О линейных представлениях группы GL(4,R)

В.И. Марченко

Институт физических проблем им. П.Л. Капицы, РАН, 119334, Москва, Россия

Построены матрицы инфинитезимальных преобразований, определяющие линейные представления группы $GL(4,R)$.

Для нужд теоретической физики необходимо знание линейных представлений группы $GL(4,R)$. К сожалению, в литературе отсутствует их полное описание, и, более того, в книге [1] на стр. 257 высказано утверждение, что неэквивалентные тензорным спинорные представления группы Лоренца "не могут быть продолжены до представления всей группы линейных преобразований четырехмерного пространства". С целью разобраться в ситуации проследим за построением линейных представлений с помощью метода изложенного в книгах [1, 2]) на примерах группы трехмерных вращений и группы Лоренца.

В этом методе процедура сводится к определению матриц произвольного ранга, коммутирующих так же как и 16 вещественных матриц, определяющих преобразования 4-вектора f_i $(i = t, x, y, z)$. Решению именно этой задачи посвящена настоящая работа.

1. Матрицы инфинитезимальных преобразований. Для физических применений удобно представить произвольную вещественную матрицу a в виде разложения по симметричным u и антисимметричным v матрицам специального вида.

Антисимметричные матрицы v_{yz}, v_{zx}, v_{xy} :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{1}$$

задают группу пространственных вращений. При малом повороте на угол $\delta\boldsymbol{\theta}$ имеем $\delta f_i = (\delta\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{A})_{ki} f'_k$, где $A_x = v_{yz}$, $A_y = v_{zx}$, $A_z = v_{xy}$.

При добавлении матриц u_{tx}, u_{ty}, u_{tz} :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{2}$$

получаем группу Лоренца.

Единичная матрица

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{3}$$

соответствует масштабному преобразованию пространства-времени. Перечисленные семь матриц задают максимальную подгруппу группы GL(4,R).

Введем матрицу, коммутирующую с матрицами (1),

$$u = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

В результате ее коммутации с матрицами (2) получим матрицы $v_{tx} = [u_{tx}u]/4$, $v_{ty} = [u_{ty}u]/4$, $v_{tz} = [u_{tz}u]/4$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

задающие ортогональные повороты в плоскостях tx, ty, tz. Остальные матрицы общей линейной группы выражаются линейно через матрицу u с помощью коммутаций матриц (5) и (2)

$$u_{xx-yy} = \frac{[v_{tx}u_{tx}] - [v_{ty}u_{ty}]}{2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$u_{yy-zz} = \frac{[v_{ty}u_{ty}] - [v_{tz}u_{tz}]}{2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$u_{xy} = \frac{[u_{xx-yy}, v_{xy}]}{2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

$$u_{yz} = \frac{[u_{yy-zz}, v_{yz}]}{2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$u_{zx} = \frac{[u_{xx-zz}, v_{xz}]}{2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

и представляют сдвиговые деформации пространства.

2. Представления группы вращений трехмерного пространства задаются законом преобразования компонент спиноров при малом повороте $\delta f_{k\nu} = i(\delta\boldsymbol{\theta L})f_{k\nu}$, где матрицы $\boldsymbol{L}$ определяются формулами (см. [1, 2])[1)]

$$\begin{aligned} L_+ f_{k\nu} &= \alpha_{k,\nu+1} f_{k,\nu+1}, \\ L_- f_{k\nu} &= \alpha_{k\nu} f_{k,\nu-1}, \\ L_z f_{k\nu} &= \nu f_{k\nu}, \end{aligned} \tag{7}$$

здесь $L_\pm = L_x \pm iL_y$, $\alpha_{k\nu} = \sqrt{k+\nu}\sqrt{k-\nu+1}$. Для векторного представления имеем $\boldsymbol{L} = i\boldsymbol{A}$.

3. Представления группы Лоренца определяются парой чисел (s, c). Число s неотрицательное, целое или полуцелое, задает минимальный спин, участвующий в представлении. Число c - произвольное комплексное число. Матрицы представлений группы Лоренца задаются формулами (см. [1, 2])

$$\begin{aligned} F_+ f_{k\nu} = &\sqrt{k-\nu}\sqrt{k-\nu-1}g_k f_{k-1,\nu+1} - \\ &- \frac{sc}{k(k+1)}\sqrt{k-\nu}\sqrt{k+\nu+1}f_{k,\nu+1} + \\ &+ \sqrt{k+\nu+1}\sqrt{k+\nu+2}g_{k+1}f_{k+1,\nu+1}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} F_- f_{k\nu} = &-\sqrt{k+\nu}\sqrt{k+\nu-1}g_k f_{k-1,\nu-1} - \\ &- \frac{sc}{k(k+1)}\sqrt{k+\nu}\sqrt{k-\nu+1}f_{k,\nu-1} - \\ &- \sqrt{k-\nu+1}\sqrt{k-\nu+2}g_{k+1}f_{k+1,\nu-1}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} F f_{k\nu} = &\sqrt{k^2-\nu^2}g_k f_{k-1,\nu} - \frac{sc\nu}{k(k+1)}f_{k\nu} - \\ &- \sqrt{(k+1)^2-\nu^2}g_{k+1}f_{k+1,\nu}, \end{aligned} \tag{10}$$

где $F = u_{tz}$, $F_\pm = u_{tx} \pm iu_{ty}$ и

$$g_k = \frac{\sqrt{k^2-s^2}\sqrt{k^2-c^2}}{k\sqrt{4k^2-1}}. \tag{11}$$

Если $c = \pm(s+n)$, где n – натуральное число, представление группы Лоренца конечномерно и содержит спиноры от $k = s$ до $k = s+n-1$.

4. Масштабное преобразование пространства-времени (матрица (3)) коммутирует со всеми остальными преобразованиями, поэтому функции любого представления общей линейной группы являются собственными функциями оператора масштабного преобразования с одним и тем же собственным числом μ.

У тензора число μ, очевидно, равно рангу тензора. Однако, существуют представления, которые при всех преобразованиях, за исключением масштабного, ведут себя как тензоры, а масштабное преобразование характеризуются некоторым комплексным числом μ.

5. Представления группы GL(4,R). Для решения задачи, очевидно, достаточно определить лишь вид матрицы u. Обозначим функции, преобразующиеся по искомому представлению, $f_{nsck\nu}$. Поскольку заранее не известна кратность представления, то помимо чисел характеризующих функции представлений группы Лоренца введен дополнительный индекс n нумерующий функции, преобразующиеся по эквивалентным представлениям группы Лоренца. В связи с тем, что эта матрица коммутирует с матрицами пространственных вращений, ее действие должно быть следующим: $uf_{pk\nu} = \sum_{p'} u_{pk}^{p'} f_{p'k\nu}$, где p обозначает совокупность индексов n, s, c.

Всего в рассматриваемой общей линейной группе $GL(4,R)$ после выделения единичной матрицы масштабного преобразования (3) имеется $15*14/2 = 105$ коммутационных соотношений. Из них $6*5/2 = 15$ использованы при нахождении представлений группы Лоренца, 3 удовлетворяются тривиально в силу выбора матрицы u, 8 задействованы для определения матриц (5-6). Оставшиеся 79 приводят к уравнениям для матричных элементов оператора u. Из них $9*8/2 = 36$ квадратичны по u, а 43 – линейны.

В таком виде задача слишком громоздка. Поэтому поступим следующим прагматичным образом. Выберем три коммутационных соотношения, два линей-

[1)]Если число k произвольное комплексное число, то проекция "спина" ν будет пробегать бесконечный набор значений $\nu_0 + n$, где ν_0 - также произвольное комплексное число, n – целые числа. Такие бесконечномерные представления группы вращений вряд ли найдут применение в физике.

ных по u и одно квадратичное, представляющихся максимально простыми, но приводящих к конструктивным уравнениям. Выпишем и проанализируем линейные уравнения, из которых выясним зависимость матрицы u от спина k. Потом проанализируем квадратичные уравнения для определения зависимости от индексов p. При этом, по построению, не будет пропущено ни одно решение. Доказательство того обстоятельства, что все полученные решения удовлетворяют остальным коммутационным соотношениям придется оставить за рамками этой работы. Используемый нами метод [2] приводит к слишком громоздким выкладкам и необходим поиск иных средств.

Единственное нетривиальное коммутационное соотношение, квадратичное по операторам группы Лоренца и линейное по u, которое не задействовано для определения операторов (6), есть

$$[u_{tx}v_{tx}] + [u_{ty}v_{ty}] + [u_{tz}v_{tz}] = 2u \tag{12}$$

или, в эквивалентной форме,

$$u(F_+F_- + F_-F_+ + 2F^2) + (F_+F_- + F_-F_+ + 2F^2)u- \\ - 2F_+uF_- - 2F_-uF_+ - 4FuF - 16u = 0.$$

Его матричные элементы $k \to k \pm 2, k \pm 1$ равны нулю автоматически, а требование равенства нулю элементов $k \to k$ приводит к уравнению

$$\begin{aligned} &2(k+1)(2k+3)g_{k+1}g'_{k+1}u_{k+1}- \\ &-\{(k+1)(2k+3)(g^2_{k+1}+g'^2_{k+1})+ \\ &+k(2k-1)(g^2_k+g'^2_k) - \frac{(s'c'-sc)^2}{k(k+1)} + 8\}u_k+ \\ &+2k(2k-1)g_kg'_ku_{k-1}=0, \end{aligned} \tag{13}$$

здесь и ниже выписываем только меняющиеся в уравнении индексы.

Вместо прямого решения уравнения (13) удобно предварительно рассмотреть некоторые матричные элементы другого коммутационного соотношения, тоже линейного по u, но кубического по оператору группы Лоренца F

$$[F[F[Fu]]] = 4[Fu]\text{или} \tag{14}$$

$$F^3u - 3F^2uF + 3FuF^2 - uF^3 + 4uF - 4Fu = 0.$$

Отсюда для матричных элементов преобразования находим $(s, c, k) \to (s', c', k+3)$

$$\begin{aligned} g'_{k+1}g'_{k+2}g'_{k+3}u_k - 3g_{k+1}g'_{k+2}g'_{k+3}u_{k+1}+ \\ +3g_{k+1}g_{k+2}g'_{k+3}u_{k+2} - g_{k+1}g_{k+2}g_{k+3}u_{k+3} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Это разностное уравнение имеет общее решение

$$u_k = w_k \prod_{s_m+1}^{k} \frac{g'_q}{g_q}, \tag{16}$$

где $s_m = max(s, s')$ и $w_k = ak^2 + bk + d$.

Аналогично, для матричных элементов $(s, c, k+3) \to (s', c', k)$ имеем уравнение

$$\begin{aligned} g'_{k+1}g'_{k+2}g'_{k+3}u_{k+3} - 3g'_{k+1}g'_{k+2}g_{k+3}u_{k+2}+ \\ +3g'_{k+1}g_{k+2}g_{k+3}u_{k+1} - g_{k+1}g_{k+2}g_{k+3}u_k = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Откуда для решения находим другой вид

$$u_k = (\tilde{a}k^2 + \tilde{b}k + \tilde{d}) \prod_{s_m+1}^{k} \frac{g_q}{g'_q}. \tag{18}$$

Для совпадения выражений (16) и (18) необходимо чтобы при всех значениях k выполнялось равенство

$$P = \prod_{s_m+1}^{k} \left(\frac{g'_q}{g_q}\right)^2 = \frac{\tilde{a}k^2 + \tilde{b}k + \tilde{d}}{ak^2 + bk + d}, \tag{19}$$

где a, b, d и $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{d}$ есть матричные элементы с одинаковыми индексами.

Заметим, что если $s' \neq s, s \pm 1$, то уравнения (15,17) формируют и граничные условия в окрестности $k = s_m$ (а также для конечномерных представлений при $c' \neq c, c \pm 1$ в окрестности максимальных спинов). При $k < s_m$ следует положить $u_k = 0$, поскольку здесь имеются спиноры только у одного из представлений. Это обстоятельство приводит к тому, что представления группы Лоренца не могут участвовать в одном представлении общей линейной группы, если их параметры s и s' отличаются более чем на 2. Аналогично, конечномерные представления не могут быть связаны друг с другом, если их параметры c и c' отличаются более чем на 2, а также они не могут быть связаны с бесконечномерными представлениями.

Функция $P = P_s^{s'} P_c^{c'}$, где

$$P_s^{s'} = \prod_{s_m+1}^{k} \frac{q^2 - s'^2}{q^2 - s^2}\ ,\ P_c^{c'} = \prod_{s_m+1}^{k} \frac{q^2 - c'^2}{q^2 - c^2}. \tag{20}$$

При $s' = s : P_s^s = 1$. В остальных случаях

$$P_s^{s\pm1} \propto \frac{k\pm s+1}{k\mp s};\ P_s^{s\pm2} \propto \frac{(k\pm s+2)(k\pm s+1)}{(k\mp s)(k\mp s-1)}, \tag{21}$$

Функция $P_c^{c'}$ отличается от $P_s^{s'}$ лишь заменой параметров $s, s' \to c, c'$. Поскольку на параметр c не наложено условие неотрицательности, то, помимо случаев $c' = c, c \pm 1, \pm 2$, следует учесть переходы $c' = -c$, при этом $P_c^{-c} = 1$, а также

$$P_c^{-c\pm 1} \propto \frac{k \mp c + 1}{k \pm c}; \; P_c^{-c\pm 2} \propto \frac{(k \mp c + 2)(k \mp c + 1)}{(k \pm c)(k \pm c - 1)}. \quad (22)$$

Иные значения c' уравнение (19) не допускает, так как тогда в функции $P_c^{c'}$ присутствуют избыточные множители, зависящие от переменной k.

Зная функции $P_s^{s'}$ и $P_c^{c'}$ легко найти вид всех решений системы уравнений (15,17):

$$\begin{aligned}
w_{sck}^{s+2,\pm c} &= a\left\{k^2 - (2s+1)k + s(s+1)\right\}, \\
w_{sc}^{s,\pm c \pm 2} &= a\left\{k^2 - (2c+1)k + c(c+1)\right\}, \\
w_{sck}^{s+1,\pm c \pm 1} &= a\left\{k^2 - (c+s)k + sc\right\}, \\
w_{sck}^{s+1,\pm c \mp 1} &= a\left\{k^2 + (c-s)k - cs\right\}, \\
w_{sck}^{s,\pm c} &= ak^2 + bk + d, \\
w_{sck}^{s+1,\pm c} &= ak^2 + (h - sa)k - hs, \\
w_{sck}^{s,\pm c \pm 1} &= ak^2 + (h - ca)k - hc.
\end{aligned} \quad (23)$$

Такую же зависимость от k имеют и обратные преобразования $(s', c') \to (s, c)$.

Из соотношения (14) для матричных элементов преобразования $(csk) \to (c's', k+2)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{sc}{k(k+3)} - \frac{s'c'}{(k+2)(k+3)}\right) w_{k+2} + \\
&+ \left(\frac{2s'c'}{(k+1)(k+3)} - \frac{2sc}{k(k+2)}\right) w_{k+1} + \\
&+ \left(\frac{sc}{k(k+1)} - \frac{s'c'}{k(k+3)}\right) w_k = 0.
\end{aligned} \quad (24)$$

Подставив сюда решение (16) и разлагая полученное выражение на множители найдем

$$sc(a - b) + (sc - s'c')d = 0. \quad (25)$$

Теперь возвращаемся к уравнению (13). Подставив в него решение (16), заметим, что благодаря условию (25) устраняются "полюсы" k^{-1} и $(k+1)^{-1}$. В результате, после выделения множителя $(2k+1)^{-1}\prod(g'_q/g_q)$ и приведения подобных, получим полином второй степени по k. Условиями обращения в нуль коэффициентов этого полинома являются следующие уравнения

$$\begin{aligned}
&[s'^2 + c'^2 - s^2 - c^2 - 2]a + 2b = 0, \\
&2[3s'^2 + 3c'^2 + s^2 + c^2 - (s'c' - sc)^2 - 5]a + \\
&+ [2 + 3(s'^2 + c'^2 - s^2 - c^2)]b + 16d = 0, \\
&2[2s^2c^2 - s'^2c'^2 - s'c'sc + s'^2 + c'^2 - 1]a + \\
&+ 2[s'^2 + c'^2 - (s'c' - sc)^2 - 1]b + \\
&+ [s'^2 + c'^2 - s^2 - c^2 + 8]d = 0.
\end{aligned} \quad (26)$$

Анализируя уравнения (25,26), находим, что возможны только переходы $(s, c) \to (s, c)$, $(s \pm 2, c)$, $(s, c \pm 2)$, $(s \pm 1, c \pm 1)$, $(s \pm 1, c \mp 1)$. При этом, для переходов $(s, c) \to (s, c)$, получим[2)]

$$w_k = a\left(k^2 + k + \frac{1 - s^2 - c^2}{2}\right). \quad (27)$$

При некоторых значениях s имеются дополнительные возможности $(1, c) \to (1, -c)$, $(1/2, c) \leftrightarrow (1/2, -c \pm 1)$.

Отдельного рассмотрения требуют преобразования "коротких" представлений группы Лоренца $(s, s+n)$, когда $0 < n \le 5$, поскольку в этих случаях могут отсутствовать некоторые из уравнений (15,17,24) при некоторых значениях k. Несложный анализ остающихся уравнений совместно с уравнением (13) показывает, что формулы (23) верны и для коротких представлений, а новых решений не возникает.

Соотношения (14) для матричных элементов преобразования $(csk) \to (c's', k)$ имеют вид

$$p_k \nu + q_k \nu^3 = 0. \quad (28)$$

При $k = 0$ ограничений не возникает, поскольку $\nu = 0$. При $\nu = k \neq 0$ имеем $p_k + q_k k^2 = 0$:

$$\begin{aligned}
&12(k+1)(2k+1){g'}^2_{k+1}(sc - s'c')w_{k+1} + \\
&+(k+2)\left(\frac{(sc - s'c')^3}{k^2(k+1)^2} + 4(s'c' - sc)\right) w_k + \\
&+(2k+1)g^2_{k+1}[3(s'c' - sc)k - 4sc + 6s'c']w_k + \\
&+(2k+1){g'}^2_{k+1}[3(s'c' - sc)k - 6sc + 4s'c']w_k = 0.
\end{aligned} \quad (29)$$

При $k > 1$ для выполнения уравнения (28) при всех возможных значениях ν необходимо чтобы $p_k = q_k = 0$.

[2)] Заметим, что для представлений $(0, 1), (1, \pm 2)$ эта диагональная часть матрицы u равна нулю.

Удобно представить эти два уравнения как систему уравнений (29) и $p_k+q_k(k+1)^2=0$:

$$\begin{gathered}12(k+1)(2k-1){g'}^2_{k-1}(s'c'-sc)w_{k-1}+\\+(k-1)\left(\frac{(sc-s'c')^3}{k^2(k+1)^2}+4(s'c'-sc)\right)w_k-\\-(2k-1)g_k^2[3(s'c'-sc)k+sc-3s'c']w_k-\\-(2k-1){g'}^2_k[3(s'c'-sc)k+3sc-s'c']w_k=0.\end{gathered}\tag{30}$$

Уравнения (29,30) выполняются лишь для весьма ограниченного списка переходов[3]: $(0,c)\to(0,c),(0,c\pm2)$, $(s,0)\to(s,0),(s\pm2,0)$, $(1,2)\rightleftarrows(1,-2)$.

Таким образом, анализ линейных по u коммутационных соотношений приводит к следующей зависимости от k для матричных элементов u-преобразований:

$$\begin{aligned}&u^{s,0}_{s,0}\left(k^2+k+\frac{1-s^2}{2}\right),\\&u^{s\pm2,0}_{s,0}\sqrt{k\pm s+2}\sqrt{k\pm s+1}\sqrt{k\mp s}\sqrt{k\mp s-1},\\&u^{0,c}_{0,c}\left(k^2+k+\frac{1-c^2}{2}\right),\\&u^{0,c\pm2}_{0,c}\sqrt{k\pm c+2}\sqrt{k\pm c+1}\sqrt{k\mp c}\sqrt{k\mp c-1}.\end{aligned}\tag{31}$$

Амплитуды $u^{sc}_{s'c'}$ определятся из квадратичных по u коммутационных соотношений. Простейшее такое соотношение есть

$$[u[uu_t{}^z]]=u_t{}^zu^2-2uu_t{}^zu+u^2u_t{}^z=16u_t{}^z.\tag{32}$$

Его матричные элементы $sck{\to}s''c''k$ есть

$$\nu\sum_{p'}(cs-2c's'+c''s'')u^{p''}_{p'k}u^{p'}_{pk}=16cs\delta^{n'}_n\delta^{c'}_c\delta^{s'}_s\,\nu.\tag{33}$$

Отсюда для переходов $(1,2)\rightleftarrows(1,-2)$ при надлежащем выборе базиса находим $u^{1,-2}_{1,2}=u^{1,2}_{1,-2}=1$. Для остальных переходов это уравнение выполнено тривиально.

Для матричных элементов $csk{\to}c''s'',k+1$ имеем

$$\begin{gathered}\sum_{p'}\{u^{p''}_{p',k+1}u^{p'}_{p,k+1}g_{k+1}-2u^{p''}_{p',k+1}u^{p'}_{pk}g'_{k+1}+\\+u^{p''}_{p'k}u^{p'}_{pk}g''_{k+1}\}=16g_{k+1}\delta^{n'}_n\delta^{c'}_c\delta^{s'}_s.\end{gathered}\tag{34}$$

[3] Отметим, что соотношения (14) для матричных элементов преобразования $(csk)\to(c's',k\pm1)$ приводят к двум еще более громоздким уравнениям, которые, однако, не дают дополнительных ограничений.

Заметим, что эти уравнения имеют, очевидно, решения, эквивалентные тензорам произвольного ранга, законы преобразования которых известны. Так, скаляр группы Лоренца, представление $(0,1)$, может остаться скаляром и относительно группы GL(4,R), при этом $u=0$. Вектор группы Лоренца A^i, представление $(0,2)$, может остаться вектором группы GL(4,R). Для всех остальных представлений группы Лоренца матрица u обязательно имеет недиагональные элементы. Так, антисимметричный тензор электромагнитного поля F^{ik} разлагается на две части $\pm\mathbf{E}+i\mathbf{B}$, преобразующиеся по разным представлениям группы Лоренца $(1,\pm2)$. Симметричный тензор группы GL(4,R) A^{ik} состоит из двух частей, преобразующихся по различным представлениям группы Лоренца. Комбинация его компонент $A^{tt}-A^{xx}-A^{yy}-A^{zz}$ является скаляром (0,1), а совокупность комбинаций $A^{xx}-A^{yy}\pm i(A^{xy}+A^{yx})$, $A^{zx}+A^{xz}\pm i(A^{zy}+A^{yz})$, $A^{xx}+A^{yy}-2A^{zz}$ $A^{tx}+A^{xt}\pm i(A^{ty}+A^{yt})$, $A^{tz}+A^{zt}$, $3A^{tt}-A^{xx}-A^{yy}-A^{zz}$, преобразуются по представлению, эквивалентному представлению группы Лоренца (0,3). Вообще, нетрудно убедиться, что u-оператор для симметричных тензоров произвольного ранга имеет лишь матричные элементы $(0,n)\rightleftarrows(0,n),(0,n\pm2)$. Найдем все решения системы уравнений (34)[4] при таком ограничении на матрицу u.

Согласно (31) действие оператора u на скалярную функцию есть $uf_{0,1,0,0}=2\sqrt{3}u^{0,3}_{0,1}f_{0,3,0,0}$, и уравнения (33,34) для переходов $(0,1)\leftrightarrows(0,3)$ выполняются тривиально, не накладывая никаких ограничений. Поэтому, если $u^{0,3}_{0,1}=0$, то представление остается скалярным и относительно группы GL(4,R). Если же $u^{0,3}_{0,1}{\neq}0$, то уравнения (34) для перехода $(0,3)\to(0,3)$ есть

$$\begin{aligned}3u^3_1u^1_3+u^3_3u^3_3-195u^3_5u^5_3&=4,\ (k=0),\\u^3_3u^3_3-20u^3_5u^5_3&=1,\ (k=1).\end{aligned}\tag{35}$$

Если $u^5_3=0$, то $u^3_1u^1_3=u^3_3u^3_3=1$. Поскольку детерминант матрицы u^3_1 отличен от нуля, то базис можно выбрать так, что $u^3_1=1$, тогда и $u^1_3=1$. Нетрудно убедиться, что оставшейся после этого свободы достаточно для приведения u^3_3 к диагональному виду. Тогда, в силу условия $(u^3_3)^2=1$, на диагонали этой матрицы могут стоять либо $+1$, либо -1, что означает наличие двух представлений $u^3_3\pm1$ с кратностью равной единице.

В случае $u^3_3=1$ имеем: $uf_{0,1,0,0}=2\sqrt{3}f_{0,3,0,0}$, $uf_{0,3,0,0}=2\sqrt{3}f_{0,1,0,0}-4f_{0,3,0,0}$, $uf_{0,3,1,\nu}=-2f_{0,3,1,\nu}$,

[4] Уравнения (33) для цепочки (0,n) удовлетворены тривиально.

$uf_{0,3,2,\nu} = 2f_{0,3,2,\nu}$. Это представление, как нетрудно убедиться, эквивалентно симметричному тензору второго ранга A^{ik}.

Для выполнения соотношений (34) при $n > 3$ и всех допустимых значениях k необходимо удовлетворение четырех разностных (по переменной n) уравнений

$$(n+3)u_{n+2}^{n+2}u_n^{n+2} - (n-1)u_n^{n+2}u_n^n = 0, \qquad (36)$$

$$(n-3)u_{n-2}^{n-2}u_n^{n-2} - (n+1)u_n^{n-2}u_n^n = 0, \qquad (37)$$

$$(n+2)u_{n+2}^n u_n^{n+2} - (n-2)u_{n-2}^n u_n^{n-2} + u_n^n u_n^n = 0, \qquad (38)$$

$$\begin{gathered}(n-2)(n-1)^2 u_{n-2}^n u_n^{n-2} - \\ -(n+2)(n+1)^2 u_{n+2}^n u_n^{n+2} = 4.\end{gathered} \qquad (39)$$

Введем новую величину $\tilde{u}_n^n = u_n^n(n^2-1)$, при $n \geq 3$. Тогда уравнения (36,37) принимают вид

$$\begin{gathered}\tilde{u}_{n+2}^{n+2}u_n^{n+2} - u_n^{n+2}\tilde{u}_n^n = 0, \\ \tilde{u}_{n-2}^{n-2}u_n^{n-2} - u_n^{n-2}\tilde{u}_n^n = 0.\end{gathered} \qquad (40)$$

Нетрудно убедиться, как и при решении системы (35), что здесь возможна лишь кратность единица. Пользуясь свободой в выборе базисных функций $f_{nk\nu}$ (замена $f_{nk\nu} \to \lambda_n f_{nk\nu}$) можно добиться выполнения равенства $u_n^{n+2} = u_{n+2}^n$, и из уравнений (36-39) найдем

$$u_{0,n}^{0,n} = \frac{2\alpha}{n^2-1},\ u_{0,n}^{0,n+2} = \frac{\sqrt{\alpha^2-(n+1)^2}}{(n+1)\sqrt{n(n+2)}}. \qquad (41)$$

где α – некоторое комплексное число. Если α равно натуральному четному числу n^*, то цепочка разрывается $u_{n^*-1}^{n^*+1} = u_{n^*+1}^{n^*-1} = 0$. При этом формулы (41) при $n < n^*$ задают представление эквивалентное тензору ранга n^*-1, а при $n > n^*$ – бесконечномерное представление ("хвост" тензорного представления).

При выводе формул (41) мы обсуждали цепочку нечетных чисел n. Очевидно, однако, что эти формулы верны и для случая четных n, и, более того, формулы

$$u_{0,c}^{0,c} = \frac{2\alpha}{c^2-1},\ u_{0,c}^{0,c+2} = \frac{\sqrt{\alpha^2-(c+1)^2}}{(c+1)\sqrt{c(c+2)}}. \qquad (42)$$

верны для цепочки представлений группы Лоренца вида ... $(0,c-2),(0,c),(0,c+2)$, ... где c – произвольное комплексное число.

В силу формальной инвариантности всех обсуждаемых уравнений относительно замены $s \rightleftarrows c$, существуют и представления группы GL(4,R), в которых "сцеплены" лишь представления группы Лоренца $(s,0)$[5]:

$$u_{s,0}^{s,0} = \frac{2\alpha}{s^2-1},\ u_{s,0}^{s+2,0} = \frac{\sqrt{\alpha^2-(s+1)^2}}{(s+1)\sqrt{s(s+2)}}. \qquad (43)$$

При полуцелых s параметр α может быть любым комплексным числом. При целых же s необходимо устранить особенности в формулах (43) при $s = 0,1$. При нечетных s допустимы лишь значения $\alpha = 0, \pm2, \pm4, ...$ и $s \geq |\alpha|$. При четных s параметр α может быть любым нечетным числом $\pm1, \pm3, \dots$. Если $\alpha = \pm1$, то в представлении участвует вся цепочка $s = 0,2,4,\dots$. Если $|\alpha| > 1$, то цепочка оборвана и $s \geq |\alpha|$.

Если параметр масштабного преобразования μ мнимый (или равен нулю), то все преобразования группы GL(4,R) сохраняют неизменной положительно определенную форму $\sum f_{sk\nu}^* f_{sk\nu}$ (т.е. представление является унитарным) в следующих случаях (43): 1) $\alpha = 0$, спины произвольны, 2) α мнимое, спины полуцелые.

По мнению автора, то обстоятельство, что лишь часть представлений группы Лоренца оказались востребованы в группе $GL(4,R)$, не может считаться удовлетворительным.

---

1. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, Москва, ФМЛ (1958)
2. М.А. Наймарк, Линейные представления группы Лоренца, Москва, ФМЛ (1958)
3. В.И. Марченко, Письма в ЖЭТФ **64**, 309 (1996)

[5] Результат (42,43), сформулированный в терминах матриц $v_{tz} = [u_{tz}u]/4$, был приведен без вывода в работе [3].