

Нелинейная двумерная гриновская функция в смектиках

Е. А. Бренер⁺, В. И. Марченко^{+*∇}, Д. А. Пилипенко⁺

⁺Institut für Festkörperforschung, Forschungszentrum Jülich, D-52425 Jülich, Germany

*Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН, 119334 Москва, Россия

∇ Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

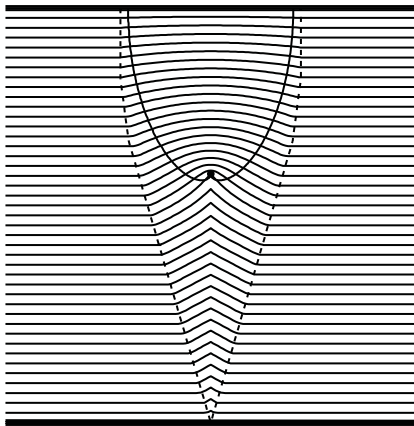
Поступила в редакцию 15 октября 2009 г.

Решена задача о деформации смектика при приложении к нему силы, распределенной на линии в базисной плоскости.

PACS: 61.30.-v

Дальние асимптотики деформаций вокруг изолированных дефектов в смектиках характеризуются индексом α [1]. Если $\alpha < 0$, то применима линейная теория. При $\alpha = 0$ (краевая дислокация [2, 3], гриновская функция [4]) линейное решение верно при малой амплитуде воздействия, а по мере ее роста становятся важными нелинейные эффекты. Если же $\alpha > 0$, то необходимо учитывать нелинейные эффекты даже при сколь угодно слабом воздействии. В настоящем сообщении мы предлагаем решение нелинейной задачи о двумерной гриновской функции ($\alpha = 1/2$, [1]).

Рассмотрим смектик толщиной L , находящийся между твердыми недеформируемыми стенками, параллельными смектическим слоям (см. рисунок). В



Деформация смектика под действием линейного распределения силы ($\varepsilon = 0.1$). Жирная точка – место приложения силы. Пунктирная линия – граница области, где возникает заметная деформация. Тонкая линия – граница области сжатия ($\sigma < 0$)

центре ($x = z = 0$) к смектику приложим силу, однородно распределенную вдоль оси y (нормаль к плоскости рисунка) с линейной плотностью F .

Энергия малых деформаций смектика равна

$$E = \frac{A}{2} \int \left\{ \left(\partial_z u - \frac{(\partial_x u)^2}{2} \right)^2 + \lambda^2 (\partial_x^2 u)^2 \right\} dV \quad (1)$$

(см. (44, 13) в [5]), где u – смещение слоев вдоль оси смектика z , A – модуль упругости, λ – параметр длины. В нашей задаче смещение максимально ($= u_0$) на линии приложения силы. Введем малый параметр $\varepsilon = u_0/L$, новую функцию $f = u/u_0$ и новые координаты $\tilde{z} = z/L$, $\tilde{x} = x/\sqrt{\varepsilon}L$. Тогда

$$E = 2^{-1} AL^2 \varepsilon^{5/2} \int (\sigma^2 + \beta (f'')^2) d\tilde{z} d\tilde{x}, \quad (2)$$

где $\beta = (\lambda/\varepsilon L)^2$, $\sigma = \dot{f} - (f')^2/2$, точкой обозначено дифференцирование по \tilde{z} , а штрихом – по \tilde{x} . Таким образом, необходимо найти функцию f , дающую минимум энергии (2), равную единице в точке $\tilde{x} = \tilde{z} = 0$ и нулю на границах смектического слоя $\tilde{z} = \pm 1/2$. При этом сила равна $F = F_+ - F_-$, где

$$F_{\pm} = \mp \int \sigma_{zz} dS = \mp AL \varepsilon^{3/2} \int \sigma d\tilde{x}. \quad (3)$$

В макроскопической задаче уже при приложении ничтожной силы $F \sim \lambda A \sqrt{\lambda/L}$, когда амплитуда u_0 превысит расстояние между смектическими слоями $\sim \lambda \ll L$, можно пренебречь эффектом кривизны $\propto \beta$. Интересно, что тогда интегралы (2), (3) можно вычислить, даже не имея полного решения. Дело в том, что поле деформаций разбивается на две области. В первой, где происходит сжатие материала, удастся решить задачу аналитически. Во второй же, благодаря неустойчивости Хелфриша (см. задачу к § 44 в [5]), вместо растяжения возникают повернутые состояния практически без напряжений. Заметные напряжения здесь возникают лишь внутри двойниковых границ микроскопической толщины [6].

На рисунке представлена картина деформаций смектика, полученная при численном решении задачи. В области сжатия функция f оказывается квадратичной по \tilde{x} -координате: $f(\tilde{x}, \tilde{z}) = f_0(\tilde{z}) + f_2(\tilde{z})\tilde{x}^2$. Нетрудно убедиться в том, что уравнение равновесия $\dot{\sigma} - (f'\sigma)' = 0$, соответствующее экстремуму энергии (2), действительно имеет такое точное решение, удовлетворяющее необходимым условиям. Его можно представить параметрически:

$$f_0 = 1 - \frac{2\varphi}{\pi}, \quad f_2 = -\frac{\pi \cos \varphi}{2 \sin^3 \varphi}, \quad \tilde{z} = \frac{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{\pi}. \quad (4)$$

Область сжатия $\sigma < 0$ соответствует значениям $-\tilde{x}_m < \tilde{x} < \tilde{x}_m$ при $\tilde{z} > 0$, где $\tilde{x}_m = 2\pi^{-1} \sin^2 \varphi$. Тонкая линия на рисунке показывает границу, с учетом смещения смектических слоев, где σ обращается в нуль. Ниже, до пунктирной линии, деформации сводятся к возникновению двух двойников [6], в которых, по мере приближения к уровню приложения силы, нарастают неоднородные деформации. Напряжения здесь малы и обусловлены, по-видимому, конечностью решетки, на которой проводился счет.

В пренебрежении натяжением двойниковых границ [6] (при $\beta = 0$) $F_- = 0$. Тогда, $F = F_+ = (8/3\pi)AL\varepsilon^{3/2}$. Соответственно,

$$u_0 = \left(\frac{3\pi a}{8}\right)^{2/3} L^{1/3}, \quad a = \frac{F}{A}. \quad (5)$$

При $\tilde{z} \ll 1$, согласно (4), $u = u_0 + \delta u$, где

$$\delta u = -3 \left(\frac{a^2 z}{16}\right)^{1/3} - \frac{x^2}{3z}, \quad \delta u \ll u_0. \quad (6)$$

Предположим, что в окрестности точки приложения силы смещение имеет вид $\delta u = -z^{1/3} a^{2/3} \psi(v)$, где $v = xa^{-1/3} z^{-2/3}$. Обратим внимание на то, что δu не зависит от L . Уравнение равновесия становится теперь обыкновенным дифференциальным:

$$((2\psi - 4v\psi' + 3(\psi')^2)(3\psi' - 2v))' = 0 \quad (7)$$

(штрих – дифференцирование по v) и имеет тривиальный первый интеграл. Константа интегрирования равна нулю, так как решение (6) обращает в нуль вторую скобку в (7). Первая скобка пропорциональна напряжению σ . Решение уравнения $\sigma = 0$ удобно представить параметрически:

$\psi = (4 + t^3)/2t$, $v = (1 + t^3)/t^2$. Интервал $-1 < t < 0$ соответствует области $z < 0$, и $0 < t < 2^{1/3} \rightarrow z > 0$. Константа интегрирования подобрана из условия $\psi(3/2^{2/3}) = 3/2^{1/3}$ при $t = 2^{1/3}$ (сшивка с решением (6) на линии $x_m(z) \simeq 3(az^2/4)^{1/3}$). Вблизи линии $z = 0$ ($|v| \rightarrow \infty$)

$$\delta u = -2\sqrt{a|x|} + \frac{az}{2|x|}.$$

Вблизи линии $x = 0$ при $z < 0$ ($|v| \rightarrow 0$)

$$\delta u = -\frac{3}{2}a^{2/3}|z|^{1/3} - \frac{a^{1/3}|x|}{|z|^{1/3}}.$$

Если $a \ll \lambda$, то нелинейные асимптотики верны при $|z| \gg \lambda^3/a^2$, $|x| \gg \lambda^2/a$, а на меньших расстояниях применима гриновская функция линейного приближения (см. [1]). Если же $a \gg \lambda$, то при $|z| \sim |x| \sim a$ нарушается приближение малых деформаций (1).

Напряжения в рассмотренной задаче существуют только в области сжатия смектика, а вместо растяжения происходит поворотная подстройка в некоторой ограниченной области. Такой характер нелинейного отклика позволяет утверждать, что поле сжатия и, соответственно, значение u_0 (при замене $L \rightarrow 2L_+$), а также асимптотика δu останутся неизменными в общем случае, когда сила приложена не в центре, а на любом расстоянии L_+ в направлении действия силы до недеформируемой стенки. Граничные условия на противоположной стороне и, вообще, вне области сжатия, сказываются лишь на структуре подстройки на расстояниях порядка размеров образца.

Работа выполнена при поддержке German-Israeli Foundation и Российского фонда фундаментальных исследований грант # 09-02-00483.

1. Е. А. Бренер, В. И. Марченко, Письма в ЖЭТФ **86**, 446 (2007).
2. E. A. Brenner and V. I. Marchenko, Phys. Rev. E **59**, R4752 (1999).
3. T. Ishikawa and O. L. Lavrentovich, Phys. Rev. E **60**, R5037 (1999).
4. Е. А. Бренер, В. И. Марченко, Письма в ЖЭТФ **90**, 153 (2009).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория упругости, М.: Наука, 1987.
6. В. И. Марченко, Письма в ЖЭТФ **86**, 841 (2007).