исключить влияние подложки, необходимо слои одного и того же металла последовательно наносить на разные подложки со все возрастающими (или убывающими) значениями $\Delta\sigma = \sigma_{\text{подл}} - \sigma_{\text{сл}}$. Тогда, построив для данного $E_n = \text{const}$ кривую зависимости глубины выхода вторичных электронов d от $\Delta\sigma$, можно найти d , соответствующее $\Delta\sigma = \sigma_{\text{сл}}$ металла покрытия в случае, если $\sigma_{\text{подл}} \ll \sigma_{\text{сл}}$, и $\Delta\sigma \approx \sigma_{\text{подл}}$ в случае $\sigma_{\text{подл}} \gg \sigma_{\text{сл}}$, т. е. истинную глубину выхода вторичных электронов.

В настоящей работе мы исследовали вторичную электронную эмиссию тонких слоев Be, адсорбированных на никелевой подложке. σ_{\max} для $Ni \sim 1,3$ (при $E_n = 500 \text{ eV}$), а для Be, по данным Хлебникова [7] и др. [8], $\sigma_{\max} \sim 0,6$ (при $E_n = 200 \text{ eV}$), так что необходимое условие: $\Delta\sigma$ значительно больше σ_{Be} — выполняется.

На первый взгляд может показаться, что выполнение последнего условия может быть нарушено изменением работы выхода подложки при адсорбции на ней атомов электроположительного или электроотрицательного металла. Однако это не так. В самом деле, моноатомный слой Be на Ni, уменьшив работу выхода последнего, вследствие этого теоретически может лишь увеличить вторичную эмиссию подложки, а следовательно, и $\Delta\sigma = |\sigma_{\text{подл}} - \sigma_{\text{сл}}|$. Так как, уже начиная с $\Theta \sim 2-3$, работа выхода эмиттера — подложка плюс адсорбированный слой — не меняется, то дальнейшее изменение σ целиком будет определяться изменением толщины адсорбированного слоя. При нанесении атомов электроотрицательного металла на подложку, σ которой мал, первый слой теоретически должен еще больше уменьшить σ подложки,

а значит, улучшить выполнение необходимого условия $\sigma_{\text{подл}} \ll \sigma_{\text{сл}}$. Отсюда ясно, что для нашего метода не столь существенно равенство работ выхода металла — покрытия и металла — подложки, за исключением тех случаев, когда наносимый металл обладает меньшей работой выхода и большим значением σ , чем металл — подложка. Впрочем, если работа выхода незначительно меняет эмиссию, то и это несущественно.

Для получения более исчерпывающей картины явления мы снимали полные кривые $\sigma = f(E_{\text{п}})$ и кривые распределения по энергиям вторичных электронов $d\sigma/dE_{\text{в}} = f(E_{\text{в}})$ (где $E_{\text{в}}$ — энергия вторичных электронов), а не только зависимость σ от толщины слоя для нескольких избранных энергий первичных электронов.

2. Техника и методика эксперимента

Техника и методика эксперимента, конструкция прибора и измерительная схема описаны в работе одного из авторов [6].

Прибор представлял собой сферический конденсатор с отростками для электронной и молекулярной пушек. В центре сферы помещалась мишень (подложка) — цилиндрическая никелевая коробочка с плоским дном, диаметра 12 и высоты 10 мм.

Молекулярная пушка состояла из tantalового цилиндра, внутри которого помещались молибденовый цилиндрический сосуд с горловиной, наполненной Ве, и вольфрамовая спираль для его подогрева. Снаружи, для теплоизоляции, молекулярная пушка окружалась еще одним tantalовым цилиндром. Такая конструкция пушки позволяла при сравнительно небольшой мощности накала (54,6 W) доводить ее температуру до $\sim 1200^{\circ}\text{C}$. Отверстие молекулярной пушки практически мгновенно открывалось и закрывалось заслонкой.

Скорость конденсации Ве определялась по весу слоя, осажденного на слюдянную пластинку. Слюда располагалась под таким же углом к пушке, как и мишень прибора. В трубке, где градуировалась молекулярная пушка, расстояние от пушки до слюды было в два раза меньше, чем расстояние от пушки до мишени в приборе. Следовательно, согласно закону Ламберта, конденсация Ве на мишени в приборе происходила в четыре раза медленнее, чем на слюде. При указанной выше мощности накала молекулярной пушки скорость нанесения моноатомного слоя ($\Theta = 1$) Ве на мишень оказалась равной (68 ± 23) сек. В дальнейшем величина покрытия мишени определялась по времени конденсации, в соответствии с градуировкой пушки. Диаметр атома Ве мы приняли равным 2,25 Å.

При градуировке молекулярной пушки Ве наносился не только на чистую слюду, но и на слюду, предварительно покрытую никелем и серебром. Скорость конденсации Ве оказалась с точностью до 10—15% не зависящей от природы подложки.

Все измерения производились при непрерывной откачке. Вакуум измерялся манометром Мак-Леода. Прибор обезгаживался длительное время при температуре 400°C . Обезгаживание пушек производилось токами высокой частоты, мишени — спиралью, помещенной внутри нее. Обезгаживание прибора, пушек и мишени продолжалось длительное время до достижения устойчивого вакуума $< 10^{-6}$ мм. Кроме того, каждый раз перед измерениями производилось кратковременное обезгаживание прибора и его металлических частей. В результате такой тщательной тренировки в приборе во время работы всегда был вакуум прилипания. При исследовании вторичной электронной эмиссии последнее обстоятельство весьма существенно, так как от степени вакуума зависит достоверность полученных результатов.

Эксперимент проводился следующим образом. Сначала снимались

кривые $\sigma = f(E_n)$ и $d\sigma / dE_b = f(E_b)$ для никелевой мишени (подложки). При этом тщательно проверялось отсутствие «вытягивающих» коллекторных потенциалов. После того как мы убеждались в том, что полученные кривые со временем не меняются и характерны для чистого никеля, на мишень последовательно наносились слои различной толщины ($\Theta = 0,7; 1,3; 2; 2,6; 4; 6,5; 10; 16; 21; 26; 39; 52; 65; 78; 104; 130$ и т. д.) и при этом каждый раз исследовалась зависимость σ от E_n и распределение вторичных электронов по энергиям для различных E_n .

Полученные результаты неоднократно воспроизводились, так как после удаления с мишени Be вторичная эмиссия последней была такой же, как и до нанесения на нее Be. Результаты измерений не зависели от того, наносился ли слой Be данной толщины сразу одной порцией или по частям, более мелкими порциями.

3. Результаты измерений

Результаты первых измерений зависимости σ от E_n для различных Θ представлены на рис. 1. Как видно, при всех E_n по мере возрастания Θ , коэффициент σ сначала растет, достигая при $\Theta=4$ максимума

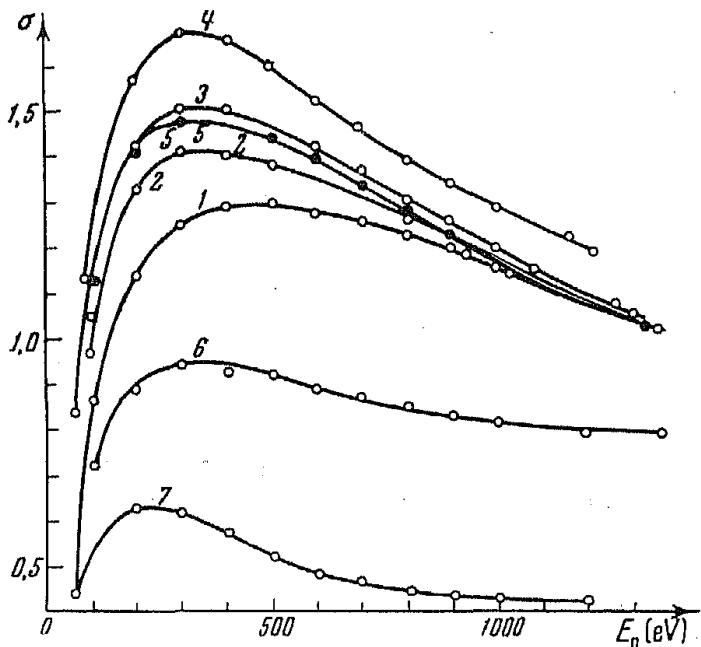


Рис. 1. Кривые зависимости коэффициента вторичной эмиссии σ от энергий первичных электронов E_n при адсорбции Be на никеле. Кривая 1 характеризует вторичную эмиссию чистого Ni до конденсации на него Be ($\sigma_{\max} = 1,27$ при $E_n = 500$ eV). Кривой 2 соответствует $\Theta = 0,7$; 3 — $\Theta = 1,3$; 4 — $\Theta = 2$; 5 — $\Theta = 6,5$; 6 — $\Theta = 10$; 7 — $\Theta > 90$ атомных слоев

мального значения 1,7, затем монотонно уменьшается. Максимумы кривых постепенно сдвигаются в сторону меньших E_n . При $\Theta > 90$ устанавливается вторичная электронная эмиссия, характерная для чистого Be ($\sigma_{\max} \sim 0,6$ при $E_n = 200$ eV). Эта зависимость σ от Θ для $E_n = 300$ eV представлена на рис. 2.

На рис. 3 представлены результаты повторных измерений зависимости σ от энергий первичных электронов для различных значений Θ . Из рисунка видно, что в этом случае с возрастанием Θ при всех E_n коэффициент σ не возрастает, а лишь постепенно уменьшаясь, стремится к значению σ для Be. Последняя кривая 15 соответствует эмиссии чистого Be ($\sigma_{\max} = 0,62$ при $E_n = 200$ eV). По данным рис. 3 можно построить кривые зависимости σ от Θ для различных значений E_n , изображенные на рис. 4. Анализ кривых показывает, что для заданного значения E_n , начиная с некоторого значения Θ , σ перестает меняться. Этому значению Θ соответствует, повидимому, максимальная глубина, из которой при данном E_n могут эмиттироваться вторичные электроны. В дальнейшем будем называть ее глубиной вы-

хода d вторичных электронов. Как видно из кривой рис. 5, построенной по данным рис. 3, глубина выхода зависит от энергии E_n первичных электронов. В пределах значений E_n от 100 до 600 eV

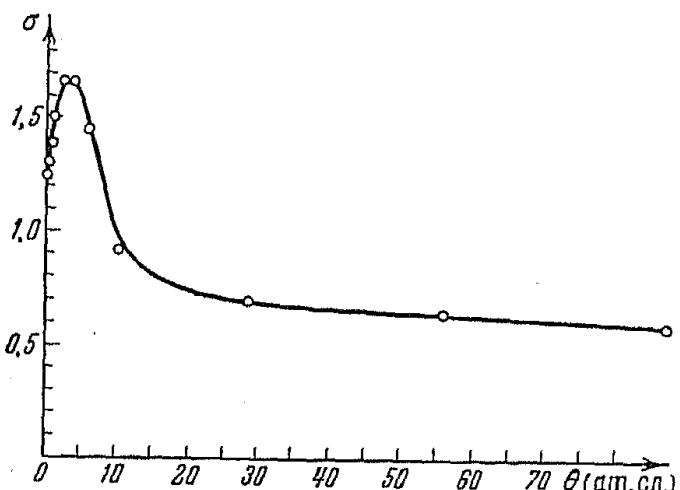


Рис. 2. Коэффициент вторичной электронной эмиссии σ как функция Θ при адсорбции Ве на Ni. Энергия первичных электронов $E_n = 300$ eV

этота зависимость линейная, а для значений E_n , больших 600 eV, рост глубины выхода заметно отстает от роста E_n , и, начиная с $E_n = 1000$ eV, глубина выхода d оказывается величиной постоянной, равной ~ 100 атомным слоям или ~ 23 мк. Из этой же кривой видно, что при $E_n = 100$ eV, $d \sim 6$ мк.

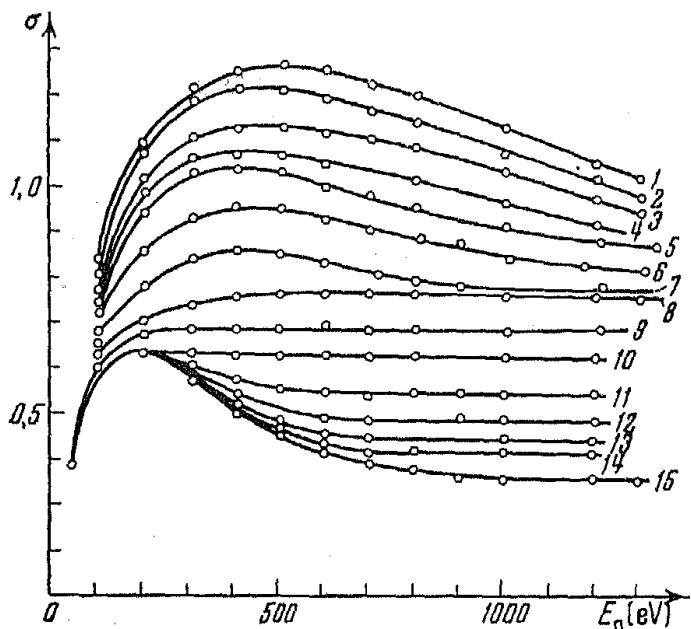


Рис. 3. Кривые зависимости σ от E_n при адсорбции Ве на Ni. Кривой 1 соответствует эмиссия чистого Ni; 2 — $\Theta = 0.7$; 3 — $\Theta = 2$; 4 — $\Theta = 4$; 5 — $\Theta = 6.5$; 6 — $\Theta = 10$; 7 — $\Theta = 16$; 8 — $\Theta = 21$; 9 — $\Theta = 26$; 10 — $\Theta = 39$; 11 — $\Theta = 52$; 12 — $\Theta = 65$; 13 — $\Theta = 78$; 14 — $\Theta = 104$ атомных слоев. Кривая 15 соответствует эмиссии массивного слоя Be

Следует обратить внимание на кривые 9 и 10 рис. 3 ($\Theta = 21$ и 26 атомным слоям). Для этих значений Θ , начиная с $E_n > 200$ eV, σ не зависит от энергий первичных электронов.

Кривые распределения вторичных электронов по энергиям $d\sigma/dE_v = f(E_v)$ были получены путем дифференцирования вольтамперных кривых и представлены на рис. 6. При $\Theta = 4$ кривая распределения по энергиям вторичных электронов в основном совпадает с таковой для массивного слоя чистого Be. Эти кривые совпадают с кривой распределения, полученной в работе [9] для чистого Be.

Рис. 6 показывает, что характер кривых распределения вторичных электронов по энергиям и положение их максимумов в основном зависят от свойств поверхности металла, что хорошо согласуется с теорией Кадышевича [10]. Такой же результат был получен в работе [5]

при нанесении нескольких атомных слоев серебра на никелевую подложку.

Таким образом при постепенной конденсации Ве на никелевой подложке лишь в первом эксперименте (рис. 1 и 2) вторичная эмиссия

мишени сначала возрастила, а затем уменьшалась до значения эмиссии Ве; во всех последующих случаях эмиссия монотонно

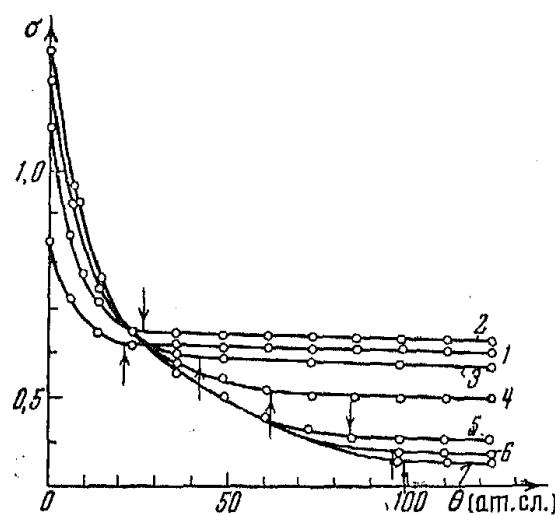


Рис. 4

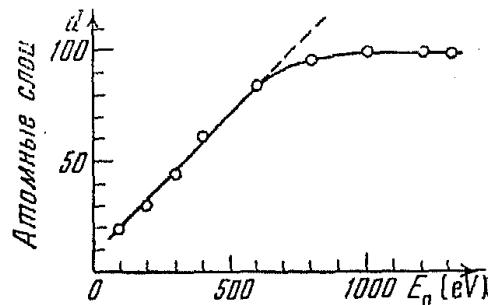


Рис. 5

Рис. 4. Кривые зависимости σ от Θ при: 1 — $E_n = 100$, 2 — $E_n = 200$, 3 — $E_n = 300$, 4 — $E_n = 400$, 5 — $E_n = 500$, 6 — $E_n = 600$, 7 — $E_n = 800$ еВ. Скорость установления эмиссии, характерной для массивного Ве, зависит от энергий первичных электронов. Стрелками показаны те значения Θ , начиная с которых коэффициент вторичной эмиссии мишени перестает меняться

Рис. 5. Глубина выхода вторичных электронов из Ве, адсорбированного на Ni, как функция энергий первичных электронов E_n

уменьшалась от значения σ_{Ni} до значения σ_{Be} (рис. 3 и 4). Естественно было предположить, что результаты первых измерений соответствуют кон-

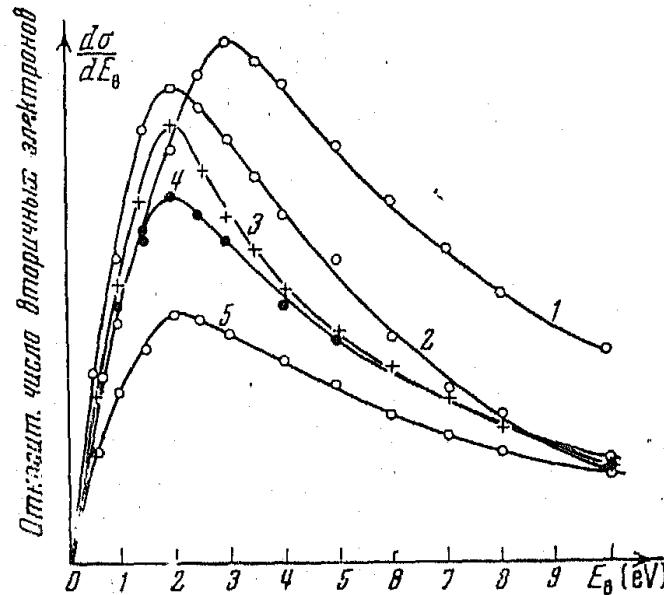


Рис. 6. Кривые распределения вторичных электронов по энергиям. 1 — $\Theta = 0$ (чистый Ni), 2 — $\Theta = 4$, 3 — $\Theta = 16$, 4 — $\Theta = 26$, 5 — $\Theta = 100-300$ атомных слоев. Все кривые получены при $E_n = 300$ еВ

денсации на подложке не совсем чистого Ве. Для проверки этого предположения в прибор был впущен воздух, после чего его стеклянные и металлические части тщательно обезгаживались, и затем снимались кривые зависимости σ от Θ . В этом случае, как и в первых опытах, был снова обнаружен рост эмиссии, причем максимальное значение

σ зависело от времени пребывания воздуха в приборе, т. е. от времени окисления Be в молекулярной пушке. Это, например, иллюстрируется кривыми рис. 7, изображающими зависимость σ от Θ для $E_n = 300$ eV, причем кривая 1 снята после полуминутного, а 2 —

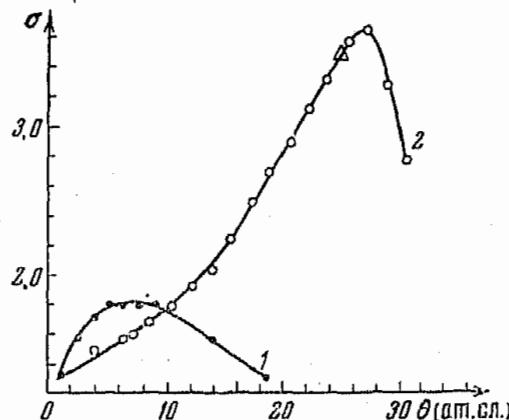


Рис. 7

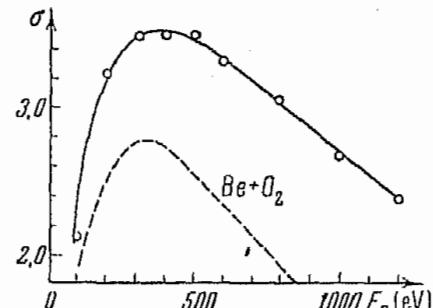


Рис. 8

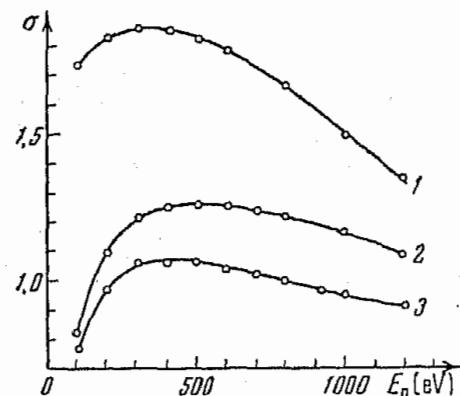
Рис. 7. Зависимость σ от Θ при адсорбции не совсем чистого берилля на Ni; $E_n = 300$ eV. После пребывания воздуха в приборе молекулярная пушка тщательно обезгаживалась токами высокой частоты. Испарение Be начиналось спустя несколько минут после того, как температура молекулярной пушки достигала ее рабочей температуры. Кривая 1 снята после полуминутного, 2 — после десятиминутного пребывания воздуха в приборе

Рис. 8. Кривая $\sigma = f(E_n)$. Никелевая подложка покрыта 26-атомным слоем окисленного Be. Пунктирная кривая получена в работе [7]

после десятиминутного пребывания воздуха в приборе. На рис. 8 представлена кривая $\sigma = f(E_n)$ для $\Theta = 26$. Этому значению Θ соответствует на кривой 2 рис. 7 точка, отмеченная знаком Δ . На рис. 8 пунктиром нанесена кривая $\sigma = f(E_n)$, полученная Хлебниковым [7] для окисленного Be. Сравнение этих двух кривых показывает, что те кривые рис. 1, которым соответствуют значения $\sigma > \sigma_{Ni}$, характеризуют эмиссию не чистого Be, а Be + O₂.

Если начальный рост σ связан с адсорбцией на мишени не совсем чистого Be, то отсюда следует, что при более длительной тренировке молекулярной пушки и последующем покрытии мишени Be можно сразу получить эффект чистого Be, т. е. монотонное уменьшение σ . Такой ход зависимости σ от Θ представлен на рис. 9. Кривая 1 по-

Рис. 9. Кривые зависимости σ от E_n для различных условий опыта. 1 — мишень покрыта слоем окисленного Be, 2 — Ni, 3 — на никелевую подложку нанесено 4 атомных слоя Be. Накал молекулярной пушки был включен за 30 мин. до начала испарения Be. Кривая 3 согласуется с соответствующей кривой 5 рис. 3



лучена после того, как в приборе был в течение 50 час. форвакуум; мишень была покрыта слоем окисленного Be. После обычной тренировки прибора, обезгаживания всех его металлических частей и прогревания мишени получена кривая 2; она характеризует вторичную эмиссию подложки. Спустя 30 мин. после того, как темпера-

тура молекулярной пушки была доведена до рабочей температуры, на подложку начинал испаряться Ве. При этом эмиссия сразу стала уменьшаться. Кривая 3 соответствует $\Theta = 4$; она достаточно удовлетворительно согласуется с соответствующей кривой 5 рис. 3. Следовательно, при чистых условиях опыта зависимость σ от Θ такова, что σ мишени монотонно уменьшается от σ_{Ni} до σ_{Be} .

4. Обсуждение результатов

Как известно, покрытие поверхности металла мономолекулярным слоем адсорбированных атомов другого электроположительного металла приводит к уменьшению работы выхода первого. Следовательно, при постепенной адсорбции атомов Be ($\varphi = 3,9 \text{ eV}$) на Ni ($\varphi = 5 \text{ eV}$) работа выхода последнего сначала уменьшается до значения $\varphi < \varphi_{Be}$ при $\Theta \sim 1$, затем при $\Theta \sim 2-3$ достигает значения φ_{Be} и с дальнейшим возрастанием Θ остается неизменной. Несмотря на это, коэффициент вторичной эмиссии мишени по мере возрастания Θ постепенно уменьшался от значения σ_{Ni} до σ_{Be} . Это хорошо согласуется с результатами, полученными в работе [11] при изучении вторичной эмиссии вольфрама, покрытого адсорбированными атомами тория. В интервале $E_n < 200 \text{ eV}$ σ с возрастанием Θ не менялся, а в области $E_n > 200 \text{ eV}$ — лишь постепенно уменьшался от значения σ_W до значения σ_{Th} .

Как будет показано в следующей нашей работе, при постепенной адсорбции Ag на Be имеет место такое же монотонное изменение (рост) σ от значения σ_{Be} до значения σ_{Ag} . Такое монотонное изменение вторичного тока объясняется тем, что влияние работы выхода на σ невелико, поскольку вторичные электроны обладают значительной энергией. Кроме того, здесь, повидимому, меняются не только условия выхода, но и условия движения и, быть может, зарождения части вторичных электронов.

Качественное объяснение общего характера кривой $d = f(E_n)$ может заключаться в следующем. Вторичные электроны — это электроны повышенных энергий, зарожденные внутри металла и вышедшие наружу либо с малыми потерями энергии, либо, практически, без потерь. Предельная глубина зарождения вторичных электронов должна, вообще говоря, определенным образом зависеть от пробега первичных электронов. Рис. 5 показывает, что в области значений $E_n = 100 \div 600 \text{ eV}$ глубина выхода (зарождения) $d \sim E_n$, и, следовательно, длина пробега первичных электронов $l \sim E_n$. Этот результат наших измерений хорошо согласуется с теорией Вятского [12], дающей линейную зависимость пробега электронов от их энергии. В частности, и численное значение глубины выхода вторичных электронов из Be при $E_n = 100 \text{ eV}$ ($d = 6 \text{ m}\mu$) совпадает со значением пробега первичного электрона с энергией $E_n = 100 \text{ eV}$ для молибдена, рассчитанным теоретически [12].

При энергиях первичных электронов $E_n > 800 \text{ eV}$ вторичные электроны зарождаются на таких глубинах, откуда они благодаря упругим и неупругим столкновениям практически уже выйти не могут. Поэтому глубина выхода d перестает зависеть от E_n и не может быть индикатором пробега первичных электронов.

Сопоставление кривых $\sigma = f(E)$ и $d = f(E_n)$ показывает, что σ_{\max} соответствует оптимальная глубина выхода (зарождения) вторичных электронов $d = 26$ атомным слоям. С возрастанием энергий первичных электронов растет глубина зарождения вторичных электронов и вторичный ток уменьшается. При энергиях первичных электро-

нов, больших 800 eV, из металла в основном, повидимому, выходят вторичные электроны, созданные на глубинах $d \leq \sim 100$ атомным слоям. Эти вторичные электроны, быть может, создаются уже не непосредственно первичными электронами, а ступенчатым путем.

В заключение авторы отмечают большое участие, которое принимал в начале настоящей работы Р. Е. Авербух, безвременная смерть которого не позволила ему увидеть ее завершение.

Ленинградский педагогический
институт

Поступила в редакцию
26 июня 1953 г.

Литература

- [1] A. E. Hastings. Phys. Rev., 57, 695, 1940.—[2] P. L. Copeland. Phys. Rev., 58, 604, 1940.—[3] С. Ю. Лукьянов. Фотоэлементы, Изд-во АН СССР, 1948, стр. 85.—[4] М. М. Вудынский ДАН СССР, 82, 705, 1952.—[5] И. М. Бронштейн. Журн. техн. физики, 13, 176, 1943.—[6] А. Е. Кадышевич. ЖЭТФ, 15, 651, 1945.—[7] Н. С. Хлебников. Журн. техн. физики, 8, 994, 1938.—[8] Н. Бингинга. J. H. de Boer. Physica, 5, 17, 1938.—[9] R. Collath. Ann. d. Phys., 39, 59, 1941.—[10] А. Е. Кадышевич. ЖЭТФ, 15, 600, 1945.—[11] F. A. Coomber. Phys. Rev., 55, 519, 1939.—[12] А. Я. Вятский. ЖЭТФ, 20, 547, 1950.

О ПЕРЕНОСЕ МАССЫ И ЗАРЯДА ПОВЕРХНОСТНЫМИ ВОЛНАМИ

A. A. Власов

Границная задача теории многих частиц приводит к выводу о наличии переноса материи поверхностными волнами. Развивающийся аппарат конкретизируется для капиллярных волн в Не II и электрических поверхностных волн в электронной плазме сверхпроводников.

1. Введение

В известных работах Стокса (1847), Рэлея (1917) и, в особенности, Некрасова [1] развита теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. В этих работах вскрыто замечательное явление приповерхностного течения жидкости, обусловленное наличием волн. Возникает вопрос: в какой мере перенос массы поверхностными волнами определяется характером действующих сил, т. е. существует ли этот эффект для капиллярных волн и для волн на поверхности электронной жидкости в металлах, обусловленных выходом электронов из области, занятой положительными зарядами металла? Утвердительный ответ на этот вопрос приводит к другому вопросу — об отношении течения указанного типа, происходящего только под влиянием внутренних сил, к известным явлениям движения в Не II и в сверхпроводниках, поскольку при обсуждении подобных движений указанный эффект не принимался в расчет.

При анализе поведения жидкости при низких температурах необходимо рассматривать специальный молекулярный режим движения, когда упорядоченность, вносимая «дальными и коллективными взаимодействиями», не нарушается полностью диффузионным процессом перемешивания молекул, являющимся особенно характерным и привычным для высоких температур. Естественно, что этот режим движения требует своих причин, обеспечивающих поверхностное натяжение в жидкости. В классической теории капиллярности ван-дер-Ваальса равновесие сил в поверхностном слое обеспечивалось статическим равновесием (в макроскопическом смысле) между молекулярным притяжением и внешним давлением, с одной стороны, и, с другой — так называемым кинетическим давлением, обусловленным тепловым движением молекул, связанным с их перемешиванием. В тех случаях, когда при низких температурах кинетическое давление является недостаточным, остается одна возможность — молекулярное притяжение должно компенсироваться макроскопическим движением жидкости на поверхности. Поскольку движение на поверхности можно представить в виде волн, а с волнами связан перенос массы, приходим к заключению, что должны существовать реальные случаи, когда сам факт поверхностного натяжения органически связан с наличием поверхностных токов макроскопического характера.

В основу исходного аппарата можно положить уравнение для функции f [2]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_r v f + \operatorname{div}_v \left(-\frac{1}{m} \operatorname{grad} V \right) f = 0; \\ V = \int K(|r - r'|) f(r', v', t) dr' dv', \quad (1)$$

а также уравнение, лежащее в основе метода вторичного квантования

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V\Psi; \quad V = \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \psi^+(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (2)$$

Решение приведенных уравнений будем искать для потенциального плоского течения с постоянной плотностью вероятности ρ :

$$f = \rho \delta\left(\xi + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \delta\left(\eta + \frac{\partial \phi}{\partial y}\right); \quad \psi = \sqrt{\rho} \exp\{-i(m/\hbar)\phi\}. \quad (3)$$

Подлежащая определению действительная функция $\phi(x, y, t)$ играет роль потенциала скоростей, поскольку

$$\int \mathbf{v} f d\mathbf{v} = -\rho \operatorname{grad} \phi = \psi^+ \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla \right) \psi.$$

Подстановка предполагаемого решения в исходные уравнения приводит в обоих случаях к одинаковым уравнениям для определения ϕ :

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0; \\ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{m} V &= \text{const.} \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) выявляют частные, но точные решения для уравнений (1) и (2).

Для потенциала скоростей будем искать решения в виде волн, распространяющихся вдоль границы, в направлении, противоположном оси x , со скоростью $c = \omega/p$, где $\omega = 2\pi/T$, $p = 2\pi/\lambda$.

Принимая ось y направленной вверх, а ось x — горизонтальной, совпадающей с верхней границей, имеем следующее исходное уравнение

$$\Delta \phi = 0 \quad (5)$$

и два условия на границах в системе координат, в которой волна покойится.

Для плоского слоя толщины $2h$, на основании симметрии задачи относительно центральной плоскости ($y = -h$), должно иметь место граничное условие:

$$\left[-\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=-h} = 0. \quad (6)$$

Вследствие того, что форма профиля волны неизвестна и должна быть определена решением задачи, в качестве второго граничного условия необходимо привлечь два условия на свободной поверхности:

$$\psi = \text{const}; \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{m} V = \text{const}, \quad V = \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rho d\mathbf{r}',$$

а именно, постоянство на границе функции тока ψ : $\partial \psi / \partial x = \partial \phi / \partial y$, $-\partial \psi / \partial y = \partial \phi / \partial x$, и выполнение соотношения для потенциала скоростей и молекулярного потенциала на границе волны. Поставленная задача нелинейна. Нелинейность входит двояким образом — через квадраты производных потенциала скоростей и через посредство нелинейной формы профиля волны, определяющего границы интегрирования самопроизводных потенциала скоростей.

согласованного потенциала V . Точные методы, развитые в аналогичных задачах [1,8], базируются на конкретном виде потенциала V и поэтому являются специализированными. Мы намерены вернуться к ним позже. Имея целью разделить кинематические характеристики движения, не зависящие от конкретного вида потенциала, и динамические, определяющие, как мы увидим ниже, лишь дисперсионное уравнение волн, мы будем основываться на старых исследованиях Рэлея [4]. Кинематическими характеристиками мы называем те, которые могут быть получены посредством решения уравнения Лапласа с граничными условиями $\left[-\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=-h} = 0, \psi = \text{const}$.

2. Кинематические характеристики движения

1. Поле скоростей и уравнение профиля волн. Первое граничное условие удовлетворяется следующим решением уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned}\phi &= -cx + c \frac{\alpha}{p} \frac{\operatorname{ch} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \sin px, \\ \psi &= -cy + c \frac{\alpha}{p} \frac{\operatorname{sh} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \cos px,\end{aligned}\quad (8)$$

где α — безразмерный параметр, определяющий интенсивность отдельных гармоник волнового процесса, c — скорость среды в системе координат, в которой волна покоятся.

Распределение скоростей

$$\begin{aligned}v_x &= c - ca \frac{\operatorname{ch} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \cos px, \\ v_y &= -ca \frac{\operatorname{sh} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \sin px,\end{aligned}\quad (9)$$

указывает, что при $\alpha = 0$ среда равномерно движется со скоростью c вдоль оси x . На средней линии $y = -h$:

$$\begin{aligned}v_x &= c - \frac{\alpha}{\operatorname{ch} ph} \cos px, \\ v_y &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Постоянная c может быть определена как средняя скорость на уровне $y = -h$:

$$c = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda v_x|_{y=-h} dx.$$

Для случая $ph \gg 1$

$$v_x = c - ca e^{py} \cos py, \quad v_y = -ca e^{py} \sin px.$$

Таким образом поле скоростей асимптотически убывает при перемещении вглубь среды и осцилляторно изменяется вдоль уровня.

Для установления формы профиля волн воспользуемся вторым граничным условием, полагая на свободной поверхности $\psi = \text{const} = \psi_0$; тогда из (8):

$$y = -\frac{\psi_0}{c} + \frac{\alpha}{p} \frac{\operatorname{sh} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \cos px.$$

Выбирая начало отсчета на невозмущенном профиле (при $\alpha = 0, y = 0$), имеем $\psi_0 = 0$. Форма профиля волн определяется уравнением

$$y = \frac{\alpha}{p} \frac{\sinh p(y+h)}{\cosh ph} \cos px, \quad (11)$$

в неявном виде выражающим зависимость y от x .

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$y = \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha^3 y_3 + \dots$$

где y_1, y_2, y_3, \dots — подлежащие определению функции x .

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha^3 y_3 + \dots &= \frac{\alpha}{p} \frac{\cosh ph}{\sinh ph} \left\{ \frac{e^{ph}}{2} \left[1 + p(\alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \dots) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} p^2 (\alpha y_1 + \dots)^2 + \dots \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-ph}}{2} \left[1 - p(\alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \dots) + \frac{1}{2} p^2 (\alpha y_1 + \dots)^2 + \dots \right] \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем явный вид уравнения профиля волны:

$$y = \frac{1}{p} \operatorname{th} ph \left\{ \frac{\alpha^2}{2} + \left(\alpha + \frac{3}{4} \alpha^3 \right) \cos px + \frac{\alpha^2}{2} \cos 2px + \dots \right\}. \quad (12)$$

Уравнение для профиля приводит к приподнятости среднего уровня волн по отношению к невозмущенному уровню $y = 0$.

Величина средней приподнятости y — второго порядка относительно α :

$$\bar{y} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda y(x) dx = \frac{1}{p} \operatorname{th} ph \frac{\alpha^2}{2}, \quad (13)$$

при $ph \gg 1$:

$$\bar{y} = \alpha^2 / 2p.$$

Плоская стационарная задача без рассмотрения источников возбуждения волн, хотя и оставляет открытым вопрос о механизме поднятия уровня, однако количественно констатирует величину подъема¹. Хотя основные последующие результаты не зависят от выбранной нормировки функции тока для прямолинейного профиля (которая не должна зависеть от амплитуды волн), в целях наглядности мы будем в дальнейшем использовать формулу (13) в качестве обозначения характерной комбинации величин. Часть результатов § 5 существенно основывается на реальности эффекта приподнятости.

2. Количество массы, переносимое волнами. Кинетическая энергия волн. Для полного потока массы, приходящегося на перенос волн, имеем

$$Q_x = m\rho \int_{-h}^{y(x)} \left[\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} - c \right) \right] dy, \quad (14)$$

где $y(x)$ — уравнение профиля (11). Используя (8), имеем

$$Q_x = -m\rho c \frac{\alpha}{p} \frac{\sinh p(y+h)}{\cosh ph} \cos px = -m\rho c y. \quad (15)$$

¹ В работе Некрасова [1] поднятие уровня имеется (неявное). Этот эффект приподнятости среднего уровня может подвергнуться непосредственному экспериментальному изучению; его наличие предполагает компенсирующее понижение уровня жидкости у поперечных границ или у областей источника возбуждения волн.

Усредненное значение потока получается отличным от нуля:

$$\bar{Q}_x = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda Q_x dx = -m\rho c \bar{y}. \quad (16)$$

Знак минус указывает, что направление течения совпадает с направлением движения волн.

Так как средняя приподнятость уровня \bar{y} есть $\frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{p} \operatorname{th} ph$, то окончательно:

$$\bar{Q}_x = -m\rho c \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{p} \operatorname{th} ph. \quad (17)$$

Заметим, что для прямолинейного профиля $y(x) = \text{const}$ мы получили бы нулевое значение для среднего потока. В этом случае

$$Q_x = -m\rho c \frac{\alpha}{p} \frac{\operatorname{sh} p(\text{const} + h)}{\operatorname{ch} ph} \cos px$$

и, следовательно, $\bar{Q}_x = 0$. Наличие потока обусловлено учетом границ с волновым (не прямолинейным) профилем. Заметим также, что усредненный поток локализован в области выше границы $y = 0$:

$$Q_x = m\rho \int_0^{y(x)} (v_x - c) dy = -m\rho c \frac{\alpha}{p} \left(\frac{\operatorname{sh} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \right)_{y=0}^{y=y(x)} \cos px.$$

После усреднения получим

$$\bar{Q}_x = -m\rho c \bar{y},$$

т. е. то же выражение, которое имели при интегрировании от $-h$ до $y(x)$.

Кинетическая энергия, рассчитанная на одну волну, будет

$$\begin{aligned} \delta T &= \frac{m\rho}{2} \int_0^\lambda dx \int_{-h}^{y(x)} [(v_x - c)^2 + v_y^2] dy = \\ &= \frac{m\rho}{2} c^2 \int_0^\lambda dx \int_{-h}^{y(x)} \left[\alpha^2 \frac{\operatorname{ch}^2 p(y+h)}{\operatorname{ch}^2 ph} \cos^2 px + \alpha^2 \frac{\operatorname{sh}^2 p(y+h)}{\operatorname{ch}^2 ph} \sin^2 px \right] dy, \end{aligned}$$

что дает

$$\delta T = \rho \bar{y} \lambda mc^2 / 2. \quad (18)$$

Формулы для потока материи (16) и кинетической энергии волн (18) не зависят от сил взаимодействия между частицами среды или от типа внешних сил и поэтому имеют место для общего случая.

Закон действующих сил, как увидим ниже, определяет лишь дисперсионное уравнение волн.

3. Критическое значение амплитуды волн и полного тока, переносимого волнами. Условие разрешимости уравнения, определяющего профиль волн,

$$y = \frac{\alpha}{p} \frac{\operatorname{sh} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \cos px, \quad (19)$$

приводит к существованию максимального значения амплитуды волн, выше которого волновой процесс рассматриваемого типа уже невозможен. В самом деле, рассмотрим уравнение (19) в точке максимума волн при $px = \pi$:

$$\xi = \lambda \operatorname{sh}(\xi + ph) \quad (\xi = py, \lambda = \alpha / \operatorname{ch} ph). \quad (20)$$

В области значений $\xi < ph$, которые только и имеют физический смысл, уравнение (20) имеет или два действительных корня для ξ , если λ не превышает некоторого максимального значения, или ни одного действительного корня, причем один корень уменьшается с ростом λ (от $+\infty$), другой увеличивается от нуля. В точке касания прямой с линией гиперболического синуса оба корня совпадают. В точке касания

$$1 = \lambda \operatorname{ch}(\xi + ph). \quad (21)$$

Обозначая точку касания через ξ_k , имеем для ее определения уравнение

$$\xi_k = \operatorname{th}(\xi_k + ph). \quad (22)$$

Значение λ , соответствующее $\xi = \xi_k$, есть

$$\lambda = \frac{1}{\operatorname{ch}(\xi_k + ph)}.$$

Условие разрешимости (20) дает

$$\alpha \leq \operatorname{ch} ph / \operatorname{ch}(\xi_k + ph). \quad (23)$$

Для получения критического значения α мы рассматривали точку на волне, в которой $\cos px = 1$, другие точки дают только большие величины для предельного значения α .

Таким образом существует максимальная величина амплитуды волн, определяемая (23), выше значения которой волновой процесс невозможен. Для $ph \gg 1$, $\xi_k = 1$, $\alpha_{\max} = 1/\hat{e}$, где \hat{e} — основание натуральных логарифмов. Соответственно максимальному значению параметра α существует максимальное значение для всех величин, характеризующих явление, а именно, для приподнятости среднего уровня, полного тока, кинетической энергии волн. Например, для случая $ph \gg 1$

$$\bar{Q}_{\max} = -m\rho c \bar{y}_{\max}, \quad \bar{y}_{\max} = \frac{1}{2p\hat{e}^2}. \quad (24)$$

3. Капиллярные волны

1. Молекулярный потенциал на профиле волны. Само-согласованный потенциал V , входящий в уравнение (7):

$$V = \rho \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{y(x')} dy' \int_{-\infty}^{\infty} K[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] dz',$$

где $y(x')$ — уравнение профиля, можно представить в виде

$$\begin{aligned} V &= \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{K}[(x - x')^2 + (y - y')^2] \rho(x', y') dx' dy' = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{K}[\xi^2 + (y - y')^2] \rho(x + \xi, y') d\xi dy', \end{aligned} \quad (25)$$

$$\bar{K} = \int_{-\infty}^{\infty} K[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] dz'.$$

Функция $\rho(x + \xi, y')$ отлична от нуля только внутри среды:

$$\rho(x + \xi, y') = \rho \int_{-\infty}^{y(x+\xi)} \delta(y' - y'') dy'' = \begin{cases} \rho, & y' < y(x + \xi), \\ 0, & y' > y(x + \xi), \end{cases}$$

$y(x + \xi)$ — уравнение профиля, а δ — дельта-функция Дирака. Разлагая $\rho(x + \xi, y')$ в ряд по степеням ξ :

$$\rho(x + \xi, y') = \rho(x, y') + \frac{\partial \rho}{\partial x} \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \xi^2 + \dots$$

и учитывая, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho \delta(y' - y(x)) \frac{dy}{dx}; \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \rho \delta'(y' - y(x)) \frac{d^2 y}{dx^2} - \rho \delta'(y' - y(x)) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \text{ и т. д.,}$$

получим после подстановки в (25)

$$V = \rho \sum_{s=0}^{\infty} \bar{K}_{2s} \frac{d^{2s} y(x)}{dx^{2s}}, \quad (26)$$

где \bar{K}_{2s} — «моменты функции» $\bar{K}((x - x')^2 + (y - y')^2)$:

$$\bar{K}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta; \quad \bar{K}_{2s} = \frac{1}{(2s)!} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(\xi^2) \xi^{2s} d\xi \quad (s \geq 1).$$

Таким образом потенциал короткодействующих сил, взятый на профиле, который ограничивает распределение источников этих сил, выражается через четные производные от уравнения профиля вдоль границы раздела.

2. Дисперсионное уравнение волн. Значения капиллярной постоянной. В граничном условии на поверхности волн (7) удержим лишь члены первого порядка по α , тогда имеем:

$$c^2 - 2c^2 \alpha \left(\frac{\operatorname{ch} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \right)_{y=0} \cos px + \\ + \frac{2}{m} \rho \sum_{s=1}^{\infty} \bar{K}_{2s} (-1)^s \frac{\alpha}{p} \left(\frac{\operatorname{sh} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \right)_{y=0} p^{2s} \cos px = \text{const.}$$

Этому уравнению можно удовлетворить, если положить

$$c^2 = \frac{1}{m} \rho \frac{1}{p} \operatorname{th} ph \sum_{s=1}^{\infty} \bar{K}_{2s} (-1)^s p^{2s}. \quad (27)$$

В феноменологической теории капиллярности

$$c^2 = (\sigma/m\rho) p \operatorname{th} ph. \quad (27')$$

Сравнение дает величину капиллярной постоянной σ

$$\sigma = \rho^2 \sum_{s=1}^{\infty} \bar{K}_{2s} (-1)^s p^{2(s-1)}, \quad (28)$$

являющейся уже функцией волнового числа. Удерживая только первый член разложения

$$\sigma = -\rho^2 \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(\xi^2) \xi^2 d\xi > 0, \quad (29)$$

находим, что необходимо, чтобы силы притяжения преобладали над силами отталкивания (в смысле величины второго момента от функции взаимодействия K).

3. Потенциальная энергия капиллярных волн. Потенциальная энергия волны, рассчитанная на одну длину волны λ , может быть подсчитана по формуле:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \delta \rho V dx, \quad (30)$$

где $\delta \rho$ — избыточная поверхностная плотность среды, обусловленная наличием волн

$$\delta \rho = \rho y(x) = \rho \frac{1}{p} \operatorname{th} ph \left\{ \frac{\alpha^2}{2} + \alpha \cos px + \frac{\alpha^2}{2} \cos 2px + \dots \right\},$$

$y(x)$ — уравнение профиля волны, а V — молекулярный потенциал на профиле

$$V = \rho \sum_{s=0}^{\infty} \bar{K}_{2s} \frac{d^{2s}y(x)}{dx^{2s}}.$$

Удерживая лишь члены наименьшего (второго) порядка по α , находим

$$\delta W = \frac{1}{2} \rho \frac{1}{p} \operatorname{th} ph \frac{\alpha^2}{2} \lambda \left\{ \rho \bar{K}_0 + \rho \frac{1}{p} \operatorname{th} ph \sum_{s=1}^{\infty} \bar{K}_{2s} (-1)^s p^{2s} \right\}$$

или, воспользовавшись формулой для c^2 и \bar{y} ,

$$\delta W = \rho \bar{y} \lambda \left\{ \frac{\rho \bar{K}_0}{2} + \frac{mc^2}{2} \right\}. \quad (31)$$

Первый член в скобках выражает потенциальную энергию молекулы, обусловленную приподнятостью среднего уровня жидкости при наличии волн, второй — потенциальную энергию, обязанную наличию кривизны поверхности.

4. Капиллярные волны в электронной жидкости

1. Рассмотрим возможность существования в металлах поверхностных волн, обусловленных частичным выходом электронной жидкости из области, занятой положительными зарядами на границе металла. Будем считать положительный заряд неподвижным и равномерно распределенным между плоскостями $y = 0$ и $y = -2h$. Кинематические характеристики движения, полученные в разделе 2, не зависят от конкретизации сил взаимодействия и, следовательно, без изменения переносятся на случай электронной жидкости. Для выяснения характера дисперсионного уравнения учтем электрические силы в граничном условии на свободном профиле волн.

На поверхности расположен заряд с поверхностной плотностью $e \delta \rho$

$$e \delta \rho = e \rho y(x) = e \rho \frac{\alpha}{p} \frac{\operatorname{sh} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \cos px.$$

Потенциал, создаваемый этим зарядом, должен удовлетворять уравнению Лапласа и граничным условиям

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad (V)_1 = (V)_2, \quad \epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} - \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} = 4\pi e \delta \rho,$$

где ϵ_1 и ϵ_2 — диэлектрические постоянные внутри и вне среды.
Решение для области внутри и вне среды таково:

$$V_1 = E_1 \frac{\alpha}{p} \frac{\operatorname{ch} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \cos px; \quad V_2 = E_2 \frac{\alpha}{p} e^{-py} \cos px.$$

Границные условия задачи дают

$$E_1 = E_2 = \frac{4\pi e \rho}{p} \frac{\operatorname{th} ph}{\epsilon_2 + \epsilon_1 \operatorname{th} ph}.$$

Таким образом при наличии поверхностных волн существует как продольное, так и поперечное электрическое поле, монотонно убывающее с глубиной. В граничном условии на поверхности уровня:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{e}{m} V = \text{const},$$

удержим лишь члены первого порядка по α , тогда имеем

$$c^2 - 2c^2 \alpha \left(\frac{\operatorname{ch} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \right)_{y=0} \cos px + 2 \frac{e}{m} E_1 \frac{\alpha}{p} \left(\frac{\operatorname{ch} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \right)_{y=0} \cos px = \text{const},$$

откуда

$$c^2 = \frac{e}{m} E_1 \frac{1}{p}.$$

Учитывая выражение для E_1 , получаем дисперсионное уравнение волн следующего вида:

$$c^2 = \frac{\omega_0^2}{p^2} \frac{\operatorname{th} ph}{\epsilon_2 + \epsilon_1 \operatorname{th} ph}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 \rho}{m}. \quad (32)$$

Сравнение с феноменологической теорией капиллярности

$$c^2 = \frac{\sigma}{m \rho} p \operatorname{th} ph$$

дает величину капиллярной постоянной

$$\sigma = \frac{\omega_0^2}{p^3} m \rho \frac{1}{\epsilon_2 + \epsilon_1 \operatorname{th} ph}, \quad (33)$$

в данном случае существенно зависящей от волнового числа p .

2. Асимптотическое убывание магнитного поля при наличии поверхностных волн. Критическое значение внешнего магнитного поля. Ток, рассчитанный на единицу длины, есть

$$\delta I_x = \frac{e}{m} Q_x = e pc y(x) = e \delta \rho c$$

[на основании (15)].

В указанном случае для векторного потенциала можно положить $A_x \neq 0$, $A_y = A_z = 0$. Векторный потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) A_x = 0$ и граничным условиям $(A_x)_1 = (A_x)_2$; $(\partial A_x / \partial y)_1 - (\partial A_x / \partial y)_2 = (4\pi/c_s) \delta I_x$, где c_s обозначает скорость света. Решение уравнения Лапласа для области внутри (индекс 1) и вне металла таково:

$$A_{x_1} = -H_1 \frac{\alpha}{p} \frac{\operatorname{ch} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \cos px; \quad A_{x_2} = -H_0 y - H_1 \frac{\alpha}{p} e^{-py} \cos px,$$

где H_0 — внешнее магнитное поле.

Границные условия дают

$$H_0 = \frac{4\pi}{c_s} \delta I_x = \frac{4\pi}{c_s} e\rho \bar{y}, \quad H_1 = \frac{4\pi e\rho}{c_s p} c \frac{\operatorname{th} ph}{1 + \operatorname{th} ph}.$$

Для области внутри среды

$$H_z = -\frac{\partial A_{x_1}}{\partial y} = \frac{4\pi e\rho}{c_s p} c \frac{\operatorname{th} ph}{1 + \operatorname{th} ph} \alpha \frac{\operatorname{sh} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \cos px, \quad (34)$$

в случае $ph \gg 1$

$$H_z = \frac{2\pi e\rho}{c_s} c \frac{\alpha}{p} e^{py} \cos px.$$

Таким образом магнитное поле асимптотически убывает с глубиной. Глубина проникновения определяется длиной поверхностных волн ($\delta = 1/p$). Замечаем, что внешнее магнитное поле H_0 совпадает со средним значением внутреннего магнитного поля на границе среды с точностью до фактора $\operatorname{th} ph/(1 + \operatorname{th} ph)$.

Поскольку внутреннее магнитное поле зависит от интенсивности волн, результат можно сформулировать так: внешнее магнитное поле индуцирует определенную интенсивность волнового процесса на границе. Возникающие токи на границе, в свою очередь, экранируют внешнее магнитное поле. Так как волновые процессы рассматриваемого типа имеют максимальную амплитуду (максимальное α), то и внешнее магнитное поле имеет критическое значение, соответствующее максимальной амплитуде волн (см. раздел 2). Критическое значение магнитного поля мы получим, полагая для случая $ph \gg 1$, $\alpha_{\text{макс}} = 1/e$:

$$H_{kp} = \frac{4\pi}{c_s} e\rho \bar{y}_{kp}; \quad \bar{y}_{kp} = \frac{1}{2p\hat{e}^2}, \quad (35)$$

c — скорость распространения волн, определяемая формулой (32).

3. Электрическая энергия поверхностных волн. Электрическая энергия поверхностных зарядов, обусловленных наличием волн, есть

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_0^\lambda e\delta\rho V dx, \quad (36)$$

где

$$e\delta\rho = e\rho y(x) = e\rho \frac{1}{p} \operatorname{th} ph \left(\frac{\alpha^2}{p} + \alpha \cos px + \dots \right),$$

а V — потенциал на профиле волны:

$$V = E_1 \frac{\alpha}{p} \frac{\operatorname{ch} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \cos px, \quad E_1 = \frac{4\pi e\rho}{p} \frac{\operatorname{th} ph}{\epsilon_2 + \epsilon_1 \operatorname{th} ph}.$$

Удерживая члены наименьшего (второго) порядка по α , получим

$$\delta W = \frac{1}{2} \frac{m\omega_0^2}{p^2} \frac{\operatorname{th} ph}{\epsilon_2 + \epsilon_1 \operatorname{th} ph} \frac{\alpha^2}{2p} \operatorname{th} ph \lambda;$$

приняв во внимание дисперсионное уравнение волн, а также величину средней приподнятости уровня $\bar{y} = (\alpha^2/2p) \operatorname{th} ph$, формулу для потенциальной электрической энергии можно записать так:

$$\delta W = \rho \bar{y} \lambda m c^2 / 2, \quad (37)$$

что точно совпадает с кинетической энергией волн

$$\delta T = \rho \bar{y} \lambda m c^2 / 2.$$

Заметим, что потенциальная энергия волн пропорциональна изменению поверхности δS :

$$\delta S = \int_0^\lambda \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} - 1 \right] dx = \frac{\alpha^2}{4} \operatorname{th}^2 ph \lambda.$$

Поэтому можно говорить о поверхностном натяжении и с энергетической точки зрения, как энергии, рассчитанной на единицу поверхности δS . Для коэффициента поверхностного натяжения σ получаем

$$\sigma = \frac{\omega_0^2}{p^3} m p \frac{1}{\epsilon_2 + \epsilon_1 \operatorname{th} ph},$$

что совпадает с формулой (33).

4. Учет запаздывания. Минимальное волновое число. В тех случаях, когда диэлектрическая постоянная настолько велика (см. раздел 6), что скорости капиллярных волн могут быть сравнимы со скоростью света в среде $c_s/\sqrt{\epsilon_1}$ (но малы по сравнению с c_s), необходимо учесть запаздывание электромагнитных взаимодействий. В этом случае вместо уравнений Лапласа для скалярного и векторного потенциала необходимо исходить из волнового уравнения, которое в системе координат, где капиллярная волна движется, имеет вид

$$(1 - \beta_i^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \quad (1 - \beta_i^2) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (i = 1, 2);$$

$\beta_i^2 = \epsilon_i c^2 / c_s^2$, c_s — скорость света в пустоте. Решение, удовлетворяющее граничным условиям для этого случая, получим аналогично предыдущему:

$$V_1 = E_1 \frac{\alpha}{p} \frac{\operatorname{ch} p(y+h)s_1}{\operatorname{ch} ph s_1} \cos px; \quad V_2 = E_1 \frac{\alpha}{p} e^{-ps_2 y} \cos px;$$

$$A_{x_1} = -H_1 \frac{\alpha}{p} \frac{\operatorname{ch} p(y+h)s_1}{\operatorname{ch} ph s_1} \cos px; \quad A_{x_2} = -H_0 y - H_1 \frac{\alpha}{p} e^{-ps_2 y} \cos px$$

$$\left(s_i^2 = 1 - \beta_i^2; \quad E_1 = \frac{4\pi e\rho}{p} \frac{\operatorname{th} ph}{\epsilon_2 s_2 + \epsilon_1 s_1 \operatorname{th} ph s_1}; \quad H_1 = \frac{4\pi e\rho}{p} \frac{c}{c_s} \frac{\operatorname{th} ph}{s_2 + s_1 \operatorname{th} ph s_1} \right).$$

Дисперсионное уравнение приобретает вид:

$$c^2 = \frac{\omega_0^2}{p^2} \frac{\operatorname{th} ph}{\epsilon_2 s_2 + \epsilon_1 s_1 \operatorname{th} ph s_1}, \quad (38)$$

переходящее при $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow 1$ в прежнее уравнение (32).

Глубина проникновения магнитного поля определяется теперь величиной $\delta = 1/ps_1$; электрическая и магнитная энергия волн формулой

$$\delta W = \int_0^\lambda dx \left[\int_{-h}^{y(x)} \frac{\epsilon_1 E^2 + H^2}{8\pi} dy + \int_{y(x)}^\infty \frac{\epsilon_2 E^2 + H^2}{8\pi} dy \right] = \\ = \rho \bar{y} \lambda \frac{mc^2}{2} \left[\frac{\epsilon_2 \frac{s_2^2 + 1}{s_2} + \epsilon_1 \frac{s_1^2 + 1}{s_1} \operatorname{th} p h s_1}{2(\epsilon_2 s_2 + \epsilon_1 s_1 \operatorname{th} p h s_1)} + \frac{c^2 \epsilon_2 s_2 + \epsilon_1 s_1 \operatorname{th} p h s_1}{c_s^2 2(s_2 + s_1 \operatorname{th} p h s_1)} + O(p h e^{-ph}) \right],$$

где последнее выражение в скобках обозначает члены, быстро убывающие с ростом толщины слоя. Пренебрегая членами, содержащими β_i^2 , получаем (37).

В случае $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$ и $h \rightarrow \infty$ дисперсионное уравнение (38) приобретает вид:

$$\beta^2 = \frac{\gamma}{V^2 - \beta^2}; \quad \beta^2 = \epsilon_1 \frac{c^2}{c_s^2}; \quad \gamma = \frac{\omega_0^2}{p^2 c_s^2}.$$

Это кубическое уравнение при заданном γ имеет два положительных корня для β^2 . Один корень с увеличением γ увеличивается от нуля, другой уменьшается от единицы. При $\gamma = 4/27$ оба корня совпадают.

В точке слияния корней $\beta^2 = 2/3$. Значение $\gamma = 4/27$ является максимальным. Ветвь малых значений β соответствует ранее рассмотренному случаю малых скоростей. Важным является существование минимального значения волнового числа

$$p^2 \geq p_{\min}^2 = \frac{4}{27} \frac{\omega_0^2}{c_s^2}, \quad (39)$$

ниже значения которого не существует решений в виде поверхностных волн.

В точке слияния корней

$$c^2 = \frac{2}{3} \frac{c_s^2}{\epsilon_1}. \quad (40)$$

5. Условия динамической устойчивости состояний движения при наличии поверхностных волн

1. Поставим вопрос: при каких условиях состояние движения в виде поверхностных волн энергетически более выгодно, чем состояние покоя?

При реализации подобного условия произвольные флюктуации переведут систему с отсутствием волн в состояние с их наличием. В противном случае требуются внешние причины для стационарного существования волн.

Если δE обозначает энергию волн, рассчитанную на длину волны, то, пользуясь выражением для кинетической и потенциальной энергии капиллярных волн (18) и (31), получим критерий динамической устойчивости в виде

$$\delta E = \delta T + \delta W = \rho \bar{y} \lambda \left\{ mc^2 + \frac{1}{2} \rho \bar{K}_0 \right\} < 0, \quad (41)$$

где c — скорость капиллярных волн:

$$c^2 = -\rho \bar{K}_0 p \operatorname{th} ph$$

и

$$\bar{K}_2 = \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(\xi^2) \xi^2 d\xi; \quad \bar{K}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \bar{K}(\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta.$$

Этому условию можно удовлетворить, если

$$\frac{1}{2} p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \bar{K}(\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta < 0$$

и по модулю больше mc^2 , т. е. энергия молекулы на поверхности, обусловленная взаимодействием со всеми другими, должна соответствовать притяжению и превышать величину mc^2 . Это требование указывает на необходимость преобладания сил притяжения над силами отталкивания не только в смысле второго момента от функции взаимодействия \bar{K} (условие для $c^2 > 0$), но и в смысле нулевого момента.

Таким образом при известных условиях состояние движения при наличии волн является энергетически более выгодным, чем состояние покоя.

Условие устойчивости (41) накладывает ограничение на значение волнового числа p капиллярных волн; необходимо, чтобы

$$p < \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \bar{K}(\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(\xi^2) \xi^2 d\xi} = \frac{1}{l}, \quad (42)$$

где l — характерная длина молекулярных взаимодействий вблизи поверхности.

2. Для электрических поверхностных волн при подсчете энергетического баланса волн необходимо учесть приподнятость среднего уровня электронной жидкости над уровнем положительных зарядов. Поверхностная плотность отрицательных зарядов

$$e\bar{\rho} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda e\delta\rho dx = e\rho \frac{\alpha^2}{2p} \operatorname{th} ph = e\bar{y}.$$

Нейтральность системы требует наличия или появления положительных зарядов в объеме среды, компенсирующих поверхностный отрицательный заряд.

Если — U_+ обозначает потенциальную энергию электрона в поле положительных зарядов двойного электрического слоя, то энергия электронов, приходящихся на объем $\bar{y}\lambda$, будет $\bar{y}\lambda(-U_+)$. Кинетическая и потенциальная энергии волн определены выше: $\delta T = \delta W = \bar{y}\lambda mc^2/2$.

Таким образом формула баланса имеет вид:

$$\delta E = \bar{y}\lambda \{mc^2 + U' - U_+\},$$

где U' обозначает собственную энергию положительных зарядов двойного слоя. Мы видим, что проблема в электрическом случае более сложна, чем в случае капиллярных волн в нейтральной жидкости, так как количественный подсчет U' и U_+ требует конкретизации механизма появления индуцированных положительных зарядов в объеме металла. Тем не менее можно утверждать, что существуют условия,

когда состояние движения в виде волн энергетически является более выгодным, чем состояние покоя, для чего необходимо, чтобы $U_+ > mc^2 + U'$.

Поскольку c^2 (для не очень больших значений) уменьшается с ростом p (§ 4), и учитывая факт наличия минимального значения волнового числа (39), приходим к заключению, что значение p должно ограничиваться требованием:

$$p > \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{27} \frac{\omega_0^2}{c_s^2}}, \\ p_{\max}, \end{cases} \quad (43)$$

где p_{\max} определяется из условия $mc^2 = U_+ - U'$.

3. К проблеме устойчивости состояний движения в виде поверхностных волн нужно отнести сложные вопросы связи поверхностных волн с явлениями вязкости и со звуковыми объемными колебаниями среды. В настоящей стадии работы можно установить лишь необходимые условия для подобной связи. Заметим, что исходные уравнения (1) и (2) помимо исследованных поверхностных волн имеют решения вида свободных звуковых колебаний. С другой стороны, поверхностные решения вдалеке от границ не исчезают вполне при конечных размерах образца. Можно поставить вопрос, сравнивая оба типа решений вдалеке от границ: при каких условиях они выражают одно и то же решение и когда они принципиально различны?

Это сравнение приводит к условию для волновых чисел капиллярных волн, в интервале которых капиллярные волны не связаны (или практически мало связаны) со звуковым полем, а следовательно, будем считать, с внутренними степенями свободы, определяющими вязкость жидкостей при низких температурах.

Одно из исходных уравнений (2):

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \int \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \psi^+(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \psi(\mathbf{r}),$$

в бесконечной области, при каких угодно сильных взаимодействиях, имеет точное решение, соответствующее равномерной плотности частиц и перемещению среды с равномерной скоростью:

$$\psi_0 = \frac{a_{f_0}}{VV} \exp \left\{ \frac{E_0}{i\hbar} t + i \frac{f_0 \mathbf{r}}{\hbar} \right\} \quad (44)$$

$$\left(E_0 = \frac{f_0^2}{2m} + \frac{N_0}{V} \Phi(0), \Phi(0) = \int \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}', N_0 = a_{f_0}^+ a_{f_0}^- \right).$$

В линейном приближении поле объемных волн будет описываться возмущенной функцией

$$\psi = \psi_0 + \Theta(\mathbf{r}, t), \Theta(\mathbf{r}, t) \ll \psi_0.$$

Рассуждая вполне аналогично [5], получим решение в виде

$$\begin{aligned} \psi = & \exp \left\{ \frac{E_0}{i\hbar} t + i \frac{f_0 \mathbf{r}}{\hbar} \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{a_{f_0}}{VV} + \sum_{f \neq f_0} \exp \left\{ \frac{E_f}{i\hbar} t \right\} \left(b_f \exp \left\{ i \frac{f \mathbf{r}}{\hbar} \right\} + b_{-f} \exp \left\{ -i \frac{f \mathbf{r}}{\hbar} \right\} \right) \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

и уравнение для E_f :

$$\left(E_f - \frac{f_0 f}{m} \right)^2 = \left(\frac{f^2}{2m} \right)^2 + \frac{f^2}{m} \frac{N_0}{V} \Phi \left(\frac{f}{\hbar} \right), \quad (46)$$

где

$$\Phi\left(\frac{f}{\hbar}\right) = 4\pi \int_0^\infty \Phi(q) \frac{\sin(f/\hbar)q}{(f/\hbar)q} q^2 dq.$$

Амплитуды возбуждения b_f удовлетворяют системе:

$$\begin{aligned} \left[E_f - \left(\frac{f^2}{2m} + \frac{f_0 f}{m} + \frac{N_0}{V} \Phi\left(\frac{f}{\hbar}\right) \right) b_f - \frac{N_0}{V} \Phi\left(\frac{f}{\hbar}\right) b_{-f}^+ \right] = 0; \\ - \frac{N_0}{V} \Phi\left(\frac{f}{\hbar}\right) b_f + \left[-E_f - \left(\frac{f^2}{2m} - \frac{f_0 f}{m} + \frac{N_0}{V} \Phi\left(\frac{f}{\hbar}\right) \right) b_{-f}^+ \right] = 0. \end{aligned}$$

Решение (45) указывает, в частности, что, опираясь только на объемные решения, невозможно «оторвать» звуковое поле от объемной трансляции среды. Звуковое поле полностью увлекается движущейся средой, поскольку к волновому числу «возбуждений» f/\hbar всегда прибавляется волновое число \bar{f}_0/\hbar , отображающее движение среды.

Волновая функция для поверхностных волн

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp\left\{-i \frac{m}{\hbar} \varphi\right\}, \quad \varphi = -cx + c \frac{\alpha}{p} \frac{\operatorname{ch} p(y+h)}{\operatorname{ch} ph} \sin px.$$

В середине слоя $y = -h$, при малом α можно написать

$$\psi = \exp\left\{i \frac{m}{\hbar} cx\right\} \left\{ \sqrt{\rho} + i \frac{\alpha}{p} c \sqrt{\rho} \frac{m}{\hbar} \frac{1}{\operatorname{ch} ph} \sin px \right\}. \quad (47)$$

Сравнение (45) с (47) указывает на их совпадение при следующих условиях:

$$\frac{\alpha}{V\bar{V}} = \sqrt{\rho}, \quad f_0 = mc, \quad \frac{f}{\hbar} = p, \quad E_f = 0, \quad b_f = -b_{-f}, \quad (48)$$

где c и p — скорость и волновое число капиллярных волн, f/\hbar — волновое число «элементарных возбуждений».

При невыполнении основного из этих условий ($E_f = 0$) можно будет утверждать, что связь между звуковым полем и поверхностными волнами отсутствует. Условие разрешимости уравнения $E_f = 0$, которое можно записать на основании (46) в виде

$$f_0^2 = \frac{f^2}{4} + \frac{mN_0}{V} \Phi\left(\frac{f}{\hbar}\right), \quad (49)$$

зависит от вида функции взаимодействия $\Phi(|r - r'|)$. Рассмотрим два случая: $\Phi(0) = \int_0^\infty \Phi(q) 4\pi q^2 dq > 0$ (силы отталкивания преобладают над силами притяжения) и обратный случай $\Phi(0) < 0$.

При этом в обоих случаях необходимо (для положительности капиллярной постоянной):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \xi^2 \delta(\zeta) d\xi d\eta d\zeta < 0.$$

Для $\Phi(0) > 0$ уравнение неразрешимо, если $f_0^2 < (mN_0/V)\Phi(0)$, или на основании (48):

$$c^2 < \frac{N_0}{Vm} \Phi(0), \quad (50)$$

т. е. если скорость капиллярных волн не превосходит некоторой величины (аналогичной скорости звука в среде), взаимодействие между капиллярными волнами и звуковым полем отсутствует. Для волнового числа на границе условий разрешимости уравнения (49) имеем $f_0^2 > f^2/4$ или $p < 2m_0c/\hbar$. Условие (50) аналогично условию работы [6], однако заметим, что этот случай не удовлетворяет условию устойчивости (41). Если $\Phi(0) < 0$, то, обозначая $\Phi^+(f/\hbar) = -\Phi(f/\hbar)$, запишем уравнение (49) в виде

$$\frac{f^2}{4} - f_0^2 = \frac{mN_0}{V} \Phi^+\left(\frac{f}{\hbar}\right). \quad (51)$$

При $f \rightarrow \infty$, $\Phi^+(f/\hbar) \rightarrow 0$, проходя через нулевые значения, для молекулярного потенциала, имеющего потенциальную яму. Первый корень уравнения (51) приближенно можно оценить, разлагая в ряд $\Phi^+(f/\hbar)$ по степеням f/\hbar и удерживая только первые два члена разложения:

$$\Phi^+\left(\frac{f}{\hbar}\right) = \Phi^+(0) \left(1 - r_0^2 \frac{f^2}{\hbar^2}\right) = 0,$$

где

$$r_0^2 = \frac{4\pi}{3!} \int_0^\infty \Phi^+(q) q^4 dq / \left(4\pi \int_0^\infty \Phi^+(q) q^2 dq\right), \quad (52)$$

величина r_0 — порядка радиуса действия молекулярных взаимодействий.

В рассматриваемом случае уравнение (51) для f всегда разрешимо, и, следовательно, связь между обоими типами волн всегда имеется.

При непрерывном увеличении f_0 значение корня для f скачкообразно меняется, когда функция $(f^2/4) - f^2$ касается кривой $(mN_0/V) \times \Phi^+(f/\hbar)$ в точке первого минимума этой функции.

Значение корня меняется от значения $f/\hbar \sim \frac{1}{r_0}$ к большим значениям. Предполагая, что значительная интенсивность объемных волн со столь малыми длинами волн (меньшими радиуса действия молекулярных взаимодействий) маловероятна (особенно для низких температур), можно утверждать, что имеется скачкообразное уменьшение связи между капиллярными и объемными волнами, начиная с указанного критического значения для f_0 .

Область больших значений для f_0 (и соответственно для f) можно считать динамически более устойчивой в сравнении с малыми значениями f_0 и f . Это обстоятельство позволяет дать оценку значениям этих величин, соответствующим скорости и волновому числу наиболее устойчивых капиллярных волн. На границе области устойчивости $(f^2/4) - f_0^2 < 0$, так как $\Phi_{\min}^+(f/\hbar) < 0$ и, следовательно, $f < 2f_0$; с другой стороны, $f/\hbar > 1/r_0$, поэтому можно написать неравенство $1/r_0 < f/\hbar < 2f_0/\hbar$.

На границе области устойчивости $f_0 = mc$, $f/\hbar = p$ [на основании (48)], где c и p — скорость и волновое число капиллярных волн. При соединяя критерий устойчивости (42), можно написать неравенство

$$\frac{1}{r_0} < p < \begin{cases} 1/l \\ 2m_0c/\hbar \end{cases}, \quad (53)$$

которое определяет интервал волновых чисел наиболее устойчивых капиллярных волн.

6. О порядке характерных величин для Не II и сверхпроводников

1. Для Не II из опытных данных о значении капиллярной постоянной, плотности жидкости и радиуса действия молекулярных сил можно определить скорость капиллярных волн на границе их устойчивости. Полагая [7] $\sigma = 0,3$ дин/см, $m_p = 0,15$ г/см³, $r_0 = 3 \cdot 10^{-8}$ см и пользуясь формулами (27') и (53):

$$c^2 = \frac{\sigma}{m_p} p \operatorname{th} ph, \quad p = \frac{1}{r_0},$$

получаем $c = 10^4$ см/сек для случая $ph \gg 1$. Для потока массы, переносимого капиллярными волнами, рассчитанного на погонную единицу длины, мы имели (17):

$$Q = m_p c \frac{1}{p} \operatorname{th} ph \frac{\alpha^2}{2}.$$

Течение в пленках Не II интерпретировалось в опытах Доунта и Мендельсона (и других) [7] как объемное (по всей толще пленки). Скорость течения рассчитывалась по формуле:

$$Q = m_p c' h',$$

где h' — толщина пленки. Сопоставляя указанные два выражения потока, получаем

$$c' = c \frac{1}{ph'} \operatorname{th} ph \frac{\alpha^2}{2}.$$

Для значительной нелинейности $\alpha_{\max} = 1/\hat{e}$, $h' = 3 \cdot 10^{-6}$ см [7], $p = 1/r_0$:

$$c' = 7 \text{ см/сек.}$$

Это находится в соответствии с экспериментальными данными, указывая, однако, что реальные скорости волн c превышают скорость c' в тысячу раз. Этот факт может подвергнуться экспериментальному изучению.

Частота капиллярных волн $v = cp/2\pi$ равна $(1/6\pi) \cdot 10^{12}$ сек⁻¹, что соответствует длине электромагнитных волн λ_s :

$$\lambda_s = 0,4 \text{ см},$$

не являющейся недоступной для современной радиофизики.

Для устойчивости течения необходимо, чтобы сумма кинетической и потенциальной энергии волн, рассчитанных на одну молекулу (на основании (18) и (31) равная mc^2), была бы больше kT . На границе устойчивости, полагая $mc^2 = kT$, находим для критической температуры величину

$$T_{kp} = 3,2^\circ\text{K},$$

в то время как температура исчезновения сверхтекущего течения определяется в $2,2^\circ\text{K}$.

Сравнивая энергию молекулы, обусловленную капиллярными волнами mc^2 , с энергией силы тяжести mgH , находим, что они будут сравнимы, если

$$H \sim 1 \text{ км.}$$

Это указывает, что анализируемые течения жидкости для Не II поразительно устойчивы. Нужны трубы большой длины, чтобы уничтожить течение силою тяжести, поскольку оно уже происходит.

Максимальная амплитуда капиллярных волн определяется формулой

$$y_{\max} = \frac{a_{\max}}{p} \operatorname{th} ph;$$

для $ph \gg 1$ и $a_{\max} = 1/\hat{e}$ находим при $1/p = 3 \cdot 10^{-8}$ см:

$$y_{\max} = 10^{-8} \text{ см},$$

что составляет лишь одну треть атомного расстояния для атомов гелия. В случае течения Не II через щели (опыты Капицы [8]) при наличии капиллярных волн разница между свободной поверхностью и твердой стенкой может не иметь принципиального значения по причине столь малых абсолютных величин амплитуды волн. Поэтому есть некоторые основания не различать природу течений в тонких пленках и в объемах, ограниченных твердыми поверхностями или фазой Не I.

Зависимость от температуры потенциальной энергии волн (рассчитанной на одну молекулу)

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{\sigma}{2\rho} \frac{1}{r_0}$$

определяется зависимостью поверхностного натяжения и плотности от температуры. Из опыта известно, что имеет место (хотя и слабое) уменьшение σ и возрастание ρ с увеличением температуры. Этим объясняется направление сверхтекущих потоков в Не II от меньших к большим температурам как в пленках, так и в ограниченных объемах. Течение осуществляется в направлении убыли потенциальной энергии системы.

Условия устойчивости движения (раздел 5) приводят к тому, что связь капиллярных волн с объемными колебаниями среды значительно ослабляется (или полностью уничтожается), если скорость c превышает некоторый предел. Поэтому становится, по крайней мере, качественно понятным отсутствие заметной вязкости в явлениях течения подобного рода.

Теория базируется на предположении однозначного молекулярного потенциала взаимодействия. Эта однозначность имеет место для атомов Не⁴, но не Не³; в последнем случае имеют место два потенциала ($\Phi_{\text{асим}}$ и $\Phi_{\text{сим}}$) взаимодействия, смотря по тому, одинаково направлены или противоположны спины взаимодействующих частиц. Если для Φ в качестве молекулярного потенциала принять арифметическое среднее

$$\Phi = (\Phi_{\text{асим}} + \Phi_{\text{сим}})/4,$$

то мы не удовлетворим критериям устойчивости движения, которые требуют преобладания сил притяжения над силами отталкивания. В этом можно видеть причину отсутствия сверхтекущего движения у Не³.

Таким образом основные качественные и количественные особенности движения Не II (в тонких пленках, капиллярах и через щели) получают естественное истолкование с единой точки зрения. К этим особенностям относятся: 1) независимость потока от длины пути и строгая пропорциональность периметру; 2) независимость потока от величины разности уровней и перепада давлений; 3) весьма слабая

зависимость от природы стенок; 4) наличие течений в сторону больших температур; 5) практическое отсутствие вязкости при подобных течениях; 6) отсутствие указанных свойств у He^3 . При этом получается правильный порядок величин для наблюдаемых скоростей течений и критической температуры.

2. Для электронной жидкости в сверхпроводниках неизвестно значение капиллярной постоянной, поэтому для количественного сопоставления теории с опытными данными будем исходить из численного значения глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник и критического значения магнитного поля. Эти две величины позволяют вычислить концентрацию электронов в электронной жидкости, диэлектрическую постоянную сверхпроводников, скорость капиллярных волн (а следовательно, капиллярную постоянную) и критическую температуру перехода.

Глубина проникновения для олова [9] $\delta = 6,3 \cdot 10^{-6}$ см. На основании условия (43), налагаемого на волновое число капиллярных волн $p^2 = \frac{4}{27} \frac{\omega_0^2}{c_s^2} = \frac{1}{\delta^2}$, для нижней границы определяем концентрацию ρ ($\omega_0^2 = 4\pi e^2 \rho / m$), что дает $\rho = 8,2 \cdot 10^{21}$ см⁻³ и $\omega_0 = 4,8 \cdot 10^{15}$ сек⁻¹. Из выражения критического магнитного поля (для массивного проводника $ph \gg 1$)

$$H_{kp} = \frac{4\pi e\rho}{c_s} \frac{c}{p} \frac{1}{\sqrt{2e^2}} \quad [\text{см. (35)}].$$

Учитывая, что $c^2 = \frac{2}{3}(c_s^2/\epsilon_1)$ [см. (40)], определяем ϵ_1 , полагая $H_{kp} = 300$ Ое,

$$\epsilon_1 = (8\pi^2/9e^4)(e\rho\delta_0/H_{kp})^2 = 1,3 \cdot 10^9.$$

Таким образом теория приводит к существованию у сверхпроводников аномально большой диэлектрической постоянной (ср. [9]).

Скорость капиллярных волн определяется по значению ϵ_1 :

$$c = [\frac{2}{3}(c_s^2/\epsilon_1)]^{1/2} = 6,8 \cdot 10^5 \text{ см/сек.}$$

Для критической температуры перехода получаем

$$T_{kp} = 3,3^\circ\text{K}.$$

Опытное значение критической температуры для олова равно $3,7^\circ\text{K}$.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
18 июня 1953 г.

Литература

- [1] А. И. Некрасов. Теория воли установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, Изд-во АН СССР, М., 1951. — [2] А. А. Власов. Теория многих частиц, Гостехиздат, 1950. — [3] Н. А. Слезкин. Уч. зап. МГУ (Механика), 7, 71, 1937. — [4] Дж. Рэлей. Phil. Mag., 33, 381, 1917. — [5] Н. Н. Богоявленский. Изв. АН СССР, сер. физич., 11, 77, 1947. — [6] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 11, 592, 1941. — [7] В. Кеезом. Гелий, ИИЛ, М., 1949. — [8] П. Л. Капица. ЖЭТФ, 11, 581, 1941. — [9] В. Л. Гинзбург. Усп. физ. наук, 48, 25, 1952; 42, 169, 333, 1950.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ НУКЛОНов И ОБОЛОЧЕЧНОЕ СТРОЕНИЕ ЯДРА

Л. П. Рапопорт и В. А. Филимонов

Произведен статистический расчет распределения плотности нуклонов в ядре методом Ритца с двумя вариационными параметрами. Полученное распределение плотности использовано для обоснования оболочечного строения ядра. Результаты согласуются со схемой заполнения оболочек, предложенной Майером.

Статистическая теория ядра использовалась рядом авторов для расчета энергии ядра [1-3]. В работах [2, 3] расчеты велись при помощи метода Ритца с одним вариационным параметром. В качестве варьируемой функции выбиралась плотность, изменяющаяся по кривой Гаусса. Однако такой выбор распределения плотности пригоден только для легких ядер, так как точное решение статистической задачи в пределе для бесконечно тяжелого ядра дает постоянную плотность на протяжении всего ядра.

В работе [1] расчет ядра производился статистическим методом с двумя вариационными параметрами, но полученные там результаты относятся лишь к тяжелым ядрам.

В настоящей работе вычислено распределение плотности нуклонов для всей системы ядер методом Ритца с двумя вариационными параметрами; принятый закон сил отличен от закона сил, использованного в работе [1]. Сведения о распределении плотности могут быть использованы для обоснования оболочечного строения ядра. Впервые метод Ферми для расчета оболочечного строения ядра применили Иваненко и Родичев [4] (см. также [5]). Они рассчитывали заполнение оболочек при помощи плотности, полученной из предложенной ими статистической теории ядра. Но в этой работе не учитывалось свойство насыщения ядерных сил. Авторы работы [6] пытались подобрать такое распределение плотности, чтобы числа частиц в ядре, предшествующие появлению нуклонов с новыми орбитальными квантовыми числами l , совпадали с «магическими» числами 2, 8, 20—25, 50, 82, 126. Такое отождествление чисел, отмечающих появление новых l , с числами замкнутых оболочек противоречит сведениям об орбитальных моментах нуклонов в ядре, получаемых из анализа различных экспериментальных данных (магнитные и механические моменты ядер, β -распад и пр.), а также с общепринятой схемой заполнения оболочек. Более интересным является не подбор плотности, а использование распределения плотности, полученной из статистической теории и дающей правильное значение энергии связи ядер.

1. Распределение плотности в ядре

При расчете распределения плотности нуклонов в ядре мы будем учитывать только специфические ядерные силы, пренебрегая кулоновским отталкиванием протонов. Поэтому в формулу для полной энергии ядра включаются только члены, происходящие из-за обменной энергии взаимодействия, кинетической энергии и поправки Вейцзекера на кине-

тическую энергию. Пренебрежение кулоновским отталкиванием приводит к одинаковому числу протонов и нейтронов в ядре, что значительно упрощает расчет. Полная энергия ядра в этом случае будет иметь вид

$$E = E_A + E_k + E_j, \quad (1)$$

где E_A , E_k — обменная и кинетическая энергия, а E_j — поправка Вейцзекера. Взаимодействие между протоном и нейтроном мы выбираем в форме

$$V_{pn} = -J(r_{np}) \hat{p}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_p),$$

взаимодействие нейtron — нейtron, протон — протон в виде

$$N_{nn'} = -\frac{1}{3} J(r_{nn'}) (\vec{\sigma}, \vec{\sigma}');$$

$$P_{pp'} = -\frac{1}{3} J(r_{pp'}) (\vec{\sigma}, \vec{\sigma}')$$

соответственно, где

$$J(rr') = \frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{r_0} \right\},$$

\hat{p} — оператор перестановки координат, $\vec{\sigma}$ — спиновый оператор Паули, $r_0 = \hbar / 2\pi m_\pi c$ — комптоновская длина волны π -мезона, γ — постоянная закона сил.

Для такой формы взаимодействия частиц, согласно вычислениям [3, 7], явное выражение обменной части энергии как функции распределения плотности ρ для случая равенства числа протонов числу нейтронов имеет вид

$$E_A = -\frac{\gamma}{4\pi^3 r_0^4} \int \varphi(\omega) d\tau, \quad (2)$$

где

$$\omega = (3\pi^2 \rho)^{1/3} r_0, \quad (3)$$

$$\varphi(\omega) = 6\omega^4 - \omega^2 + \frac{1}{4} (1 + 12\omega^2) \ln(1 + 4\omega^2) - 8\omega^3 \operatorname{arc tg}(2\omega), \quad (4)$$

Кинетическая энергия выражается обычной формулой

$$E_k = 2x_k \int \rho^{1/3} d\tau, \quad (5)$$

где

$$x_k = \frac{3}{40} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{M}.$$

Поправка Вейцзекера выражается формулой

$$E_j = 2x_j \int \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 d\tau, \quad (6)$$

где $x_j = \hbar^2 / 32\pi^2 M$, M — среднее значение массы протона и нейтрона.

Задачу нахождения распределения плотности мы будем решать методом Ритца. В качестве распределения плотности выбираем функцию вида

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 && \text{для } r < R_0, \\ \rho &= \rho_0 \exp \left\{ -\frac{(r - R_0)^2}{R^2} \right\} && \text{для } r > R_0, \end{aligned} \quad (7)$$

т. е. функцию, постоянную в середине ядра и спадающую по гауссовой кривой на краю. Форма функции распределения плотности (7) удовлетворяет условию симметрии; ее производная по r в центре ядра равна нулю. В качестве двух вариационных параметров выбираем

$$\omega_0 = (3\pi^2 \rho_0)^{1/3} r_0 \text{ и } \beta = R_0 / R, \quad (8)$$

ω_0 характеризует плотность в центре ядра, а β дает отношение величины области с постоянной плотностью к области плавного спадания. При $\beta = 0$ распределение плотности переходит в гауссово, при $\beta \rightarrow \infty$ получается постоянная на протяжении всего ядра плотность, соответствующая бесконечно большому ядру.

Из условия нормировки ρ получаем

$$\int \rho d\tau = \pi^{1/2} R^3 \rho_0 S(\beta) = N, \quad (9)$$

где

$$S(\beta) = 1 + \frac{4}{V\pi} \beta + 2\beta^2 + \frac{4}{3V\pi} \beta^3, \quad (10)$$

N — число одноименных частиц в ядре.

Найдем выражения E_A , E_h , E_f как функции вариационных параметров. Вводя новую переменную интегрирования $x = (r - R_0)/V\sqrt{3}R$ и используя выражения (7) и (3), приведем формулу для обменной энергии (2) к следующему виду:

$$E_A = -\frac{\gamma}{4\pi^3 r_0^4} \left\{ \frac{4\pi}{3} R_0^3 \varphi(q) + 4\sqrt{3}\pi R R_0^2 B(q) + \right. \\ \left. + 24\pi R^2 R_0 C(q) + 12\pi \sqrt{3} R_0^3 D(q) \right\}, \quad (11)$$

где для удобства введены обозначения:

$$\varphi(q) = \frac{3}{8} q^4 - \frac{q^2}{4} + \frac{1}{4} (1 + 3q^2) \ln(1 + q^2) - q^3 \operatorname{arctg} q, \quad (12)$$

$$B(q) = \int_0^\infty \varphi(\omega) dx, \quad (13)$$

$$C(q) = \int_0^\infty x \varphi(\omega) dx, \quad (14)$$

$$D(q) = \int_0^\infty x^2 \varphi(\omega) dx, \quad (15)$$

$$q = 2\omega_0. \quad (16)$$

Исключая R из уравнения (11) при помощи соотношения (9), учитывая (8) и (16), получаем

$$E_A = -\frac{2\mu N v}{S(\beta)} \{F(q) + G(q, \beta)\}, \quad (17)$$

где введены следующие обозначения:

$$F(q) = \frac{36}{\pi} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{D(q)}{q^3}; \quad (18)$$

$$G(q, \beta) = \frac{72}{\pi V \pi} \frac{C(q)}{q^3} \beta + \left(\frac{12}{\pi}\right) \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} \frac{B(q)}{q^3} \beta^2 + \frac{4}{\pi V \pi} \frac{\varphi(q)}{q^3} \beta^3; \quad (19)$$

$$\mu = \frac{m_\pi^2}{M}; \quad v = \frac{M}{m_\pi} ka; \quad \alpha = \frac{2\pi c^2}{hc} = \frac{1}{137}; \quad k = \frac{\gamma}{e^2},$$

причем все величины, входящие в (17), выражены в релятивистских единицах ($\hbar = 1$, $c = 1$, $m_e c^2 = 1$).

Входящие в $F(q)$ интегралы в конечном виде не берутся, но в интервале $5,4 < q < 7,5$, функция $F(q)$ протабулирована в работе Гомбаша [3] и хорошо может быть представлена в этом интервале полиномом

$$F(q) = 0,006238 q^2 + 0,09723 q - 0,1856. \quad (20)$$

Интегралы $C(q)$, входящие в $G(q, \beta)$, берутся в конечном виде. Дифференцируя (14) по параметру q и интегрируя, мы получаем

$$\frac{C(q)}{q^3} = \frac{3}{64} q - \frac{1}{6q} + \frac{3}{16q^3} (1+q^2) \ln(1+q^2) - \frac{1}{12q^3} \ln(1+q^2) - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} q + R, \quad (21)$$

где

$$R = \frac{1}{16} \left\{ \frac{(\ln q^2)^2}{2q^3} - \frac{1}{q^5} + \frac{1}{4q^7} - \dots \right\}$$

— ряд, быстро сходящийся в нашем интервале изменения q . Интегралы $B(q)$, входящие в $G(q, \beta)$, в конечном виде не берутся, но могут быть выражены через функцию $F(q)$. Дифференцируя $D(q)$ по параметру q и подставляя вместо $D(q)$ его выражение через функцию $F(q)$, согласно (18), получаем

$$B(q) = \frac{\pi}{18(3/\pi)^{1/2}} q \left[3q^2 F(q) + q^3 \frac{d}{dq} F(q) \right]. \quad (22)$$

Выражения E_h и E_j получаются элементарным интегрированием (5) и (6) после подстановки в них (7). Используя обозначения (8) и (16) и условие (9), получаем в релятивистских единицах

$$E_h = \frac{\mu N}{S(\beta)} M(\beta) q^2, \quad (23)$$

где

$$M(\beta) = \frac{1}{10} \left\{ \frac{9}{20} \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{9}{5V\pi} \beta + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{5}} \beta^2 + \frac{\beta^3}{V\pi} \right\}, \quad (24)$$

$$E_j = \frac{\mu}{S^{1/2}(\beta)} 2q^2 N^{1/2} P(\beta); \quad (25)$$

причем

$$P(\beta) = \frac{1}{2 \cdot 3^{1/2} \pi^{5/6}} \left\{ \frac{3V\pi}{8} + \beta + \frac{V\pi}{4} \beta^2 \right\}. \quad (26)$$

Подставляя (17), (23) и (25) в формулу (1), получаем

$$E = \frac{2\mu N}{S(\beta)} \left\{ -vF(q) - vG(q, \beta) + q^2 M(\beta) + \frac{q^2 S^{1/2}(\beta) P(\beta)}{N^{1/2}} \right\}. \quad (27)$$

При $\beta = 0$ распределение плотности переходит в гауссово, использованное Гомбашем для вычисления энергии и дающее правильное значение энергии связи для всех ядер [3]. Полагая, согласно этой работе, $k = 66,24$, $m_\pi = 285$, $M = 1836$, получаем $v = 3,11$.

Связь между параметрами β и q и N найдем из обычного условия минимума энергии

$$\partial E / \partial q = 0; \quad \partial E / \partial \beta = 0. \quad (28)$$

В явном виде уравнения (28) принимают вид

$$N = S(\beta) \left\{ \frac{2q P(\beta)}{(\nu dF(q)/dq) + (\nu \partial G(q, \beta)/\partial q) - 2M(\beta)q} \right\}^{1/2}, \quad (29a)$$

$$N = S(\beta) \left\{ \frac{q^2 [S(\beta) P'(\beta) - 1/\nu S'(\beta) P(\beta)]}{S'(\beta) f - f' S(\beta)} \right\}^{1/2}, \quad (29b)$$

где

$$f(q, \beta) = -\nu F(q) - \nu G(q, \beta) + q^2 M(\beta).$$

Штрихами обозначены производные по β . Приравнивая правые части (29а) и (29б), получаем уравнение, связывающее q и β ,

$$\frac{2 \left[f - \frac{S(\beta)}{S'(\beta)} f' \right]}{q \left\{ \frac{S(\beta) P'(\beta)}{S'(\beta) P(\beta)} - \frac{1}{3} \right\}} = \nu \frac{\partial F(q)}{\partial q} + \nu \frac{\partial G(q, \beta)}{\partial q} - 2q M(\beta). \quad (30)$$

Подставляя в (30) некоторое значение q и находя из полученного таким образом уравнения с одним неизвестным соответствующее β , мы можем найти зависимость q от β . Для каждой пары значений q и β по одной из формул (29) получим соответствующее значение N . Для того чтобы выполнить эти вычисления, определим интервал возможных значений q . Находя предел выражения (30) при $\beta \rightarrow 0$ и при $\beta \rightarrow \infty$, мы получаем для определения границ изменения q два уравнения:

$$\nu \left[\frac{108}{\pi} \frac{C(q)}{q^3} - 6F(q) - q \frac{dF(q)}{dq} \right] - \frac{1}{100} \left[27 - 36 \sqrt{\frac{3}{5}} \right] q^2 = 0, \quad (31)$$

для $\beta = 0$ и

$$\frac{4\nu}{\pi} \frac{d}{dq} \left(\frac{\varphi(q)}{q^3} \right) - \frac{q}{5} = 0 \quad (32)$$

для $\beta \rightarrow \infty$. При нашем выборе величины $\nu = 3,11$ мы получаем из (31) $q_0 = 5,982$ [из уравнения (29а) соответствующее $N = 16,3$]; из (32) находим $q_\infty = 6,40$ (соответствующее $N \rightarrow \infty$). Таким образом все значения q для β , изменяющегося от 0 до ∞ , лежат в узком интервале $5,82 \leq q \leq 6,40$.

Небольшие отрицательные значения β также имеют физический смысл. Отрицательные значения β означают, что гауссово распределение плотности в этом случае «срезано» и распределение плотности идет круче, чем это дает кривая Гаусса (рис. 1). В самом деле, при вычислении энергии мы проводим интегрирование по r от 0 до ∞ . Отрицательное β соответствует отрицательному R_0 . Обозначая все подинтегральное выражение для энергии функцией $H(\omega)$, мы можем записать

$$E = \int_0^\infty H(\omega) dr = \int_0^{-R_0} H(\omega_0) dr + \int_{-R_0}^0 H(\omega) dr + \int_0^\infty H(\omega) dr.$$

Если β мало, то ω в интервале от $-R_0$ до 0 мало отличается от ω_0 , и таким образом сумма первых двух интегралов приблизительно равна

нулю. За распределение плотности, дающее минимум энергии, в этом случае мы можем принять часть гауссовой кривой, находящуюся в области положительных r .

Таким образом ядра с $N < 16$ имеют распределение плотности более крутое, чем гауссово, а начиная с ядра $N = 16$, возникает

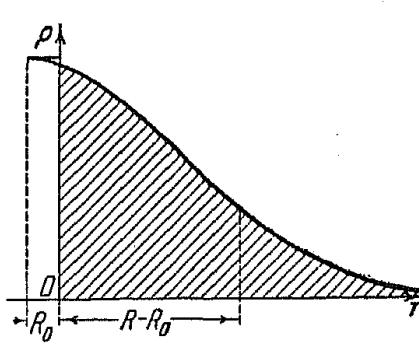


Рис. 1. Распределение плотности в ядре в случае отрицательных $\beta = R_0/R$. Для малых $|\beta|$ плотность приблизительно представляется кривой над заштрихованной площадью

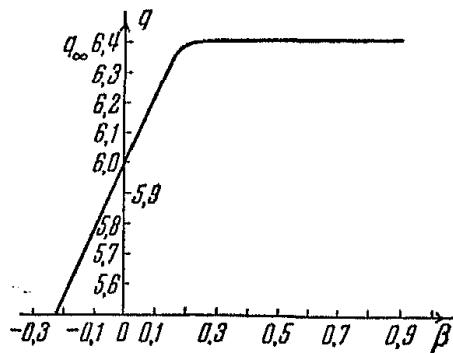


Рис. 2. Зависимость $q = q(\beta)$. Для $\beta > 0,2 (N > 28)$ плотность в центре ядра остается постоянной с увеличением β

область с постоянной плотностью. Зависимость q от β , вычисленная из уравнения (30), представлена графически на рис. 2. Из графика

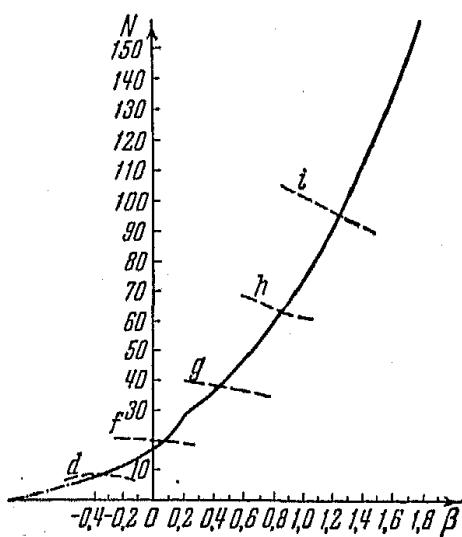


Рис. 3. Зависимость N от β . Сплошная линия — вычисленная по формуле (29a), пунктир — по формуле (35) для $l = 2, 3, 4, 5, 6$. Точки пересечения кривых определяют N_l — число нуклонов в ядре, соответствующие появлению новой оболочки с данным l

видно, что q приблизительно линейно увеличивается вместе с ростом β только для значения $\beta \approx 0,2$ (соответствующее $N = 28$). Начиная с $\beta = 0,2$, q очень быстро достигает значения $q = q_\infty$ и в дальнейшем остается постоянным при росте β . Таким образом ядра с $N > 28$ имеют одинаковую плотность в центре ядра. Этот вывод находится в полном согласии с известным эмпирическим правилом о постоянстве плотности в центре ядра для средних и тяжелых ядер. Соответствующая ходу изменения $q = q(\beta)$ зависимость $N = N(\beta)$, вычисленная по формуле (29a), представлена на рис. 3 сплошной линией. Вычисление N для $\beta > 0,2$ производилось при постоянном $q = q_\infty$. Кривая $N(\beta)$ имеет перелом при $\beta \approx 0,2$, получающийся вследствие того, что производная

$$\frac{dN}{d\beta} = \frac{\partial N}{\partial q} \frac{dq}{d\beta} + \frac{\partial N}{\partial \beta}$$

имеет резкое изменение в окрестности точки $\beta = 0,2$, так как $dq/d\beta$ в этой окрестности изменяется в малом интервале от некоторого конечного значения до нуля.

Встречающиеся при вычислении $q = q(\beta)$ и $N = N(\beta)$ функции

$$\frac{C(q)}{q^8}; \quad \frac{d}{dq} \left(\frac{C(q)}{q^8} \right); \quad \frac{\varphi(q)}{q^8}; \quad \frac{d}{dq} \left(\frac{\varphi(q)}{q^8} \right); \quad F(q); \quad \frac{dF(q)}{dq}$$

и соответствующие β и N представлены в таблице.

q	$\frac{C(q)}{q^8}$	$\frac{d}{dq} \left(\frac{C(q)}{q^8} \right)$	$\frac{\phi(q)}{q^8}$	$\frac{d}{dq} \left(\frac{\phi(q)}{q^8} \right)$	$F(q)$	$\frac{dF(q)}{dq}$	β	N
5,5	0,11736	0,036042	1,10069	0,31162	0,5377	0,16585	-0,23	10,8
6	0,13565	0,037028	1,25824	0,31851	0,62215	0,1721	0	16,3
6,25	0,14495	0,03749	1,33828	0,32153	0,66556	0,17521	0,11	21,9
6,3	0,14682	0,03757	1,35430	0,32210	0,67433	0,17583	0,14	23,7
6,39	0,15022	0,037713	1,3833	0,32310	0,69021	0,176952	0,20	28

2. Распределение нуклонов в ядре по оболочкам

Согласно статистической теории Ферми, распределение плотности нуклонов, обладающих орбитальным квантовым числом l , определяется выражением

$$\rho_l = \frac{1}{\pi^2} \frac{l + 1/2}{r^2} \sqrt{(3\pi^2\rho)^{1/3} - \frac{(l + 1/2)^2}{r^2}}. \quad (33)$$

Плотность ρ_l отлична от нуля только для r , заключенных между действительными значениями подкоренного выражения. В случае, когда корни сливаются, $\rho_l = 0$ для всех точек. Двукратный корень подкоренного выражения (33) в этом случае определяется из уравнения

$$\frac{d}{dr} (r^3\rho) = 0$$

и соответствует максимуму величины $r^3\rho$. Тогда из (33) получаем

$$(r^3\rho)_{\max} = (l + 1/2)^3 / 3\pi^2, \quad (34)$$

а так как ρ зависит от числа нуклонов в ядре, то (34) определяет то минимальное число частиц в ядре, начиная с которого плотность ρ_l становится отличной от нуля, т. е. появляются частицы, обладающие орбитальным квантовым числом l . Для нашего случая функции распределения плотности, определяемой уравнением (7), мы должны рассматривать плотность только на участке $r > R_0$, так как величина $r^3\rho$ принимает максимальное значение только на этом участке. Таким образом мы получаем

$$r_{\max} = \frac{R_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{R_0}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} R^2}.$$

Подставляя это значение r_{\max} в (34) и учитывая (8) и (9), мы получаем уравнение для определения величины N_l , соответствующей ядру, начиная с которого появляются частицы с данными l

$$N = \frac{1}{9\pi} (2l + 1)^3 f(\beta), \quad (35)$$

где

$$f(\beta) = \frac{3\sqrt{\pi S(\beta)}}{(\beta + \sqrt{\beta^2 + 6})^3} \exp \left\{ \frac{1}{4} (\sqrt{\beta^2 + 6} - \beta)^2 \right\}.$$

Так как зависимость N от β , в свою очередь, определяется уравнениями (29), то значения N_l и β , при которых появляется данное l , найдутся как совместное решение (35) и (29). На рис. 3 решение представлено графически. Пунктирными линиями нанесены кривые (35) для различных l . Точки пересечения кривых определяют N , при

котором появляется данное l . Эти N_l равны 8, 20, 38, 64, 96. Прямоугольная потенциальная яма дает 8, 20, 40, 70, 112. Таким образом вычисленные значения N_l для легких и средних ядер совпадают с N_l прямоугольной потенциальной ямы. Для тяжелых ядер вычисленное нами N_l меньше. Учет кулоновского отталкивания привел бы к еще большему расхождению для тяжелых ядер.

Полное число одноименных частиц в ядре, обладающих орбитальным квантовым числом l , мы получим, если проинтегрируем (33) по объему ядра, причем интегрирование распространяется на все положительные значения подкоренного выражения. Подставляя (7) в (33) и интегрируя, получаем

$$n_l = \frac{4}{\pi} (l + 1/2) \left\{ \sqrt{a^2 \beta^2 - (l + 1/2)^2} - (l + 1/2) \arccos \left(\frac{l + 1/2}{a \beta} \right) + \right. \\ \left. + V \int_0^{x_2} \sqrt{a^2 e^{-2x^2} - \frac{(l + 1/2)^2}{(V \sqrt{3} x + \beta)^2}} dx \right\} \text{ для } a \beta \geq l + 1/2; \quad (36)$$

$$n_l = \frac{4 \sqrt{3}}{\pi} (l + 1/2) \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 e^{-2x^2} - \frac{(l + 1/2)^2}{(V \sqrt{3} x + \beta)^2}} dx \text{ для } a \beta < l + 1/2, \quad (37)$$

где произведена замена переменного $x = (r - R_0)/V \sqrt{3} R$ и $a = [3 \sqrt{\pi N} / S(\beta)]^{1/2}$, а x_1 , x_2 являются корнями подинтегральной функции. Интегралы, входящие в (36), (37), вычислялись численным интегрированием. Результаты вычисления для S и P уровней представлены на рис. 4. На том же рисунке показан для сравнения результат вычислений с постоянной плотностью и нанесена ломаная линия, соответствующая прямоугольной потенциальной яме.

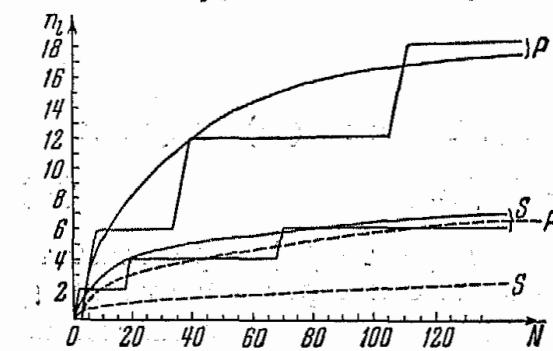


Рис. 4. Зависимость n_l от N . Сплошные кривые вычислены для плотности, полученной в данной работе, пунктирные линии соответствуют постоянной плотности. Ломаные линии представляют зависимость n_l от N для прямоугольной ямы

кулоновское отталкивание, так как тогда область с постоянной плотностью увеличится и кривые пойдут несколько ниже.

Воронежский государственный
университет

Поступила в редакцию
20 ноября 1953 г.

Литература

- [1] C. F. Weizsäcker. ZS. f. Phys., 96, 431, 1935.—[2] S. Flügge. ZS. f. Phys., 96, 459, 1935.—[3] П. Гомбаш. Усп. физ. наук, 49, 385, 1953.—[4] Д. Д. Иваненко, В. И. Родичев. ДАН СССР, 70, 605, 1950.—[5] Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов. ДАН СССР, 74, 33, 1950.—[6] M. Born a. L. Yang. Nature, 166, 199, 1950.—[7] K. Nakabayasi. ZS. f. Phys. 97, 211, 1935.—[8] M. G. Mayer. Phys. Rev., 78, 16, 22, 1949.

О ЦЕНТРЕ ИНЕРЦИИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

М. Ф. Широков

Сформулировано соотношение [см. ниже формулу (6)], ковариантное в смысле общей теории относительности и определяющее вектор, аналогичный вектору не-релятивистского центра инерции. Для системы со слабым гравитационным полем найдена приближенная формула для координат центра инерции, показывающая, что он определяется распределением масс покоя и масс, соответствующих кинетическим и потенциальным энергиям системы, определяемых известным соотношением теории относительности о взаимосвязи массы и энергии.

В работах, посвященных проблеме центра инерции в общей теории относительности, решались некоторые частные задачи о нахождении центра инерции для системы двух тел [¹⁻³] и n тел [⁴] на основе приближенных уравнений движения.

Вопрос о существовании теоремы о центре инерции и, следовательно, о существовании самого центра инерции таким образом оставлялся без рассмотрения, что, вообще говоря, сильно снижало значение полученных результатов и, в частности, было одной из причин неверного вывода об ускоренном движении центра инерции двух тел, сделанного в одной из цитированных работ [¹]. Вследствие этого ниже делается попытка сформулировать в общековариантном виде теорему о центре инерции и рассматривается применение ее для изолированных скоплений материи со слабым гравитационным полем.

1. Теорема о центре инерции в общей теории относительности

Итак, пусть какое-нибудь количество материи в виде частиц, заряженных и нейтральных, и их полей (электромагнитных, гравитационных и др.) занимает ограниченную область пространства, внутри которой ее тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu} \neq 0$. Примем, далее, что наша система является изолированной, т. е. другие скопления материи находятся столь далеко от нее, что их силовые поля можно считать бесконечно малыми в области, занимаемой нашей системой. Математически условие изолированности можно формулировать в виде обращения в нуль тензора $T^{\mu\nu}$ в бесконечно удаленных точках, как A/r^3 и быстрее, где r — расстояние до системы, и превращения интервала ds в галилеевский

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = -d\tau^2. \quad (1)$$

Для такой системы существуют сохраняющиеся величины [⁵]: тензор энергии-импульса

$$S^{\mu\nu} = g(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}), \quad (2)$$

тензор момента импульса

$$M^{\mu\nu\sigma} = x^\mu S^{\nu\sigma} - x^\nu S^{\mu\sigma}, \quad (3)$$

вектор полного импульса

$$P^\mu = \int S^{\mu 4} dx_1 dx_2 dx_3 = \int S^{\mu 4} d\omega \quad (4)$$

и тензор полного момента импульса

$$M^{\mu\nu} = \int M^{\mu\nu 4} d\omega. \quad (5)$$

В этих выражениях g — детерминант из компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$.

Следуя [6], дадим определение релятивистски ковариантного центра инерции в виде

$$Y^\mu = M^{\mu\nu} P_\nu / P_\lambda P^\lambda. \quad (6)$$

Прежде всего легко убедиться, что хотя формально вектор Y^μ имеет четыре компоненты, но независимых из них только три, так как имеет место очевидное соотношение $Y^\alpha Y_\alpha = 0$. В этом проявляется аналогия Y^μ нерелятивистскому вектору центра инерции. Согласно (6) в системе отсчета, в которой наше скопление материи в целом покойится ($P_i = 0$; $P_4 \neq 0$):

$$Y_0^i = \int x^i S^{44} d\omega / \int S^{44} d\omega = \text{const}; \quad (7)$$

$$Y_0^4 = 0.$$

В силу (2) — (5) и сохранения величин, определяемых этими соотношениями, Y_0^μ являются координатами чисто пространственного вектора, определяемого распределением плотности S^{44} , пропорциональной плотности масс частиц и полей, при помощи тех же формул, что и в нерелятивистской теории. Кроме того, во всякой другой инерциальной системе отсчета, в соответствии с преобразованиями Лоренца и согласно (6), Y^i будут линейными функциями времени t . Таким образом пространственный вектор Y^i удовлетворяет теореме о центре инерции, так как его пространственные компоненты являются координатами точки, которая во всех инерциальных системах отсчета покойится или движется равномерно и прямолинейно.

Релятивистский центр инерции Y^μ образует некоторую линию в четырехмерном пространстве-времени. Согласно (2) — (6) он выражается через некоторые пространственные интегралы от тензора $S^{\mu\nu}$, в состав которых входит $t^{\mu\nu}$, который всегда можно обратить в нуль в данной точке соответствующим преобразованием координат. Однако центр инерции (6) для своего полного определения не нуждается в указании той или иной криволинейной системы координат, так как входящие в (6) пространственные интегралы (4) и (5) в силу законов сохранения имеют одинаковые значения в любых криволинейных координатах, переходящих в бесконечно удаленных точках в галилеевские [5], что в нашем случае как раз имеет место в силу изолированности системы. В этом смысле определение (6) центра инерции, а также данная выше формулировка теоремы о центре инерции, ковариантны в отношении требований общей теории относительности.

Ковариантность (6) в отношении любых криволинейных координат весьма существенна как принципиально, так и с точки зрения выбора наиболее простого способа расчета координат центра инерции.

2. Симметричный тензор энергии-импульса слабого гравитационного поля

При помощи (6) можно получить для случая слабых гравитационных полей приближенное соотношение для центра инерции, показывающее в наглядной форме физический смысл величин, его определяющих.

Предположим, что материя имеет тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (8)$$

и движется вблизи начала координат со скоростями $v^i = dx^i/dt$, удовлетворяющими условию

$$v/c < 1. \quad (9)$$

В этом случае гравитационное поле будет слабым и определяется соотношениями

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi f}{c^2} \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (10)$$

где $h_{\mu\nu}$ — малые добавки к метрическому тензору: $\delta_{\mu\nu} = 1$ при $\mu = \nu$ и $\delta_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$, соответствующему квадратичной форме (1), и f — гравитационная постоянная теории Ньютона.

Решения (10) в первом приближении имеют вид:

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = -h_{44} = \frac{2f}{c^2} \int \frac{\rho_0 d\omega}{r} = \frac{2u}{c^2}, \quad (11)$$

$$h_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu.$$

Согласно (2) и (6) для определения центра инерции необходимо знание тензора энергии-импульса поля тяготения $t^{\mu\nu}$, который имеет вид [5]

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} = & \frac{c^2}{16\pi f} \{ (2\Gamma_{\epsilon\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma - \Gamma_{\epsilon\sigma}^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\epsilon\beta}^\beta \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma) (g^{\mu\epsilon} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\nu} g^{\epsilon\alpha}) + \\ & + g^{\mu\epsilon} g^{\nu\beta} (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \Gamma_{\epsilon\sigma}^\nu + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \Gamma_{\epsilon\sigma}^\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\nu \Gamma_{\epsilon\alpha}^\sigma - \Gamma_{\epsilon\alpha}^\nu \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma) + \\ & + g^{\nu\epsilon} g^{\mu\beta} (\Gamma_{\epsilon\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\epsilon\sigma}^\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\mu \Gamma_{\epsilon\alpha}^\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha \Gamma_{\epsilon\mu}^\sigma) \}. \end{aligned} \quad (12)$$

Величины $h_{\mu\nu}$ и их пространственные производные — малые величины первого порядка; что же касается их производных по времени, то они будут величинами еще более высокого порядка малости, так как учет запаздывания в распространении гравитационного поля соответствует еще более высокому приближению. Поэтому, учитывая еще независимость галилеевской части тензора $g_{\mu\nu}$ от координат, можно положить:

$$\begin{aligned} g^{\mu\epsilon} g^{\nu\alpha} \Gamma_{\epsilon\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma & \approx \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\sigma\eta}}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu, \beta}; \\ \Gamma_{\mu\nu}^\sigma & \approx \Gamma_{\mu\nu, \sigma}; \\ g^{\mu\epsilon} g^{\nu\alpha} \Gamma_{\epsilon\sigma}^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma & \approx \Gamma_{\mu\sigma, \beta} \Gamma_{\nu\beta, \sigma} \end{aligned} \quad (13)$$

и т. п.

Из сопоставления (12) и (13) видно, что $t^{\mu\nu}$ — величины второго и более высокого порядка малости. Из (12) и (13), после довольно длинных вычислений, получим

$$t^{\mu\nu} = \frac{c^2}{16\pi f} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{3}{2} \frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x_\nu} \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x_\sigma} + \right. \\ + \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x_\mu} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x_\nu} \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial h_{\sigma\nu}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} \frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x_\nu} - \\ - \delta^{\mu\nu} \left(\frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x_\beta} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{3}{4} \frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial h_{\beta\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{4} \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x_\beta} \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x_\beta} \right) \right\}. \quad (14)$$

Учет условий Гильберта, принимаемых при выводе (10),

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial h_{\epsilon\mu}}{\partial x_\epsilon}$$

позволяет упростить предыдущее выражение, приведя его к виду

$$t^{\mu\nu} = \frac{c^2}{16\pi f} \left\{ \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} - 2 \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x_\nu} \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x_\sigma} + \right. \\ + \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x_\nu} \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial h_{\sigma\nu}}{\partial x_\sigma} - \\ - \delta^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial h_{\beta\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{4} \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x_\beta} \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x_\beta} \right) \right\}. \quad (15)$$

Подставляя в (15) выражения (11) для $h_{\mu\nu}$, получим

$$t^{14} = \frac{3}{4\pi f c^2} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_1} \approx 0, \\ t^{44} = \frac{7}{8\pi f c^2} \left\{ (\text{grad } u)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} \approx \frac{7}{8\pi f c^2} (\text{grad } u)^2, \quad (16)$$

так как $(1/c)(\partial u / \partial t)$ величина более высокого порядка малости, чем $\partial u / \partial x_i$.

3. Центр инерции системы со слабым гравитационным полем

Координаты центра инерции будем вычислять по формуле (7) в системе отсчета, в которой скопление материи в целом покоится, при этом ограничимся членами порядка $(v/c)^2$ и u/c^2 .

Для слабого поля

$$d\tau^2 = - \left\{ \delta_{ik} dx_i dx_k \left(1 + \frac{2u}{c^2} \right) + dx_4 \left(1 - \frac{2u}{c^2} \right) \right\} = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{2u}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (1a)$$

откуда определитель

$$g = 1 + (4u/c^2).$$

Вычислим, пользуясь этим соотношением, а также (2), (8) и (16),

$$\int S^{44} d\omega = \int V \bar{g} \left(1 + \frac{2u}{c^2} \right) \rho_0 \left(\frac{dx_4}{d\tau} \right)^2 d\omega + \frac{7}{8\pi f c^2} \int (\text{grad } u)^2 d\omega, \\ \int x^i S^{44} d\omega = \int x^i V \bar{g} \left(1 + \frac{2u}{c^2} \right) \rho_0 \left(\frac{dx_4}{d\tau} \right)^2 d\omega + \frac{7}{8\pi f c^2} \int x^i (\text{grad } u)^2 d\omega. \quad (17)$$

Вторые члены удобно вычислить, воспользовавшись известной формулой Грина (dq — элемент поверхности):

$$\int \nabla v \nabla u d\omega = \oint v \frac{\partial u}{\partial n} dq - \int v \Delta u d\omega,$$

полагая в ней один раз $v = u$, в другой $v = xu$. Тогда, учитывая, что при r , стремящемся к бесконечности, $u \approx fM/r$, и принимая во внимание, что

$$\Delta u = -4\pi\rho_0 f,$$

легко показать, что

$$\frac{7}{8\pi f c^2} \int (\text{grad } u)^2 d\omega = \frac{7}{2c^2} \int \rho_0 d\omega, \quad (18)$$

$$\frac{7}{8\pi f c^2} \int x^i (\text{grad } u)^2 d\omega = \frac{7}{2c^2} \int \rho_0 x^i u d\omega.$$

Введем в рассмотрение инвариантный элемент массы, по которому и будем производить интегрирование:

$$i dm_0 = \frac{\sqrt{g} \rho_0 d\omega dx_4}{d\tau}. \quad (19)$$

Преобразуя при помощи (1a), (18) и (19) интегралы (17) и подставляя их в (7), получим выражение для центра инерции:

$$Y_0^i = \frac{\int x^i dm_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{u}{c^2}\right)}{\int dm_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{u}{c^2}\right)}. \quad (20)$$

Так как Y_0^i относятся к системе отсчета, в которой вся наша материальная система в целом покоятся, то входящий в знаменатель формулы (20) интеграл выражает массу покоя всей системы в целом

$$M = \int dm_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{u}{c^2}\right). \quad (21)$$

Необходимо отметить, что в силу общих теорем потенциал поля тяготения в весьма удаленных точках от системы

$$u_\infty = \frac{fM}{r}. \quad (22)$$

Физический смысл соотношений (21) — (22) весьма ясен: (21) показывает, что общая масса системы состоит из масс покоя ее частей

$$M_0 = \int dm_0, \quad (23)$$

масс, соответствующих их кинетическим энергиям,

$$M_k = \int \frac{dm_0 v^2}{2c^2} \quad (24)$$

и масс, соответствующих их потенциальным энергиям,

$$M_p = - \int \frac{dm_0 u}{2c^2}; \quad (25)$$

(22), а также (20) и (21), показывают, что гравитационное поле всей системы в целом и ее центр инерции создаются всеми массами системы, определяемыми (23) — (25).

Отличие центра инерции (20) от классического в том и заключается, что он определяется не только массами покоя тел системы, но и массами, соответствующими их кинетическим и потенциальным энергиям, которыми они обладают в силу известного закона теории относительности о взаимосвязи между массой m и ее энергией W , по которому $W = mc^2$.

Пользуясь приближенными уравнениями движения Фока [7], полученными им для системы n тел из уравнений тяготения Эйнштейна на основе ряда упрощающих предположений (сферичность формы тел, определенные соотношения между их размерами и гравитационными радиусами и др.), Фихтенгольц [4] нашел формулу для центра инерции n тел, имеющую в наших обозначениях вид:

$$Y^i = \frac{\sum_{k=1}^{h=n} M_k x_k^i}{\sum_{h=1}^{k=n} M_h},$$

где

$$M_h = m_h \left(1 + \frac{v_h^2}{2c^2} - \frac{1}{2c^2} \sum_i \frac{tm_i}{|r_i - r_h|} \right).$$

Это соотношение, очевидно, является частным случаем более общих соотношений (7) и (20).

В заключение я выражаю благодарность С. С. Бокше и Ф. С. Агешину за некоторые вычисления для данной работы.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
26 ноября 1953 г.

Литература

- [1] T. Levi-Civita. Amer. Journ. Mathem., 49, 9, 1937.—[2] H. P. Robertson. Ann. of Mathem., 39, 101, 1938.—[3] В. А. Фок. ДАН СССР, 32, 28, 1941.—[4] И. Г. Фихтенгольц. ДАН СССР, 64, 325, 1949; ЖЭТФ, 20, 233, 1953.—[5] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Теория поля, ОГИЗ, М.—Л., 1948.—[6] Ю. М. Широков. ЖЭТФ, 21, 748, 1951.—[7] В. А. Фок. ЖЭТФ, 9, 375, 1939.

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О ПРИРОДЕ τ -МЕЗОНОВ И V_2^0 -ЧАСТИЦЫ

И. С. Шапиро

Согласно экспериментальным данным, τ^\pm -мезоны и V_2^0 -частицы имеют схожие свойства: как τ -мезоны, так и V_2^0 -частицы распадаются на π -мезоны, массы этих частиц близки друг к другу. В связи с этим возникает вопрос: не образуют ли τ^\pm -мезоны и V_2^0 -частица изотопический триплет? В данном письме указываются и обсуждаются некоторые следствия, вытекающие из такого предположения.

1. Легко показать, основываясь на схемах распада:

$$\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm + \pi^\mp + \pi^\pm, \quad (1)$$

$$V_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, \quad (2)$$

что при положительном ответе на поставленный выше вопрос спины τ^\pm -мезонов и V_2^0 -частицы должны быть отличны от нуля. Действительно, при нулевом спине всех участвующих в процессах (1), (2) частиц имеют место следующие соотношения для внутренних четности (см. [1]):

$$\zeta_\tau = (\zeta_\pi)^3, \quad (3)$$

$$\zeta_V = (\zeta_\pi)^2. \quad (4)$$

Поскольку π -мезоны псевдоскалярии ($\zeta_\pi = -1$), то, согласно (3), (4), при спине, равном нулю, τ^\pm -мезоны были бы псевдоскалярными частицами ($\zeta_\tau = -1$), а V_2^0 — скалярной частицей ($\zeta_V = +1$). Таким образом при спине 0 изотопическое подобие τ^\pm -мезонов и V_2^0 -частиц исключается.

2. Если спины распадающихся частиц равны σ , то из элементарных соображений нетрудно получить

$$\zeta_V = (-1)^\sigma. \quad (5)$$

В частности, при $\sigma=1$, частица V_2^0 будет векторной. То же самое, очевидно, должно иметь место и для τ -мезонов, если существует изотопическое подобие (в противном случае τ -мезоны могли бы быть как векторными, так и псевдовекторными частицами). Следовательно, при спине 1 изотопическое подобие τ^\pm -мезонов и V_2^0 -частиц возможно только в том случае, если обе частицы являются векторными.

3. В случае изотопического подобия τ^\pm -мезонов и V_2^0 -частиц, наряду с процессом (1), должен иметь место распад по схеме

$$\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm + \pi^0. \quad (6)$$

Не существует каких-либо общих правил отбора, которые могли бы запретить процесс (6). Более того, если представить себе, что распад τ -мезона обусловлен его взаимодействием с нуклонным вакуумом, то процесс (1) для векторных τ -мезонов в наименшем порядке теории возмущений будет запрещен известным правилом отбора Фарри [2], тогда как для распада по схеме (6) такого запрета не возникает (наличие векторной или тензорной связи векторных τ -мезонов с нуклонами компенсируется участием в процессе π^0 -мезона, представляющего собой третью компоненту вектора в изотопическом пространстве). То же самое справедливо и для процесса (2); в

в этом случае нейтральной частицей, компенсирующей наличие векторной или тензорной связи, является сама V_2^0 -частица.

4. Предположение о векторном характере V_2^0 -частицы объясняет ее стабильность относительно распада на два γ -кванта, так как при спине, равном 1, такой процесс запрещен по теореме Ландау [3]. Кроме того, если, в соответствии с вышеизложенным, приписать V_2^0 -частице изотопический спин 1, ее распад на два нейтральных π^0 -мезона

$$V_2^0 \rightarrow 2\pi^0 \quad (7)$$

будет также запрещен. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся разложением Клебша—Жордана для изотонической части волновой функции системы двух π -мезонов, образовавшихся в результате распада V_2^0 -частицы. Обозначая эту волновую функцию через $\Psi(1,2)$, а изотопические части волновых функций отдельных π -мезонов через $\psi_\mu(1), \psi_\mu(2)$ ($\mu = 0, \pm 1$ — проекция изотопического спина π -мезона на ось квантования в изотопическом пространстве), можем написать:

$$\Psi(1,2) = \sum_{\mu} (1,0|1,\mu;1,-\mu) \psi_\mu(1) \psi_{-\mu}(2). \quad (8)$$

Так как для входящих в (8) коэффициентов Клебша — Жордана имеет место соотношение

$$(1,0|1,\mu;1,-\mu) = - (1,0|1,-\mu;1,\mu), \quad (9)$$

то при $\mu=0$, получаем

$$(1,0|1,0;1,0) = 0. \quad (10)$$

Поскольку значение $\mu=0$ соответствует нейтральным π -мезонам, равенством (10) доказывается запрещенность процесса (7). Иное положение имеет место, если изотопический спин V_2^0 -частицы равен нулю. В этом случае в разложение $\Psi(1,2)$ по произведению волновых функций отдельных π -мезонов войдут коэффициенты Клебша — Жордана типа $(0,0|1,\mu;1,-\mu)$, для которых справедливо соотношение:

$$(0,0|1,1;1,-1) = (0,0|1,-1;1,1) = - (0,0|1,0;1,0) = (1/3)^{1/2}. \quad (11)$$

Так как относительная вероятность w процессов (7) и (2) определяется формулой

$$w = (0,0|1,0;1,0)^2 / \sum_{\mu=\pm 1} (0,0|1,\mu;1,-\mu)^2, \quad (12)$$

то, согласно (11),

$$w = 1/2. \quad (13)$$

5. Резюмируя изложенное, мы приходим к следующим выводам.

а) Изотопическое подобие τ^\pm -мезонов и V_2^0 -частицы возможно в том случае, если частицы обоих типов являются векторными (спин 1, внутренняя четность -1), или если спины этих частиц больше единицы.

б) Если τ^\pm -мезоны и V_2^0 -частица изотопически подобны, то, паряду с распадом τ^\pm -мезонов на три заряженных π -мезона, должен иметь место (и притом с неизменной вероятностью) распад на две частицы — на заряженный и на нейтральный π -мезоны.

в) Если V_2^0 -частица и τ^\pm -мезоны образуют изотопический триплет (точнее, если изотопический спин V_2^0 -частицы равен 1), то V_2^0 -частица стабильна относительно распада на два нейтральных π -мезона. При изотопическом спине, равном 0, одна треть всех V_2^0 -частиц распадается на два π^0 -мезона.

В заключение отметим, что экспериментальное обнаружение процесса (6) было бы веским аргументом в пользу изотопического подобия V_2^0 -частицы и τ^\pm -мезонов, тогда как доказательство отсутствия указанного явления или установление факта распада V_2^0 -частицы на два π^0 -мезона полностью исключило бы такую гипотезу.

Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
22 мая 1954 г.

Литература

[1] L. Michel. C. R., 234, 703, 2161, 1952. — [2] C. B. van Wyk. Phys. Rev., 80, 487, 1950. — [3] Л. Д. Ландау. ДАН СССР, 60, 207, 1948.

К ВОПРОСУ О СПЕКТРЕ МАСС ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

П. Г. Кард

Учитывая актуальность проблемы спектра собственных масс элементарных частиц, представляется целесообразным предложить новый предварительный способ теоретического определения собственных масс.

В пятимерных теориях наибольшие затруднения встречает конкретное физическое истолкование пятого измерения. Румер [1] считает пятое измерение действием, и, полагая его замкнутым, приравнивает его период постоянной Планка (см. также [2]). Согласно Родичеву [3] пятое измерение является собственным временем частицы и представляет собой поэтому координату, канонически сопряженную с собственной массой частицы. О периодичности пятого измерения Родичев не говорит ничего.

Кажется заманчивым, используя идею Родичева, дополнить ее требованием периодичности по отношению к пятой координате, введя, таким образом, новую универсальную постоянную a , имеющую размерность длины.

Рассматривая собственную массу частицы как оператор и считая пятую координату s канонически сопряженной с собственной массой, мы должны положить

$$\hat{m}_0 c = -i\hbar \frac{\partial}{\partial s}, \quad (1)$$

где \hat{m}_0 — оператор собственной массы частицы. Если потребовать, чтобы собственные функции в пятимерном мире были периодическими функциями пятой координаты с периодом $2\pi a$, то для собственных значений m_0 оператора \hat{m}_0 будем иметь

$$m_0 = n\hbar/ac, \quad (2)$$

где n — целое число. Обозначим

$$\mu = \hbar/ac \quad (3)$$

(квант собственной массы) и положим

$$a = 2e^3/m_e c^2, \quad (4)$$

где m_e — масса покоя электрона, e — элементарный заряд. Тогда

$$\mu = 137 m_e/2 \quad (5)$$

и

$$m_0 = (137n/2) m_e. \quad (6)$$

Данный вывод спектра масс элементарных частиц интересен в том отношении, что он дает массы, некоторые из которых весьма близки к экспериментальным. Полагая в (6) $n = 3, 4, 8, 14, 27$, находим значения масс (в электронных массах) 205,5; 274; 548; 959; 1849,5. Эти числа близки к массам μ -, π -, ζ -, τ -мезонов и протона (нейтрона).

Масса электрона не входит в эту схему. Этому факту можно дать следующее истолкование. Оператор \hat{m}_0 в (1) можно рассматривать как оператор основной, «затравочной» [4] массы. Экспериментальные массы могут отличаться от основной на различные (полевые) добавки, вообще говоря, малые. С этой точки зрения, основную массу электрона приходится считать равной нулю. Тот факт, что фактические массы элементарных частиц должны отличаться от «затравочных» [по формуле (6)], находит выражение также и в том обстоятельстве, что ζ -мезоны распадаются на два π -мезона, причем энергия распада составляет всего около 2—4 электронных масс [5]. Это значит, что фактическая масса ζ -мезона не равна в точности двойной массе π -мезона, как это вытекало бы из (6), но несколько больше ее. Аналогично можно было бы объяснить небольшие расхождения между теоретическими и экспериментальными массами и в других случаях.

Предлагаемый вывод спектра масс элементарных частиц является предварительным: в нем ничего не говорится ни о спине частиц, ни о времени их жизни, ни о «запрещенных» массах (таковыми нужно считать, во-первых, отрицательные массы, а, во-вторых, достаточно большие массы), ни о зарядах частиц. Чтобы учесть все эти разнообразные свойства элементарных частиц, необходимо, повидимому, ввести некоторые дальнейшие допущения. Здесь может оказаться полезной идея Терлецкого [6] о «полярной» структуре элементарных частиц.

Новая универсальная константа a , введенная нами в качестве периода пятой координаты, должна, повидимому, иметь более широкое значение, кроме связанного с квантованием собственной массы. По всей вероятности, та же константа должна играть известную роль в гипотетической дискретности четырехмерного пространства-времени (см. в особенности [7, 8]).

Автор выражает благодарность проф. А. Кипперу за ценные указания.

Примечание при корректуре. После того, как настоящая статья была сдана в печать, автору стала известна работа [9], в которой соотношение, аналогичное (6), рассматривается как эмпирический факт, без всякого теоретического обоснования.

Тартусский государственный
университет

Поступила в редакцию
12 марта 1954 г.

Литература

- [1] Ю. Б. Румер, Усп. математ. наук, 8, 55, 1953.—[2] Р. Ehrenfest u. G. E. Uhlenbeck, ZS. f. Phys., 39, 495, 1926.—[3] В. И. Родичев. ЖЭТФ, 21, 869, 1951.—[4] Сб. «Сдвиг уровней атомных электронов». Вступительная статья Д. Д. Иваненко, стр. 15, ИИЛ, 1950.—[5] А. И. Алиханов. Усп. физ. наук, 50, 481, 1953.—[6] Я. П. Терлецкий. ДАН СССР, 94, 209, 1954.—[7] В. Амбарцумян, и Д. Иваненко. ZS. f. Phys., 64, 563, 1930.—[8] H. S. Snyder. Phys. Rev., 71, 38, 1947.—[9] Y. Nambu. Progr. of Theoret. Phys., 7, 595, 1952.

ЗАМЕЧАНИЕ К ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ С ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

I. X. Куусик

В работах по электродинамике с высшими производными часто опираются на результаты статьи [1]. Настоящее замечание имеет целью указать на имеющуюся в этой статье ошибку.

В упомянутой статье ошибочно утверждается, что уравнение Дирака и дополнительные условия, записанные в виде

$$\left(R^s + \frac{\partial}{\partial t^s} \right) \psi = 0,$$

$$\left(A_{v,v} + \sum_s \epsilon^s c [D_1 - D_2] \right) \psi = 0, \quad (1)$$

совместимы. Здесь

$$R^s = \frac{i}{\hbar} c \alpha_h^s \left[p_h^s - \frac{\epsilon^s}{c} A_h^s \right] + \frac{i}{\hbar} m^s c^2 \beta^s + \frac{\epsilon^s}{\hbar} A_4^s,$$

$$A_\alpha = A_\alpha^0 + A_\alpha^{e1} + A_\alpha^{e2} = \frac{1}{(2\pi)^s l_s} \int (\varphi_\alpha(k) \exp \{ik_v x_v\} + \varphi_\alpha^*(k) \exp \{-ik_v x_v\}) dk +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^s l_s} \int (\bar{\varphi}_\alpha(k) \exp \{ik_v x_v\} + \bar{\varphi}_\alpha^*(k) \exp \{-ik_v x_v\}) dk +$$

$$+ \frac{ia}{(2\pi)^s l_s} \int \bar{k}_\alpha (\bar{B}(k) \exp \{ik_v x_v\} - \bar{B}^*(k) \exp \{-ik_v x_v\}) dk;$$

индексы, обозначенные латинскими буквами, пробегают значения 1, 2, 3, а обозначенные греческими буквами 1, 2, 3, 4; $k_\alpha = (k_n, ik)$, $k = |k_n|$, $\bar{k}_\alpha = (k_n, ik)$, $\bar{k} = \frac{1}{a} (1 + a^2 k^2)^{1/2}$; φ_α , $\bar{\varphi}_\alpha$, $a \bar{k}_\alpha \bar{B}$ — амплитуды интеграла Фурье; D_1 — D -функция при $1/a^2 = 0$, D_2 — D -функция при $1/a^2 \neq 0$. В действительности, операторы, встречающиеся в уравнениях (1), не перестановочны. Именно:

$$\left[-\beta^s \frac{\hbar}{c} \left(R^s + \frac{\partial}{\partial t^s} \right), \left(A_{v,v} + \sum_s \epsilon^s c [D_1 - D_2] \right) \right] =$$

$$= \frac{\hbar}{i} \gamma_\alpha^s \frac{\partial}{\partial x_\alpha^s} (\epsilon^s c [D_1 - D_2]) - \frac{\epsilon^s}{c} \gamma_\alpha^s [A_\alpha^s, A_{v,v}] = -\frac{\hbar}{i} \gamma_\alpha^s \frac{\partial}{\partial x_\alpha^s} (\epsilon^s c D_2) \neq 0.$$

На первый взгляд кажется естественным выбрать систему уравнений в таком виде:

$$\begin{aligned} \left(R^s + \frac{\partial}{\partial t^s} \right) \psi &= 0, \\ \left(A_{v,v} + \sum_s \epsilon^s c D_1 \right) \psi &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В этом случае уравнения совместны, но продольная собственная энергия электрона получится в виде расходящейся величины, как и в обычной электродинамике. Это можно интерпретировать так: в дополнительных условиях встречается только функция D_1 ; отсутствие функции D_2 указывает, что электрон, как источник обыкновенного поля, влияет на внешнее поле, и собственная энергия электрона получается расходящейся потому, что собственное поле не имеет компоненты необыкновенного поля, компенсирующего бесконечность. По этой причине уравнения в виде (1) не годятся.

Если потребовать, чтобы в дополнительных условиях отражалось и влияние компоненты необыкновенного поля и чтобы продольная собственная энергия электрона в общем совпадала с собственной энергией, выведенной из обычной электродинамики, то систему уравнений следует выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(R^s + \frac{\partial}{\partial t^s} \right) \psi &= 0, \\ \left(A_{v,v} + \sum_s \epsilon^s c [D_1 - D_2] \right) \psi &= 0, \end{aligned}$$

где

$$R^s = \frac{i}{\hbar} c \alpha_h^s \left[P_h^s - \frac{\epsilon^s}{c} (A_h - A_h^{e2})^s \right] + \frac{i}{\hbar} m^s c^2 \beta^s + \frac{1}{\hbar} \epsilon^s (A_4 - A_4^{e2})^s.$$

Добавочный потенциал в уравнении Дирака A_α^{e2} значительно отличается от нуля на расстояниях, меньших классического радиуса электрона. В этом случае продольная собственная энергия электрона выражается формулой:

$$m_0 c^2 = \frac{5}{32\sqrt{2}\pi} \frac{\epsilon^2}{2a}.$$

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
6 июля 1953 г.

Литература

- [1] B. Podolsky, P. Schwed. Rev. Mod. Phys., 20, 40, 1948.

ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ И ТЕПЛОТА ИСПАРЕНИЯ РТУТИ, СУРЬМЫ, ВИСМУТА И МЫШЬЯКА

C. H. Задумкин

В [1] нами была дана формула, связывающая поверхностное натяжение металлов с их теплотой испарения:

$$\sigma = \alpha L \frac{f_{hv/2} f_s}{f_{hv} f_{hs}} \left(\frac{\beta^2}{k} \right)^{1/3} \left(\frac{D}{A f_v} \right)^{1/3}. \quad (1)$$

Здесь σ — поверхностное натяжение, L — молярная теплота испарения, $f_{hv/2}$ и f_{hv} — координационные числа частицы на поверхности и в объеме, f_s и f_v — число частиц соответственно на одну плоскую и объемную элементарную ячейку, f_{hs} — число соседей у частицы, находящихся на сетчатой плоскости на расстоянии $r \leq a$ (a — период решетки), A — атомный вес, D — плотность, β и k — числа, характеризующие геометрию кристаллической ячейки, и $\alpha = 1032$ — постоянная для всех металлов.

Формула (1) была проверена для основных типов металлических решеток, причем вычисленные значения σ находятся в удовлетворительном согласии с опытными данными.

В настоящем сообщении мы хотим показать, что формула (1) оказывается справедливой и для тех немногих металлов, которые имеют ромбоэдрическую решетку (Hg, Sb, Bi, As). При этом экспериментальные значения L и σ мы заимствуем, как и раньше, из [2].

При вычислении σ по формуле (1) необходимо иметь в виду, что числа f_{hs} , f_{hv} и $f_{hv/2}$ зависят от величины плоского угла грани ромбоэдра, например, $f_{hs} = 6$ при $\alpha \leq 60^\circ$ и $f_{hs} = 4$ при $\alpha > 60^\circ$. Очевидно, значения k и β для ромбоэдрической решетки также будут зависеть от α , а именно $k = \sin \alpha$ и $\beta = (1 - \cos \alpha)(1 + 2 \cos \alpha)^{1/2} / \sin \alpha$, так как площадь грани ромбоэдра $s = a^2 \sin \alpha$, а объем элементарной ячейки

$$v = sh = sa\beta = a^3 (1 - \cos \alpha) (1 + 2 \cos \alpha)^{1/2}.$$

Взяв значения α из [2] и предполагая, что на поверхности указанных выше металлов атомы расположены в плоскости граней ромбоэдров, для Hg, Sb, Bi и As мы будем иметь следующие значения σ , найденные по формуле (1), в сопоставлении с экспериментальными значениями:

Таблица

Результаты вычисления σ по формуле (1)

Металл	<i>A</i>	<i>D</i>	ккал моль	$\sigma_{\text{выч}}$ эр/см ²	Темпера- турата кипения °C	$\sigma_{\text{эксп}}$ эр/см ²	Темпера- турата, при которой из- мерено σ , °C
Hg	200,61	13,56	14,2	487	356,9	471,6	20
Sb	121,76	6,68	36,8	379	1380	368	750
Bi	209,0	9,80	46,1	438	1470	388	300
As	74,91	5,73	7,1	91	возд. 615	—	—

Из таблицы видно, что вычисленные значения σ отличаются от опытных не больше, чем на 5—10%.

Повидимому, формула (1) пригодна для всех типов металлических решеток при ориентировочной оценке величины коэффициента поверхностного натяжения металлов.

Кабардинский государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
17 октября 1953 г.

Литература

[1] С. Н. Задумкин. ДАН СССР, 92, 115, 1953.—[2] Справочник химика, тт. Г и И, Госхимиздат, 1951.

ТЕПЛОЕМКОСТЬ ГАЗА ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Б. Л. Тиман

В настоящей работе выясняется влияние термической ионизации на теплоемкость газа при высоких температурах. При нагревании газа в этом случае существенное количество тепла должно расходоваться, во-первых, на ионизацию, а, во-вторых, на сообщение кинетической энергии образующимся при ионизации частицам. Это должно заметно повлиять на теплоемкость газа.

Будем считать, что температура такова, что газ уже практически диссоциирован. Вместо удельной теплоемкости при постоянном объеме будем вычислять количество тепла, которое необходимо для нагревания единицы объема газа на 1° при постоянном общем объеме газа. Эту теплоемкость будем обозначать через c_v .

Если в газе происходит термическая ионизация, то c_v можно представить в виде:

$$c_v = (dQ_1/dT) + (dQ_2/dT), \quad (1)$$

где dQ_1/dT — количество тепла, необходимое для изменения внутренней энергии газа при его нагревании на 1° , а dQ_2/dT — количество тепла, которое идет на ионизацию при нагревании газа на 1° .

Внутренняя энергия U единицы объема равна

$$U = \frac{3}{2} (n_1 + n_2 + n_3) kT,$$

где n_1 , n_2 и n_3 — соответственно число ионов, электронов и атомов в единице объема газа.

Величина $n = n_1 + n_3$ будет при изменении температуры оставаться постоянной, и равна числу атомов до ионизации. Поэтому

$$dQ_1/dT = \frac{3}{2} k [n + n_1 + T (dn_1/dT)]$$

(мы положили $n_1 = n_2$). Очевидно, что

$$dQ_2/dT = I (dn_1/dT),$$

где I — энергия однократной ионизации газа. Подставляя значения dQ_1/dT и dQ_2/dT в выражение (1), получим

$$c_v = \frac{3}{2} nk + c'_v, \quad (2)$$

где

$$c'_v = (\frac{3}{2} kT + I) (dn_1/dT) + \frac{3}{2} kn_1.$$

Первый член суммы в выражении (2) дает теплоемкость неионизованного газа, а c'_v обусловлена ионизацией.

Будем предполагать, что при изменении температуры в газе успевает устанавливаться ионизационное равновесие. Тогда, воспользовавшись законом действующих масс [1], можно получить следующую зависимость числа ионизованных в единице объема частиц от температуры:

$$n_1 = (\sqrt{1 + 4nf(T)} - 1) / 2f(T), \quad (3)$$

где

$$f(T) = \frac{g_3}{2g_1} \left(\frac{2\pi}{m} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{h^3}{(kT)^{\frac{5}{2}}} e^{J/kT}.$$

Здесь g_3 и g_1 — соответственно статистические веса атома и иона, m — масса электрона.

Дифференцируя n_1 по температуре и подставляя dn_1/dT в c'_v , получим

$$c'_v = \frac{k}{4f(T)(kT)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+4nf(T)}} \left\{ (12J/kT + 2I^2) [2nf(T) + 1 - \sqrt{1+4nf(T)}] + \right. \\ \left. + \frac{15}{2}(kT)^2 + 21nf(T)(kT)^2 - \frac{15}{2}(kT)^2\sqrt{1+4nf(T)} \right\}. \quad (4)$$

Из этого выражения видно, что поправка к теплоемкости c'_v , связанная с ионизацией газа, существенно зависит от температуры. Эта зависимость для атомарного водорода (потенциал ионизации 13,5 В) представлена на графике рис. 1. В качестве n было взято число Лошмидта.

Величина c'_v вычислялась в эрг/см³град. При этом мы пользовались логарифмическим масштабом.

Из рисунка видно, что при температуре около 10 000° c'_v становится сравнимой с теплоемкостью неионизованного газа. При дальнейшем увеличении температуры величина c'_v будет возрастать и при температуре 20 000° достигнет максимального значения, которое почти в 100 раз больше теплоемкости неионизованного газа. Наличие максимума объясняется тем, что при нагревании газа на 1° до достижения 20 000° растет число ионизованных частиц, а после 20 000° оно начинает убывать в связи с приближением газа к полной однократной ионизации. При температуре

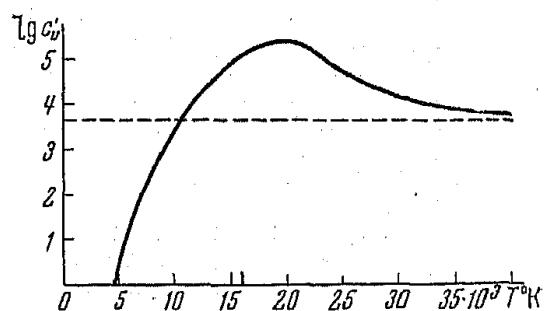


Рис. 1. Зависимость теплоемкости c'_v от температуры (сплошная кривая); пунктирная линия соответствует теплоемкости неионизированного газа

выше $35\,000^\circ$ c_v' приближается к теплоемкости неионизованного газа, что видно непосредственно из выражения (4). Действительно, при указанных температурах величина $nf(T) \ll 1$ и поэтому, разлагая $V\sqrt{1+4nf(T)}$ в ряд и пренебрегая членами, пропорциональными $[nf(T)]^2$, получим, что $c_v' = \frac{3}{2}nk$. Это будет теплоемкость электронного газа при полной однократной ионизации.

Для газов, потенциал ионизации которых меньше потенциала ионизации водорода, теплоемкость c_v' , обусловленная ионизацией, будет сравнима с теплоемкостью неионизованного газа уже при более низких температурах, и максимальное значение теплоемкости будет также соответствовать более низким температурам.

В заключение выражаю благодарность И. Л. Аптекарю за ценные дискуссии при выполнении работы.

Днепропетровский горный
институт

Поступило в редакцию
27 января 1954 г.

Литература

- [1] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Статистическая физика, ГИТТЛ, 1951.

О ПРИРОДЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ СТЕКЛА

P. L. Мюллер

В статье, посвященной исследованию длительных процессов поляризации стекол, Косман и Паранюк [1] отметили недостаточную обоснованность сделанного ранее заключения об электронной проводимости стекол, поскольку в случае катионной проводимости не были приняты во внимание анодные явления. Признавая далее отсутствие в своей новой работе решающего доказательства в пользу электронной проводимости стекла, Косман и Паранюк все же полагают «очень вероятным предположение о том, что стекло, несмотря на выполнение закона Фарадея, является не ионным, а электронным проводником и является, следовательно, вторым после $\alpha\text{-Ag}_2\text{S}$ [2] веществом, для которого выполнение закона Фарадея не является доказательством ионной проводимости» [1].

Прежде всего следует указать на то, что выполнение закона Фарадея у $\alpha\text{-Ag}_2\text{S}$ наблюдается лишь при условии включения по Тубандту образца $\alpha\text{-Ag}_2\text{S}$ последовательно и в тесном контакте с образцом ионно-проводящего $\alpha\text{-AgJ}$, соприкасающегося одновременно с катодом. Только при этом условии диффузия атомарного серебра в $\alpha\text{-Ag}_2\text{S}$, лимитируемая катионным переносом серебра в $\alpha\text{-AgJ}$, согласуется с законом Фарадея.

В 1941 г. Остроумовым была строго доказана ионная проводимость стеклообразной буры в условиях последовательного включения по Тубандту исключительно образцов стеклообразной буры без применения других ионно-проводящих образцов [3]. Таким образом в опытах Остроумова со стеклом были исключены привходящие явления, имевшиеся в опытах [2] при исследовании $\alpha\text{-Ag}_2\text{S}$.

Использование катодных прослоек из стекла (по Щукареву) для предотвращения дендритообразования при определении чисел переноса по Тубандту также говорит против возможности электронной проводимости стекол [4]. В пользу ионной проводимости стекол говорит мое и Маркина исследование [5], выполненное в связи с дискуссией с Г. Шиллером.

Что касается того факта, что при плотности тока $3 \cdot 10^{-10}$ А/см² в течение $3,6 \cdot 10^4$ сек, происходит накопление зарядов порядка 10^{-5} А·сек/см² и при этом не уменьшается величина сквозного тока через стекло, то это требует еще дополнительного экспериментального и методического пояснения. Нельзя не отметить игнорирования Косманом химического состава исследуемого стекла. С электрохимической точки зрения совсем не оправдан выбор теллуровых электродных слоев при исследовании электропроводности и поляризационных явлений у стекол (видимо, натриевых). При рассмотрении вопросов, относящихся к области электрохимии твердых тел, недопустимо пренебрежение химическими изменениями, сопровождающими физические процессы. Надо иметь также в виду, что изучение электропроводности стекол значительно затрудняется в случае применения неопределенных и сложных по составу образцов технических стекол [6].

Поступило в редакцию
2 февраля 1954 г.

Литература

- [1] М. С. Косман и Р. Т. Паранюк. ЖЭТФ, 24, 721, 1953.—[2] С. W a g n e r. ZS. Phys. Chem., 21, 42, 1933; 23, 469, 1933.—[3] Г. Остроумов. Журн. общ. химии, 19, 407, 1949.—[4] А. Ф. Иоффе. Физика кристаллов, ГТТИ, М.—Л., 1929.—[5] Р. Л. Мюллер и Б. И. Маркин. Журн. физ. химии, 5, 1227, 1934.—[6] С. А. Щукарев и Р. Л. Мюллер. Журн. физ. химии, 1, 625, 1930.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция ЖЭТФ просит авторов при направлении статей в печать руководствоваться изложенными ниже правилами. СТАТЬИ, ПРИСЛАННЫЕ БЕЗ СОБЛЮДЕНИЯ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ПРАВИЛ, К РАССМОТРЕНИЮ РЕДАКЦИЕЙ ПРИНИМАТЬСЯ НЕ БУДУТ.

1. Статьи, являющиеся результатами работ, проведенных в институтах, должны обязательно иметь направление от соответствующего института.

2. Редакция в особенности обращает внимание авторов на то, что статьи должны быть изложены с предельной краткостью, совместимой с ясностью изложения, и окончательно обработаны. Следует избегать повторения данных таблиц или графиков в тексте статьи, а также представления численных результатов в виде таблиц и графиков одновременно.

Статьи объемом свыше 1 печ. листа (т. е. 21—22 стр. текста на пишущей машинке) вообще не допускаются. Как текст, так и графический материал должны представляться обязательно в двух экземплярах.

3. Статья должна иметь краткую аннотацию, указывающую цель и результаты работы. Аннотация и раздел «Выводы» (если таковой имеется в статье) не должны, однако, дублировать друг друга.

4. Статьи должны быть напечатаны на пишущей машинке с одной стороны листа; рукописные вставки не допускаются. Формулы должны быть вписаны четко чернилами. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных от текста страницах.

СТАТЬИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСАНЫ АВТОРОМ, А ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ АВТОРОВ ВСЕМИ СОАВТОРАМИ.

5. Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между заглавными и строчными буквами в формулах. В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своим размером (*V* и *v*, *U* и *u*, *W* и *w*, *O* и *o*, *K* и *k*, *S* и *s*, *I* и *i*, *C* и *c*, *P* и *p*), — необходимо заглавные буквы подчеркивать сплошью черточками (например, S), а строчные помечать двумя черточками сверху (например, s). Необходимо делать различие между буквой *C* (большой), *o* (малой) и *O* (нулем), для чего буквы *O* и *o* подчеркивать двумя черточками: *O* и *o*, а нуль оставлять без подчеркивания. Необходимо также различать буквы *I* и *J*, для чего в рукописи букву *I* писать как римскую единицу с точкой сверху. Греческие буквы должны подчеркиваться красным карандашом. Векторы подчеркивать синим или черным карандашом.

6. Подстрочные примечания должны иметь сплошную нумерацию по всей статье. Цитируемая литература должна даваться не в виде подстрочных примечаний, а общим списком в конце статьи, с указанием в тексте статьи ссылки порядковой цифрой над строкой, в прямых скобках (например, [1]). Цитируемая литература должна быть оформлена в следующем порядке: а) для журнальных статей указываются инициалы и фамилии авторов, название журнала, номер тома (подчеркнуть сплошью), страница и год; б) для книг надо указывать инициалы и фамилии авторов, полное название книги, год и место издания (для книг иностранного происхождения — указывать данные русского перевода, если таковой имеется).

7. Все рисунки и чертежи должны быть представлены отдельно от рукописи и ни в коем случае не должны приклеиваться к оригиналам. Рисунки желательно снабжать разъясняющими подписями, которые должны быть собраны на отдельном листе. На обороте рисунков должна быть указана фамилия автора, название статьи и номер рисунка. Надпись на рисунках следует по возможности заменять цифрами или буквенными обозначениями в подписи к рисунку или в тексте.

Редакция просит авторов ограничиваться минимальным числом рисунков к статьям.

8. Редакция просит авторов отмечать на полях рукописи места, которые могут быть набраны петитом.

9. Редакция посыпает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте не допускаются. Корректура с подписью автора должна быть выслана обратно в редакцию в течение суток с момента ее получения.

10. К рукописи должен быть приложен точный адрес, фамилия, имя и отчество автора, а также номер телефона, служебного или домашнего (для авторов, проживающих в Москве).

11. РУКОПИСИ, НЕ ПРИНЯТЫЕ РЕДАКЦИЕЙ, АВТОРУ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ.

Адрес редакции, Москва, Подсосенский пер., д. 21, Изд-во АН СССР.