Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 6, стр. 333 — 334 25 сентября 1991 г.

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИКРИСТАЛЛОВ

В.И.Марченко

Институт физики твердого тела АН СССР
142432, Черноголовка, Московской обл.

Поступила в редакцию 2 августа 1991 г.

Отмечено, что, в зависимости от симметрии квазикристаллов, в условиях их устойчивости могут входить параметры не фигурирующие в уравнениях механики.

Обычно условия устойчивости в механике твердых тел (поле вектора смещений), жидких кристаллов (поле нематических поворотов), магнетиков (поле спиновых поворотов) выражаются через константы, входящие в уравнения динамики. В жидких кристаллах и магнетиках исследование устойчивости сводится к требованию положительной определенности энергии неоднородных состояний. В теории упругости эквивалентное условие - положительность квадратов скоростей звуков (см. [1] §22), оказывается более слабым, чем условие устойчивости относительно однородных деформаций (см.[1] §4). В квазикристаллах ситуация такая же, однако, возможны особые случаи, когда в условиях устойчивости проявляются новые параметры.

Следуя общему методу построения механики квазикристаллов [2], продемонстрируем этот эффект в простейшей из возможных квазикристаллических структур - в двумерном квазикристалле с осью восьмого порядка. Симметрия структуры определяется набором фурье-компонент пространственной модуляции функции плотности $\rho(\vec{r})$

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 + \Sigma|\rho_{\vec{k}}|e^{i(\vec{k}\vec{r}-\varphi_{\vec{k}})}. \tag{1}$$

Малые деформации квазикристалла в данном случае описываются четырьмя фазовыми полями φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, соответствующими основным гармоникам с минимальными по модулю волновыми векторами, ориентированными под углами $\pi/2$ и $\pi/4$ по отношению друг к другу (напомним, что в силу вещественности плотности $\varphi_{\vec{k}} = -\varphi_{-\vec{k}}$).

Введем комплексное поле

$$u_x + iu_y = \frac{a}{2\pi}(\varphi_1 + e^{i\pi/4}\varphi_2 + e^{i2\pi/4}\varphi_3 + e^{i3\pi/4}\varphi_4) \tag{2}$$

преобразующееся по векторному представлению точечной группы (квазикристаллического класса) симметрии квазикристалла C_{8v}

$$C_8(u_x + iu_y) = e^{i\pi/4}(u_x + iu_y);\;\; \sigma_v(u_x + iu_y) = u_x - iu_y; \tag{3}$$

a - квазикристаллический период, σ_v - отражение; и поле

$$\xi + i\chi = \frac{a}{2\pi}(\varphi_1 + +e^{i3\pi/4}\varphi_2 + e^{i6\pi/4}\varphi_3 + e^{i9\pi/4}\varphi_4) \tag{4}$$

преобразующееся по закону

$$C_8(\xi + i\chi) = e^{i3\pi/4}(\xi + i\chi);\;\; \sigma_v(\xi + i\chi) = \xi - i\chi. \tag{5}$$

Компоненты u_x, u_y представляют собой вектор смещения квазикристалла как целого, величины же ξ, χ соответствуют внутреннему движению. Энергия упругой и фазовой деформации квазикристалла равна:

$$\frac{\lambda}{2}u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2 + \lambda_1(\partial_x + i\partial_y)(\xi + i\chi)(\partial_x - i\partial_y)(\xi - i\chi)+$$
$$+\lambda_2(\partial_x + i\partial_y)(\xi - i\chi)(\partial_x - i\partial_y)(\xi + i\chi)+$$
$$\lambda_3\{(\partial_x + i\partial_y)(\xi + i\chi)(\partial_x + i\partial_y)(\xi + i\chi) + \text{к.с.}\}+$$
$$\lambda_4\{(\partial_x + i\partial_y)(u_x + iu_y)(\partial_x + i\partial_y)(\xi - i\chi) + \text{к.с.}\}. \quad (6)$$

Заметим, что, хотя два члена чисто фазовой деформации (λ_1, λ_2) отличаются на инвариант

$$\partial_x\xi\partial_y\chi - \partial_y\xi\partial_x\chi$$

сводящийся к полной производной, и, потому, в уравнения механики квазикристалла будет входить лишь параметр $\lambda_1 + \lambda_2$, тем не менее другая комбинация входит как в граничные условия, так и в энергию однородных деформаций. В условиях устойчивости относительно неоднородных деформаций отсутствует комбинация констант $\lambda_1 - \lambda_2$. Истинные же условия устойчивости, получаемые при рассмотрении энергии однородных деформаций (когда величины u_{ik}, $\partial_i\xi$ и $\partial_i\chi$ постоянны), сводятся к следующей системе неравенств

$$\lambda + \mu > 0: \;\; \mu > 0; \;\; \lambda_1 + 2\lambda_3 > 0; \;\; \lambda_1 - 2\lambda_3 > 0; \;\; \lambda_2 > 0; \;\; \lambda_2\mu > 2\lambda_4^2.$$

Обсуждаемое явление имеется и в рассмотренном в работе [2] примере квазикристалла с осью 10 порядка - вместо приведенных там условий, необходимо выполнение неравенств

$$\lambda + \mu > 0; \;\; \mu > 0; \;\; k_1 + k_2 > 0; \;\; k_1 - k_2 > 0; \;\; \mu(k_1 + k_2) > 2(k_3^2 + k_4^2).$$

Отметим, что в икосаэдрическом квазикристалле не существует инвариантов, сводящихся к полной производной.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.Теория упругости. М.: Наука. 1965.

2. Levin D., Lubensky T.C., Ostlund S. et al. Phys. Rev. Lett., 1985, 54, 1520.