

538.22

**СИММЕТРИЯ И МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА  
МАГНЕТИКОВ***А. Ф. Андреев, В. И. Марченко*

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	39
2. Обменная симметрия кристаллов . . . . .	41
3. Симметрия неупорядоченных магнетиков . . . . .	48
4. Коллинеарные структуры . . . . .	50
5. Спиновое стекло . . . . .	53
6. Неколлинеарные и неупорядоченные антиферромагнетики . . . . .	57
7. Неколлинеарные ферримагнетики и неупорядоченный ферромагнетик . . . . .	60
Цитированная литература . . . . .	62

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Известные в настоящее время магнетики характеризуются большим разнообразием магнитных структур, но лишь для ферромагнетиков обычно используемый теоретический подход является удовлетворительным. В этом простейшем случае микроскопическая задача о структуре основного состояния и спектре возбуждений может быть точно решена <sup>1,2</sup>. С другой стороны, макроскопические свойства ферромагнетиков последовательно описываются уравнением Ландау и Лифшица <sup>3</sup>.

Во всех более сложных случаях микроскопическая задача может быть решена лишь для больших (классических) спинов, каковыми они обычно не являются. В такой ситуации особенно важной становится феноменологическая теория типа теории Ландау и Лифшица. Обычно используемая феноменологическая теория <sup>4,5</sup> приводит в ряде случаев к правильным результатам, однако эта теория является модельной. Сложные магнитные структуры рассматриваются в ней как совокупность некоторого числа вставленных друг в друга взаимодействующих ферромагнетиков, каждый из которых описывается уравнением Ландау и Лифшица. Для этого, вообще говоря, нет оснований. В последнее время была разработана феноменологическая теория, основанная лишь на общих соображениях симметрии и не использующая никаких модельных представлений о состоянии магнетика, т. е. столь же общая теория, как, например, гидродинамика или теория упругости. Теория применима к любым магнетикам, в которых возникновение магнитной структуры является результатом действия обменных сил, значительно превосходящих релятивистские взаимодействия, причем с равным успехом как к кристаллическим, так и к неупорядоченным магнетикам. Настоящая работа посвящена последовательному изложению этой теории.

Решение поставленной задачи включает в себя вопрос о классификации магнитных структур. Обычно используется классификация, основан-

ная на введении магнитных моментов подрешеток или магнитных векторов, являющихся их линейными комбинациями. Такое описание, хотя и использует модельное представление о локализованных спинах, дает наглядное и полное описание структуры, достаточное для выяснения макроскопической динамики магнетика и, в частности, его поведения в не слишком сильном (малом по сравнению с обменными полями) магнитном поле. Однако если иметь в виду именно эту последнюю задачу, то описание с помощью моментов подрешеток является в большинстве случаев избыточным. Число подрешеток может быть как угодно велико или вообще бесконечно. Между тем, как мы увидим, каждая структура может быть охарактеризована не более чем тремя, причем взаимно перпендикулярными, магнитными векторами<sup>6</sup>, задание которых достаточно для написания макроскопических динамических уравнений. Такие магнитные векторы во многом аналогичны рассматривавшимся Дзялошинским<sup>7</sup> спиновым плотностям. Их введение не использует представления о локализованных спинах и основано на исследовании симметрии магнетика. В отличие от спиновых плотностей, которые определяют изменение симметрии, возникающее при фазовом переходе II рода из парамагнитного состояния, вводимые нами магнитные векторы определяют симметрию обменных сил магнетика как такового без каких-либо предположений о характере и числе фазовых переходов, отделяющих рассматриваемое состояние от парамагнитного.

Макроскопические динамические свойства, т. е. свойства во временных и пространственных масштабах, значительно превосходящих соответственно обратные обменные частоты и межатомное расстояние, могут быть описаны на основе следующего общего свойства состояний, обладающих магнитной обменной структурой. Возникновение таких состояний всегда сопровождается явлением спонтанного нарушения симметрии обменных взаимодействий — гамильтониан обменных взаимодействий инвариантен относительно любого поворота всех спинов на одинаковый угол, но никакая магнитная структура не является инвариантной относительно всех таких поворотов. Всегда существуют повороты, которые переводят равновесное состояние тела в другое состояние. Если углы поворота одинаковы для спинов, находящихся в разных пространственных точках, то полученное состояние столь же равновесно, как и исходное. Если углы поворота являются медленно меняющимися функциями координат, то в системе появляется слабая нестационарность. Вместе с малыми пространственными производными углов поворота появляются малые же временные производные. Только те степени свободы магнетика, которые локально сводятся к некоторым поворотам структуры и описываются медленно меняющимися в пространстве и во времени углами поворотов, являются существенными в макроскопическом описании. Такое описание вполне аналогично теории упругости. Роль компонент вектора смещения среды играют углы поворота спинов, роль скорости и деформации — соответственно временные и пространственные производные углов поворота. В отличие от пространственных смещений, различные повороты, вообще говоря, не коммутируют между собой. Поэтому уравнения магнитной динамики отличаются от теории упругости тем, что они нелинейны даже при малых скоростях и деформациях.

Изложенные соображения о явлении спонтанного нарушения симметрии в магнетиках как физической причине появления низкочастотных колебаний (голдстоуновских бозонов) и о связи некоммутативности группы симметрии с нелинейностью уравнений хорошо известны и обсуждались многими авторами<sup>8-18</sup>. Описание динамики спинов с помощью углов поворота использовалось при исследовании свойств различных магне-

тиков<sup>15-18</sup> и магнитных свойств сверхтекучих фаз  $^3\text{He}$ <sup>13, 14</sup>. Особо отметим работы Гальперина и Хоэнберга<sup>15</sup> и Гальперина и Саслова<sup>16</sup>.

В первой части данной статьи вводится понятие обменной симметрии магнетиков и на его основе проводится классификация возможных типов магнитных структур в кристаллических и неупорядоченных системах. Затем для всех существенно различных случаев дается вывод нелинейных динамических уравнений с учетом магнитного поля и релятивистских взаимодействий. Приводятся выражения для частот магнитного резонанса и спектра спиновых волн. Отметим уже здесь, что используемый феноменологический подход позволяет весьма просто получить некоторые общие результаты, которые в микроскопической теории были получены лишь при весьма жестких ограничениях. Например, во всех (диэлектрических) коллинеарных чисто обменных магнетиках продольная магнитная восприимчивость при нуле температуры обращается в нуль. В гейзенберговской модели антиферромагнетика это утверждение было доказано лишь в пределе бесконечного спина путем разложения по его обратным степеням, что во всяком случае не может исключить экспоненциально малую восприимчивость.

## 2. ОБМЕННАЯ СИММЕТРИЯ КРИСТАЛЛОВ

Характерным свойством магнетиков является существование в них наряду со скалярной плотностью заряда  $\rho(\mathbf{r})$  отличной от нуля микроскопической плотности магнитного момента  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ . Свойства симметрии такой системы характеризуются<sup>(19, § 28)</sup> заданием одной из 1651 магнитных пространственных групп. Эти группы содержат в качестве своих элементов чисто пространственные преобразования (повороты, отражения, трансляции) в комбинациях с преобразованием  $R$  отражения времени, относительно которых величины  $\rho(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  инвариантны. По заданной магнитной группе легко определить чисто пространственную симметрию системы, если в элементах магнитной группы формально отождествить преобразование  $R$  с единичным преобразованием. Возникающая в результате одна из 230 пространственных групп содержит все преобразования, относительно которых плотность заряда и вообще все величины, не меняющиеся при отражении времени, остаются инвариантными.

Такая характеристика симметрии тела является точной, но именно по этой причине в ней полностью теряются существенные приближенные свойства симметрии. Дело в том, что в свойствах большинства магнетиков основную роль играют обменные силы, симметрия которых выше, чем симметрия слабых релятивистских взаимодействий. Указать только точную симметрию — это значит полностью потерять информацию о более высокой симметрии обменных сил.

Пренебрежем всеми релятивистскими взаимодействиями и рассмотрим обменную симметрию магнетика. Поскольку обменные силы зависят лишь от относительных ориентаций спинов, в данном случае, кроме преобразования  $R$ , появляется бесконечная совокупность новых преобразований симметрии, состоящая из всех вращений  $U$  спинового пространства, т. е. вращений всех спинов на один и тот же угол. В такой ситуации общая ориентация спинов относительно кристаллографических осей становится условной, и можно считать, что компоненты магнитного момента  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  при всех чисто пространственных преобразованиях ведут себя, как скаляры, и являются компонентами вектора в спиновом пространстве, т. е. они преобразуются как компоненты вектора лишь при вращении спинового пространства. Преобразование  $R$  играет роль инверсии спинового пространства. Обменная симметрия определяется<sup>6</sup> заданием одной из обмен-

ных пространственных групп, которые содержат все такие комбинации чисто пространственных преобразований, вращений спинового пространства  $U$  и преобразования  $R$ , относительно которых величины  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  инвариантны. Если в элементах обменной группы формально отождествить преобразования  $U$  и  $R$  с единичным преобразованием, то получится некоторая обычная пространственная группа  $G$ . Это есть группа симметрии плотности заряда и вообще всех спиновых скаляров в системе. Величины же  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  относительно нее, вообще говоря, не инвариантны.

Различные обобщения магнитных групп путем включения в совокупность преобразований наряду с элементом  $R$  произвольных спиновых вращений проводились рядом авторов<sup>20-24</sup>. Классификация подобных «цветных» или «спиновых» групп рассматривалась, однако, без связи с обменным приближением. Речь шла поэтому не о приближенной, а о некоторой точной случайной симметрии, существование которой может быть обусловлено (см. <sup>22</sup>) специальными свойствами гамильтониана даже при наличии релятивистских взаимодействий.

Для физических применений вместо формальной классификации обменных пространственных групп удобно поступить следующим образом. Как всякую функцию координат, каждую из компонент магнитного момента  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  можно представить в виде суммы функций, преобразующихся по неприводимым представлениям введенной выше чисто пространственной группы  $G$ . Поскольку эти функции для трех различных компонент момента, вообще говоря, различны, разложение в общем случае можно записать в виде

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \sum_{a\alpha} \mathbf{M}_{n\alpha}^{(a)} \varphi_{n\alpha}^{(a)}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где функции  $\varphi_{n\alpha}^{(a)}(\mathbf{r})$  с данным  $a$  преобразуются по  $n$ -му неприводимому представлению группы  $G$ , индекс  $\alpha$  нумерует функции, принадлежащие данному представлению. Для каждого представления в формуле (1) возникает, вообще говоря, три набора линейно независимых функций, нумеруемых индексом  $a = 1, 2, 3$ . Симметрия магнитной структуры полностью определяется заданием пространственной группы  $G$  и магнитных векторов  $\mathbf{M}_{n\alpha}^{(a)}$ . Они преобразуются как спиновые векторы при спиновых вращениях, меняют знак при  $R$ -преобразовании, и можно считать, что они ( $a$  не функции  $\varphi$ ) преобразуются по  $n$ -му неприводимому представлению группы  $G$ . Величины  $\mathbf{M}_{n\alpha}^{(a)}$  аналогичны рассматривавшимся Дзялошинским<sup>7</sup> спиновым плотностям. Подчеркнем, однако, что в<sup>7</sup> производилось разложение по представлениям группы симметрии парамагнитной фазы, которая отличается, вообще говоря, от пространственной группы  $G$ .

Магнитные векторы  $\mathbf{M}_{n\alpha}^{(a)}$  удовлетворяют<sup>6</sup> ряду жестких условий, сильно ограничивающих число различных магнитных структур с заданной пространственной группой  $G$ . Рассмотрим скалярные произведения  $\mathbf{M}_{n\alpha}^{(a)} \mathbf{M}_{m\beta}^{(b)}$ . Они представляют собой спиновые скаляры, поэтому в равновесном состоянии должны быть инвариантны относительно группы  $G$ . С другой стороны, эти величины преобразуются по прямому произведению неприводимых представлений  $n$  и  $m$ . Поскольку в разложении (1) могут участвовать только унитарные представления, представление  $n \times m$  содержит единичное лишь в случае, когда  $n$  эквивалентно представлению  $m$ , комплексно сопряженному  $m$ . Только в этом случае рассматриваемое скалярное произведение может быть отлично от нуля. Более того, в силу унитарности представлений имеем

$$\mathbf{M}_{n\alpha}^{(a)} \mathbf{M}_{m\beta}^{(b)} = c(a, n) \delta_{ab} \delta_{n\bar{m}} \delta_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

где  $c(a, n)$  — некоторые постоянные. Вообще говоря, в формуле (2) вместо  $c(a, n) \delta_{ab}$  может фигурировать более общий набор постоянных  $c(a, b, n)$ . Однако всегда можно так переопределить магнитные векторы (путем надлежащего линейного преобразования одинаково преобразующихся функций  $\varphi_{na}^{(a)}$ ), чтобы привести формулу к виду (2).

Для дальнейшего удобно, как обычно, объединить комплексные представления  $n$  и  $\bar{n}$  в одно физически неприводимое представление и ввести вместо комплексных векторов  $M_{m\beta}^{(a)} = M_{m\beta}^{(a)*}$  вещественные магнитные векторы. Они удовлетворяют соотношениям (2), в которых теперь индексы  $n, m$  нумеруют вещественные физически неприводимые представления, в связи с чем надо считать  $\bar{n} = n$ . Соотношения (2) показывают, что различные векторы перпендикулярны друг другу, причем те из них, которые соответствуют одному многомерному представлению, имеют одинаковую длину. Максимальное число отличных от нуля векторов и максимальная размерность соответствующих представлений равны, следовательно, трем.

Магнитные векторы, преобразующиеся по неединичным представлениям, не дают, очевидно, вклада в полную намагниченность тела, поэтому они являются антиферромагнитными векторами. Если имеется один, два или три вектора, преобразующихся по единичному представлению, то тело обладает ненулевой намагниченностью, причем можно считать (этого можно добиться надлежащим ортогональным преобразованием и нормировкой функций  $\varphi^{(a)}$ ), что один из этих векторов совпадает с намагниченностью (обозначим этот вектор  $M$ ). Остальные векторы единичного представления являются при этом антиферромагнитным.

Отметим также, что постоянные  $c(a, n)$ , соответствующие антиферромагнитным векторам, можно считать равными нулю или единице, т. е. отличные от нуля антиферромагнитные векторы являются единичными, чего всегда можно добиться соответствующей нормировкой функций  $\varphi_{na}^{(a)}$ . Ниже мы будем нумеровать отличные от нуля антиферромагнитные векторы  $I_a$  одним индексом  $a$ , который теперь имеет смысл просто порядкового номера и может принимать значения  $a = 1, 2, 3$ .

Таким образом, возможны всего четыре существенно различных случая: 1) Существует один преобразующийся по единичному представлению магнитный вектор, который совпадает с намагниченностью,  $M$ . Тело является ферромагнетиком или коллинеарным ферриманетиком. Такой ферриманетик в смысле своей симметрии и макроскопической динамики в не слишком сильных магнитных полях неотличим от ферромагнетика. 2) Существует один вектор  $I_1$ , преобразующийся по неединичному (одномерному) представлению. Тело является коллинеарным антиферромагнетиком. 3) Существует вектор  $M$  и еще один перпендикулярный ему антиферромагнитный вектор  $I_1$ , преобразующийся по одномерному (единичному или неединичному) представлению, или два взаимно перпендикулярных и перпендикулярных  $M$  вектора  $I_1$  и  $I_2$ , преобразующиеся по одному либо по разным одномерным представлениям, либо по одному двумерному.

Тело является неколлинеарным ферриманетиком. 4) Существуют два взаимно перпендикулярных вектора  $I_1, I_2$ , преобразующихся по одному либо по разным неединичным одномерным представлениям, либо по одному двумерному, или три взаимно перпендикулярных вектора  $I_1, I_2, I_3$ , преобразующихся по одному, двум либо трем неединичным одномерным представлениям или по одному неединичному одномерному и одному двумерному, или, наконец, по трехмерному представлению. Тело является неколлинеарным антиферромагнетиком.

Представления пространственных групп осуществляются, как известно (<sup>25</sup>, § 134), функциями вида

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $u_{\mathbf{k}}$  — функции, периодические в кристаллической решетке. Нас интересует только одно-, двух- и трехмерные физически неприводимые представления. Такие представления могут характеризоваться волновыми векторами, занимающими общее положение в обратной ячейке, лишь для кристаллов триклинной системы (в более симметричных кристаллах объединенная звезда векторов  $\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}$  содержит более трех векторов). В кристаллах моноклинной системы могут осуществляться представления с волновым вектором, занимающим общее положение в плоскости симметрии. Представления с волновым вектором, занимающим общее положение на оси симметрии, возможны для всех некубических кристаллов. Во всех перечисленных случаях физически неприводимое представление обязательно двумерно, причем пара соответствующих антиферромагнитных векторов  $\mathbf{l}_1$  и  $\mathbf{l}_2$  преобразуется при трансляциях как пара функций  $\sin \mathbf{k}\mathbf{r}$  и  $\cos \mathbf{k}\mathbf{r}$ . Из вида разложения (1) ясно при этом, что плотность магнитного момента при трансляциях преобразуется как

$$m(\mathbf{r}) \propto \mathbf{l}_1 \sin \mathbf{k}\mathbf{r} + \mathbf{l}_2 \cos \mathbf{k}\mathbf{r},$$

т. е. соответствующая структура (поскольку  $\mathbf{l}_1$  и  $\mathbf{l}_2$  взаимно перпендикулярны) является геликоидальной. Мы приходим, таким образом, к выводу о том, что в пространственно периодическом кристалле возможны лишь геликоидальные несоизмеримые с периодами пространственной решетки обменные магнитные структуры. Возникновение любой другой несоизмеримой структуры обязательно нарушает пространственную периодичность кристалла.

Негеликоидальные структуры могут характеризоваться лишь волновыми векторами, соответствующими некоторым выделенным точкам обратной ячейки. В частности, если все отличные от нуля магнитные векторы преобразуются по представлениям с  $\mathbf{k} = 0$ , магнитная и пространственная элементарные ячейки совпадают.

Не все перечисленные выше принципиально возможные магнитные структуры могут, однако, фактически осуществляться. Многие из них не удовлетворяют следующему критерию устойчивости, аналогичному известному критерию Лифшица в теории фазовых переходов второго рода (<sup>25</sup>, § 145). Именно, существование инвариантного относительно группы  $G$  выражения вида

$$K_i^{ab} \left( \mathbf{l}_a \frac{\partial \mathbf{l}_b}{\partial x_i} - \mathbf{l}_b \frac{\partial \mathbf{l}_a}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

где  $x_i$  — пространственные координаты, приводит к неустойчивости соответствующей структуры. Действительно, рассмотрим малое отклонение от равновесия вида

$$\delta \mathbf{l}_a = [\delta \theta(\mathbf{r}), \mathbf{l}_a],$$

где  $\delta \theta$  — медленно меняющиеся функции координат. Поскольку в каждой точке пространства такое отклонение сводится к повороту всех магнитных векторов на одинаковый угол, локальная (т. е. не содержащая пространственных производных) часть отклонения энергии от равновесного значения обращается в нуль. Главная часть изменения энергии определяется поэтому линейными по производным членами вида (3), которые, очевидно, всегда могут принимать отрицательные значения.

Существенное замечание по поводу критерия устойчивости должно быть сделано в случае геликоидальных структур. Если волновой вектор

занимает общее положение на оси симметрии, то существование инвариантов вида (3) означает неустойчивость структуры лишь в случае, когда инварианты содержат производные по координатам, перпендикулярным оси симметрии. Существование инварианта с производной вдоль оси соответствует, например, температурной зависимости периода геликоида точно так же, как существование линейного инварианта  $\text{div } \mathbf{u}$  ( $\mathbf{u}$  — вектор смещения) соответствует в теории упругости (<sup>26</sup>, § 6) тепловому расширению решетки. Аналогично для структур с волновым вектором, занимающим общее положение в плоскости симметрии, «опасными» являются инварианты, содержащие дифференцирование по координате, перпендикулярной плоскости.

Из теории фазовых переходов известно (<sup>25</sup>, § 145), что инварианты вида (3) отсутствуют лишь для представлений, характеризующихся волновыми векторами, составляющие которых равны определенным долям ( $1/2, 1/3, 1/4$ ) периодов обратной решетки. В нашем случае это означает, что периоды магнитной ячейки могут быть лишь в 2, 3 или 4 раза больше периодов пространственной ячейки, причем, как и в теории фазовых переходов, утроение магнитных периодов по сравнению с пространственными возможно лишь в гексагональных пространственных решетках, а учетверение — в кубической гранецентрированной и объемноцентрированных решетках. Подчеркнем, что этот вывод сделан здесь из рассмотрения симметрии магнетика как такового без каких-либо предположений о характере и числе фазовых переходов, отделяющих рассматриваемое состояние от парамагнитного.

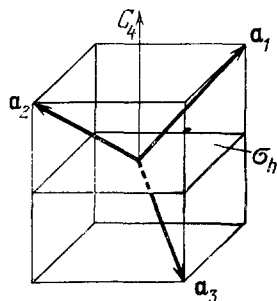


Рис. 1.

Произведем в качестве примера классификацию всех возможных обменных магнитных структур в объемноцентрированных тетрагональных кристаллах, пространственная группа  $G$  симметрии которых есть группа  $C_{4h}^6$ . Расположение основных векторов трансляции показано на рис. 1. Определяющими элементами группы являются зеркальный поворот  $S_4$  и произведение  $tI$  инверсии  $I$  и трансляции на вектор

$$t = \frac{3}{4} \mathbf{a}_1 + \frac{1}{4} \mathbf{a}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{a}_3.$$

В соответствии со сформулированными выше общими утверждениями в данном случае возможны геликоидальные структуры с волновым вектором, занимающим общее положение на оси четвертого порядка. Имеется два типа геликоидальных структур  $H_1$  и  $H_2$ , которым соответствуют плотности момента вида

$$\begin{aligned} H_1: \mathbf{m}(\mathbf{r}) &\propto I_1 \cos \kappa (\xi + \eta - \zeta) + I_2 \sin \kappa (\xi + \eta - \zeta), \\ H_2: \mathbf{m}(\mathbf{r}) &\propto I_1 \sin 2\pi (\xi - \eta) \cdot \sin 2\pi \zeta \cdot \cos \kappa (\xi + \eta - \zeta) + \\ &+ I_2 \sin 2\pi (\xi - \eta) \cdot \sin 2\pi \zeta \cdot \sin \kappa (\xi + \eta - \zeta), \end{aligned}$$

где  $\kappa$  — произвольный параметр,  $\xi, \eta, \zeta$  — косоугольные координаты вдоль основных векторов трансляций:  $\mathbf{r} = \xi \mathbf{a}_1 + \eta \mathbf{a}_2 + \zeta \mathbf{a}_3$ .

Кроме того, из анализа, проведенного для рассматриваемой группы в связи с теорией фазовых переходов в книге Любарского <sup>27</sup>, следует, что существует еще шесть неединичных неприводимых представлений с размерностью, не превышающей трех, для которых отсутствуют инварианты вида (3). Пять из них есть представления с  $\mathbf{k} = 0$ . Используя для таких

представлений обозначения, принятые в книге Ландау и Лифшица (28, § 95), приведем соответствующие выражения для плотности момента:

$$A_u: \mathbf{m}(\mathbf{r}) \propto 1 [\cos 2\pi\zeta - \cos 2\pi(\xi - \eta)],$$

$$B_g: \mathbf{m}(\mathbf{r}) \propto 1 \sin 2\pi(\xi + \eta - \zeta),$$

$$B_u: \mathbf{m}(\mathbf{r}) \propto 1 \cos 2\pi(\xi + \eta - \zeta),$$

$$E_g: \mathbf{m}(\mathbf{r}) \propto \mathbf{l}_1 \cos 2\pi(\xi - \eta) \cdot \sin 2\pi\zeta + \mathbf{l}_2 \cos 2\pi\zeta \cdot \sin 2\pi(\xi - \eta),$$

$$E_u: \mathbf{m}(\mathbf{r}) \propto \mathbf{l}_1 \sin 2\pi\zeta + \mathbf{l}_2 \sin 2\pi(\xi - \eta).$$

Шестое представление — двумерное представление  $\tilde{E}$  с  $\mathbf{k} = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3)/2$  ( $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  — основные векторы обратной решетки):

$$\tilde{E}: \mathbf{m}(\mathbf{r}) \sim \mathbf{l}_1 \sin \pi(\xi - \eta) \cdot \cos \pi\zeta + \mathbf{l}_2 \cos \pi(\xi - \eta) \cdot \sin \pi\zeta.$$

Если прибавить сюда еще ферромагнитную структуру с плотностью момента, преобразующейся по единичному представлению  $A_g$ , то получится таким образом девять различных магнитных структур, описываемых одним неприводимым представлением пространственной группы. Возможны также более сложные структуры, описываемые комбинацией неприводимых представлений. Часть из них оказывается неустойчивыми из-за существования инвариантов вида (3). Например, неустойчивость ферромагнитной структуры ( $A_g, A_u$ ) с плотностью момента

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) \propto \mathbf{M} + 1 [\cos 2\pi\zeta - \cos 2\pi(\xi - \eta)]$$

и двумя взаимно перпендикулярными векторами  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{l}$ , преобразующимися соответственно по представлениям  $A_g$  и  $A_u$ , связана с существованием инварианта

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \mathbf{l} - \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial z},$$

где  $z$  — координата вдоль главной оси кристалла. Неустойчивость неколлинеарной антиферромагнитной структуры ( $A_u E_g$ ) с тремя взаимно перпендикулярными векторами  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ , из которых  $\mathbf{l}_1$  преобразуется по  $A_u$ , а пара  $\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$  — по двумерному представлению  $E_g$ , т. е. структура с плотностью момента

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) \sim \mathbf{l}_1 [\cos 2\pi\zeta - \cos 2\pi(\xi - \eta)] + \\ + \mathbf{l}_2 \cos 2\pi(\xi - \eta) \cdot \sin 2\pi\zeta + \mathbf{l}_3 \cos 2\pi\zeta \cdot \sin 2\pi(\xi - \eta)$$

связана с существованием инварианта

$$\mathbf{l}_1 \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial x} + \mathbf{l}_1 \frac{\partial \mathbf{l}_3}{\partial y} - \mathbf{l}_2 \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial x} - \mathbf{l}_3 \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial y},$$

где  $x, y$  — декартовы координаты в базисной плоскости.

Несложный анализ всех подобных комбинаций показывает, что в кристаллах с пространственной группой  $C_{4h}^6$  возможны всего 45 различных магнитных обменных структур. Из них одна ферромагнитная  $A_g$ , 3 коллинеарных антиферромагнитных  $A_u, B_g, B_u$ , 3 ферромагнитных с двумя магнитными векторами ( $A_g A_g$ ), ( $A_g B_g$ ), ( $A_g B_u$ ), 7 ферромагнитных с тремя векторами ( $A_g A_g A_g$ ), ( $A_g A_g B_g$ ), ( $A_g A_g B_u$ ), ( $A_g B_g B_g$ ), ( $A_g B_u B_u$ ), ( $A_g E_g$ ), ( $A_g \tilde{E}$ ), 2 геликоидальных ферромагнитных ( $A_g H_1$ ), ( $A_g H_2$ ), 8 антиферромагнитных с двумя векторами  $E_g, E_u, \tilde{E}, (A_u A_u), (A_u B_g), (A_u B_u), (B_g B_g), (B_u B_u)$ , 13 антиферромагнитных с тремя векторами ( $A_u A_u A_u$ ), ( $A_u A_u B_g$ ), ( $A_u A_u B_u$ ), ( $A_u B_g B_g$ ), ( $A_u B_u B_u$ ), ( $B_g B_g B_g$ ), ( $B_u B_u B_u$ ), ( $B_g E_g$ ), ( $A_u E_u$ ), ( $B_u E_u$ ), ( $A_u \tilde{E}$ ), ( $B_g \tilde{E}$ ), ( $B_u \tilde{E}$ ) и 8 геликоидальных антиферромагнитных  $H_1, H_2, (A_u H_1), (B_g H_1), (B_u H_1), (A_u H_2), (B_g H_2), (B_u H_2)$ .



Для приложений важна задача об определении числа и характера преобразования магнитных векторов, соответствующих некоторой заданной известной из эксперимента магнитной структуре. Мы продемонстрируем ниже решение этой несложной задачи на нескольких характерных примерах.

В ромбоэдрических магнетиках  $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$  и  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  (пространственная группа  $D_{3d}^6$ ) магнитная элементарная ячейка совпадает с кристаллографической, т. е. все магнитные векторы преобразуются по представлениям с  $\mathbf{k} = 0$ . Такие представления можно рассматривать как представления точечной группы, соответствующей кристаллическому классу, т. е. в данном случае группы  $D_{3d}$ . Взаимная ориентация моментов магнитных атомов одной ячейки, расположенных вдоль оси третьего порядка, для

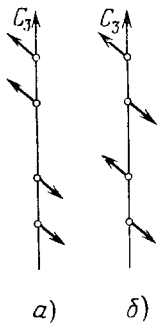


Рис. 2.

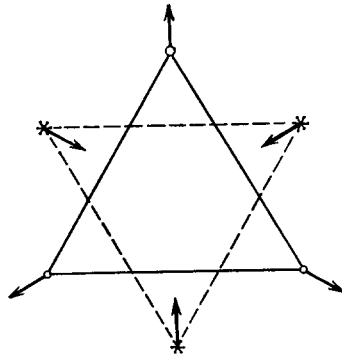


Рис. 3.

$\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$  и  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  показана соответственно на рис. 2, *a* и *b*<sup>29</sup>. Поскольку обе структуры коллинеарны, каждая из них описывается одним магнитным вектором, преобразующимся по одномерному представлению. Для выяснения обменной симметрии необходимо рассмотреть изменения структуры под действием пространственных элементов симметрии, действующих только на координаты атомов при неизменной ориентации их магнитных моментов. Поворот вокруг перпендикулярной плоскости рисунка оси второго порядка переставляет атомы с противоположным направлением моментов в обеих структурах, т. е. плотность момента меняет знак при таком повороте. Этому условию удовлетворяют лишь представления  $A_{2g}$  и  $A_{2u}$  группы  $D_{3d}$ . Инверсия (дополненная в группе  $D_{3d}^6$  трансляцией вдоль оси третьего порядка на расстояние между первым и третьим атомом на рис. 2, *a*, *b*) меняет знак плотности момента в  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , но не меняет структуры в  $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ . Поэтому в  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  структура соответствует представлению  $A_{2u}$ , а в  $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$  —  $A_{2g}$ .

В шестиподрешеточном неколлинеарном антиферромагнетике  $\text{YMnO}_3$  (пространственная группа  $C_{6v}^3$ ) магнитная ячейка также совпадает с кристаллографической. Направление моментов атомов показано на рис. 3<sup>30</sup>. Атомы, отмеченные крестиками, сдвинуты относительно остальных атомов на половину периода вдоль перпендикулярной плоскости рисунка главной оси. Поскольку все моменты лежат в одной плоскости, но не коллинеарны, структура описывается двумя магнитными векторами. Так как при повороте  $C_3$  структура изменяется, ей могут соответствовать только двумерные представления  $E_1$  или  $E_2$ . Из них лишь  $E_2$  согласуется с инвариантностью структуры относительно поворота  $C_2$  (дополненного трансляцией на полпериода).

Четырехподрешеточный антиферромагнетик  $\text{UO}_2$  имеет кубическую гранецентрированную пространственную решетку (группа  $O_h^F$ ). Магнитные атомы (рис. 4) расположены в точках  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1/2, 1/2)$ ,  $(1/2, 0, 1/2)$ ,  $(1/2, 1/2, 0)$ . Их моменты направлены <sup>31</sup>, <sup>32</sup> вдоль пространственных диагоналей куба, т. е. соответственно вдоль направлений  $[111]$ ,  $[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$ ,  $[\bar{1}\bar{1}1]$ ,  $[\bar{1}1\bar{1}]$ . Структура описывается тремя магнитными векторами  $I_1, I_2, I_3$ . Поскольку плотность момента инвариантна относительно трансляций на удвоенные элементарные векторы трансляции пространственной решетки  $a_a$  ( $a = 1, 2, 3$ , эти векторы показаны на рис. 4 стрелками), представление пространственной группы может характеризоваться только такими ненулевыми волновыми векторами, удвоенные значения которых эквивалентны нулю. Из них лишь векторы

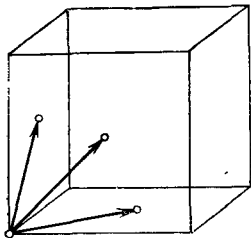


Рис. 4.

$$\mathbf{k}_1 = (\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3)/2, \quad \mathbf{k}_2 = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3)/2, \quad \mathbf{k}_3 = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$$

образуют звезду, содержащую не более трех векторов. При трансляции на  $a_a$  выражение  $\exp(i\mathbf{k}_a\mathbf{r})$ , а значит, и  $I_a$  не меняются. Два же других магнитных вектора меняют знак. Отсюда ясно, что указанным выше направлениям моментов атомов соответствуют векторы  $I_a$ , направленные вдоль ребер куба  $[100]$ ,  $[010]$ ,  $[001]$ . В элементарной ячейке пространственной решетки  $\text{UO}_2$  находится один магнитный атом. В этом случае могут реализоваться лишь такие представления, в которых периодические блоховские множители можно считать равными единице. Другими словами, реализуются только единичные представления малой группы волнового вектора. Именно такое представление с указанной выше звездой реализуется, таким образом, в  $\text{UO}_2$ .

Каждая из обменных магнитных структур, если включить в рассмотрение релятивистские взаимодействия, фиксирующие ориентацию магнитных векторов относительно кристаллографических осей, будет характеризоваться некоторой точной группой симметрии, определяемой одной из магнитных пространственных групп. Подчеркнем, что при этом, вообще говоря, понижается чисто пространственная симметрия системы. Пространственная группа  $G$ , получаемая из обменной группы, отличается, вообще говоря, от пространственной группы, получаемой из магнитной. Простейший пример такого изменения — любой кубический в обменном приближении ферромагнетик.

### 3. СИММЕТРИЯ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ МАГНЕТИКОВ

Настоящий раздел посвящен анализу свойств симметрии пространственно полностью неупорядоченных сред, т. е. систем, в которых пространственное распределение магнитных атомов хаотично и в среднем однородно и изотропно. Речь идет либо об аморфных веществах, содержащих магнитные атомы, либо о слабых растворах магнитных атомов в немагнитных кристаллах.

Пространственно неупорядоченная система может быть в магнитном отношении полностью упорядочена. Например, возможно полное ферромагнитное упорядочение спинов магнитных атомов. Этот пример, однако, единственный. Любой другой магнитный порядок очевидным образом несовместим с пространственной неупорядоченностью. Макроскопические свойства магнитно упорядоченного ферромагнетика не отличаются от свойств обычных кристаллических ферромагнетиков и описываются уравнением Ландау и Лифшица.

В последнее время широко исследуются (см. обзоры <sup>33, 34</sup>) неупорядоченные системы с магнитными структурами другого типа. Это, во-первых, спиновые стекла, в которых не только положения, но и направления спинов различных атомов хаотически распределены. Кроме того, существуют системы (см. <sup>34</sup>), обладающие конечной спонтанной намагниченностью, величина которой, однако, при нуле температуры существенно ниже номинальной. Состояние такого неупорядоченного ферромагнетика можно представить себе как состояние спинового стекла во внешнем магнитном поле. Имеется частичное (спонтанное) ферромагнитное упорядочение, наложенное на в общем довольно хаотическое распределение направлений спинов.

Для классификации возможных типов подобной частичной упорядоченности рассмотрим обменную симметрию на макроскопическом уровне. Макроскопическая симметрия среды с микроскопической плотностью момента  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  может быть охарактеризована заданием мультипольных моментов <sup>35, 6</sup>:

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{m}(\mathbf{r}) \rangle, \quad \mathbf{M}_i = \langle x_i \mathbf{m}(\mathbf{r}) \rangle, \quad \mathbf{M}_{ik} = \left\langle \left( x_i x_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} x_l^2 \right) \mathbf{m}(\mathbf{r}) \right\rangle, \dots,$$

где скобки означают макроскопическое усреднение. Обменная группа симметрии среды состоит из всех комбинаций пространственных и спиновых вращений, инверсии и преобразования  $R$ , относительно которых отличные от нуля мультипольные моменты инвариантны. Группа  $G$  чисто пространственной симметрии, как и раньше, получается из обменной путем отождествления в ее элементах спиновых вращений и элемента  $R$  с единичным преобразованием. Для пространственно изотропных неупорядоченных систем группой  $G$  должна быть группа пространственных вращений (и инверсии). Поскольку мультипольные моменты  $\mathbf{M}, \mathbf{M}_i, \mathbf{M}_{ik}, \dots$  преобразуются по неприводимым представлениям этой группы, к ним полностью применимы результаты предыдущего раздела. В равновесном состоянии могут быть отличны от нуля не более трех моментов, различные моменты перпендикулярны друг другу, причем те из них, которые принадлежат одному многомерному представлению, имеют одинаковую длину. Ясно, что имеется всего три возможности <sup>17</sup>: 1) все моменты равны нулю, 2) отличен от нуля один ферромагнитный момент  $\mathbf{M}$ , 3) отличны от нуля три момента  $\mathbf{M}_i$ , равные по абсолютной величине и перпендикулярные друг другу. Первая возможность соответствует спиновому стеклу, вторая — неупорядоченному ферромагнетнику, третья — неупорядоченному антиферромагнетнику, в котором величины  $\mathbf{M}_i$  играют роль антиферромагнитных векторов.

При учете релятивистских эффектов в неупорядоченном ферромагнетике нарушается пространственная изотропия. Появляется выделенное направление намагниченности.

В неупорядоченном антиферромагнетике при учете релятивистских эффектов должна осуществиться некоторая определенная ориентация тройки взаимно перпендикулярных спиновых векторов  $\mathbf{M}_i = \{M_{i\alpha}\}$  относительно координатного пространства. Индексами  $\alpha, \beta$  мы будем обозначать компоненты спиновых векторов в обменном случае. При рассмотрении релятивистских эффектов разница между ними и пространственными векторными индексами  $i, k$  исчезает. Среди всех ориентаций особо выделена такая, которая при соответствующей нормировке характеризуется моментами  $M_{i\alpha} = \delta_{i\alpha}$ . Среда с такими моментами очевидным образом является изотропной даже при учете релятивистских взаимодействий. Ее точной группой симметрии (магнитный класс) является группа  $SO(3) \times IR$ . Любая другая ориентация может быть получена из обсуж-

давшейся выше путем некоторого поворота всех спинов на угол  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) вокруг оси, определенной единичным вектором  $\mathbf{n}$ . В результате моменты приобретают следующие значения:

$$M_{i\alpha} = \cos \theta \delta_{i\alpha} + (1 - \cos \theta) n_i n_\alpha + \sin \theta e_{i\alpha\beta} n_\beta,$$

где  $e_{ihl}$  — единичный антисимметричный тензор.

Зависящая от угла  $\theta$  энергия анизотропии  $U_\alpha$ , определяемая путем усреднения гамильтониана релятивистских взаимодействий, есть в данном случае линейная комбинация двух инвариантов:  $M_{i\alpha} M_{\alpha i}$  и  $(M_{\alpha\alpha})^2$ . Подставляя выражение моментов через  $\theta$ , получим

$$U_\alpha = \frac{A\varphi^2 + B\varphi^4}{(1 + \varphi^2)^2}, \quad (4)$$

где  $\varphi = \operatorname{tg}(\theta/2)$ ,  $A$  и  $B$  — константы анизотропии, пропорциональные квадрату отношения скорости электронов к скорости света. Здесь и ниже при рассмотрении релятивистских эффектов в неупорядоченных магнетиках мы имеем в виду аморфные системы. В слабых растворах магнитных атомов в кристаллах было бы необходимо учитывать анизотропию кристалла — матрицы. Если  $A > 0$ , то энергия минимальна при  $\varphi = 0$  ( $\theta = 0$ ) или  $\varphi = \infty$  ( $\theta = \pi$ ) в зависимости от знака  $B$ . Если  $A < 0$  и  $B > A/2$ , то минимум достигается при конечном значении

$$\varphi = \sqrt{\frac{|A|}{|A| + 2B}}, \quad 128$$

в случае же  $A < 0$  и  $B < A/2$  — снова при  $\varphi = \infty$ .

Таким образом, возможны три типа состояний неупорядоченного антиферромагнетика. Кроме обсуждавшейся выше изотропной структуры ( $\varphi = 0$ ), возможны еще структуры с точной пространственной симметрией типа симметрии нематических жидких кристаллов. Единичный вектор вдоль оси поворота  $\mathbf{n}$  играет роль директора, причем состояния  $\mathbf{n}$  и  $-\mathbf{n}$  различны при конечных  $\varphi$  и тождественны при  $\varphi = \infty$ .

Поскольку спин есть псевдовектор и меняет знак при операции  $R$  отражения времени, неупорядоченный антиферромагнетик с моментами  $M_{\alpha i}$  всегда не инвариантен относительно  $I$  и  $R$  по отдельности, но инвариантен относительно произведения  $IR$ . Если такая структура осуществляется в диэлектрике, то должен иметь место магнитоэлектрический эффект (возникновение намагниченности, пропорциональной внешнему электрическому полю), наблюдающийся, например, в кристаллическом антиферромагнетике  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ <sup>29</sup>.

#### 4. КОЛЛИНЕАРНЫЕ СТРУКТУРЫ

Вывод динамических уравнений мы будем производить на основе лагранжева формализма. Такой подход наиболее удобен для наших целей и применялся при исследовании магнитных свойств многими авторами<sup>12, 14, 17, 36-38</sup>. Мы будем пренебрегать диссипацией, поэтому получаемые ниже уравнения, строго говоря, применимы лишь при нуле температуры. Однако, поскольку уравнения нелинейны, использование стандартной процедуры квантования позволяет исследовать на их основе взаимодействие тепловых спиновых волн и получить динамические уравнения с учетом диссипации в спин-волновой области низких температур.

Рассмотрим коллинеарный антиферромагнетик, т.е. структуру, определяемую одним магнитным вектором  $\mathbf{l}$ , преобразующимся по какому-либо неединичному одномерному представлению. Такая структура характерна тем, что в ней спонтанное нарушение изотропии спинового пространства

не является полным. Структура инвариантна относительно спиновых вращений вокруг оси, параллельной вектору  $\mathbf{l}$ . [Существует всего два независимых угла поворота вокруг осей, перпендикулярных  $\mathbf{l}$ , которые меняют состояние системы. В соответствии со сказанным во введении эти два угла, как функции координат и времени, должны рассматриваться в качестве неизвестных функций в макроскопическом описании. Вместо них удобно ввести сам единичный вектор  $\mathbf{l}(x_i, t)$ .

Связанная с неоднородностью системы потенциальная энергия  $U$  квадратична по пространственным производным вектора  $\mathbf{l}$ :

$$U = \int dV \frac{1}{2} a_{ik} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_k}, \quad (5)$$

где  $a_{ik}$  — постоянный симметричный тензор, инвариантный относительно кристаллического класса пространственной группы  $G$  и удовлетворяющий условию положительной определенности потенциальной энергии. Для рассматривавшихся в гл. 1 антиферромагнетиков  $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$  и  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  он имеет две независимые положительные компоненты  $a_1 = a_{zz}$ ,  $a_2 = a_{xx} = a_{yy}$ .

Кинетическая энергия  $T$  квадратична по временным производным

$$T = \int dV \frac{1}{2} b \dot{\mathbf{l}}^2, \quad (6)$$

где  $b$  — положительная постоянная.

Функция Лагранжа  $L$ , определяющая динамику антиферромагнетика в отсутствие магнитного поля и релятивистских взаимодействий, таким образом, равна

$$L = T - U = \frac{1}{2} \int dV \left( b \dot{\mathbf{l}}^2 - a_{ik} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_k} \right). \quad (7)$$

Вариация действия  $W$ , рассматриваемого как функция координат  $\mathbf{l}$ <sup>38, 39, 17</sup>, определяется формулами

$$\delta W = \int dV b \dot{\mathbf{l}} \delta \mathbf{l} = \int dV b [\dot{\mathbf{l}}] \delta \theta,$$

где учтено, что произвольная вариация вектора  $\mathbf{l}$  есть бесконечно малое вращение  $\delta \mathbf{l} = [\delta \theta \mathbf{l}]$  на угол  $\delta \theta$ . Производная  $\delta W / \delta \theta$  действия по углу спинового вращения есть механический спиновый момент, откуда путем умножения на гиромагнитное отношение  $\gamma$  находим магнитный момент единицы объема

$$\mathbf{M} = \gamma b [\dot{\mathbf{l}}].$$

В некоторых антиферромагнетиках, например в  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , в которых  $\mathbf{l}$  преобразуется по представлению, входящему в состав векторного представления, существует инвариант

$$\left( \dot{\mathbf{l}} \left[ \mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_i} \right] \right).$$

Он является, как легко видеть, суммой полной производной по времени и некоторой дивергенции. Поэтому введение его в функцию Лагранжа не меняет уравнений движения, однако меняет действие, а значит, и выражение для момента. Вместо написанной выше формулы получаем

$$\ddagger \mathbf{M} = \gamma b [\dot{\mathbf{l}}] + \mu_i \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_i}, \quad (8)$$

где  $\mu_i$  — некоторые обменные постоянные. При наличии внешнего магнитного поля, малого по сравнению с обменным полем, в правой части формулы (8) появляется добавочное слагаемое, зависящее от магнитной

восприимчивости  $\chi_{\alpha\beta}$  антиферромагнетика

$$M_{\alpha} = \gamma b [\dot{\mathbf{H}}]_{\alpha} + \mu_i \frac{\partial l_{\alpha}}{\partial x_i} + \chi_{\alpha\beta} H_{\beta}. \quad (9)$$

Соответствующие добавочные слагаемые в функции Лагранжа легко определить, пользуясь тем, что производная  $\partial L/\partial \mathbf{H}$  есть магнитный момент  $\mathbf{M}$ :

$$L = \frac{b}{2} \dot{\mathbf{I}}^2 - \frac{a_{ih}}{2} \frac{\partial l}{\partial x_i} \frac{\partial l}{\partial x_h} + \gamma b [\dot{\mathbf{H}}] \mathbf{H} + \frac{1}{2} \chi_{\alpha\beta} H_{\alpha} H_{\beta}; \quad (10)$$

здесь и всюду ниже под  $L$  мы понимаем плотность функции Лагранжа и опускаем члены, не сказывающиеся на уравнениях движения.

Из формулы (10) тем же способом, которым выше из (7) было получено (8), находим магнитный момент с учетом магнитного поля

$$\mathbf{M} = \gamma b [\dot{\mathbf{H}}] + \mu_i \frac{\partial l}{\partial x_i} + \gamma^2 b [\mathbf{H} - \mathbf{l}(\mathbf{H})].$$

Сравнение с (9) показывает, что тензор магнитной восприимчивости равен

$$\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\perp} (\delta_{\alpha\beta} - l_{\alpha} l_{\beta}),$$

где  $\chi_{\perp} = \gamma^2 b$  — восприимчивость в направлениях, перпендикулярных  $\mathbf{l}$ . Продольная восприимчивость равна нулю. Последнее утверждение, как легко понять, есть следствие того факта, что определяемая формулой (6) кинетическая энергия зависит лишь от временных производных углов поворота вокруг осей, перпендикулярных  $\mathbf{l}$ , и не содержит угловой скорости вращения (в спиновом пространстве) вокруг  $\mathbf{l}$ . Таким образом, исчезновение продольной восприимчивости есть непосредственное следствие известного из теории, например, двухатомных молекул (<sup>28</sup>, § 82) квантовомеханического принципа неразличимости, согласно которому осесимметричное тело не может вращаться вокруг оси симметрии. Подчеркнем, что этот вывод справедлив лишь для диэлектриков, в которых нет других бесщелевых магнитных степеней свободы. В металлах продольная восприимчивость обусловлена вкладом проводящих электронов.

Для учета релятивистских взаимодействий в выражение (5) для потенциальной энергии должна быть введена энергия анизотропии  $U_a = \frac{1}{2} \alpha_{ih} l_i l_h$ , где  $\alpha_{ih}$  — постоянный тензор анизотропии, который можно считать симметричным и удовлетворяющим условию  $\alpha_{ii} = 0$ . Кроме того, в некоторых антиферромагнетиках к магнитному полю всюду должно быть прибавлено поле Дзялошинского  $\mathbf{H}_D = [d\mathbf{l}]$ , описывающее слабый ферромагнетизм <sup>29</sup>, здесь  $\mathbf{d}$  — постоянная, не зависящая от направления магнитного вектора  $\mathbf{l}$ .

Окончательное выражение для функции Лагранжа можно записать в виде

$$L = \frac{\chi_{\perp}}{2\gamma^2} \dot{\mathbf{I}}^2 + \frac{\chi_{\perp}}{\gamma} \mathbf{H} [\dot{\mathbf{H}}] - U, \quad (11)$$

где

$$U = \frac{1}{2} a_{ih} \frac{\partial l}{\partial x_i} \frac{\partial l}{\partial x_h} + \frac{1}{2} \chi_{\perp} (\mathbf{H}\mathbf{l})^2 + \frac{1}{2} \alpha_{ih} l_i l_h + \chi_{\perp} \mathbf{l} [d\mathbf{H}].$$

Мы опустили в формуле (11) члены, являющиеся полными производными по времени, или квадратичные по релятивистскому полю  $\mathbf{H}_D$ .

Намагниченность антиферромагнетика в общем случае равна

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_{\perp}}{\gamma} [\dot{\mathbf{H}}] + \mu_i \frac{\partial l}{\partial x_i} + \chi_{\perp} \{\mathbf{H} - \mathbf{l}(\mathbf{H}) + [d\mathbf{l}]\}. \quad (12)$$

Варьируя функцию Лагранжа (11) по  $\mathbf{l}$ , с учетом равенства  $\mathbf{l}^2 = 1$  находим нелинейные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} [\dot{\mathbf{H}}] = \frac{\gamma^2}{\chi_{\perp}} [|\mathbf{H}| \dot{\mathbf{l}} + 2\gamma (\mathbf{H}) \dot{\mathbf{l}} - \gamma \{\dot{\mathbf{H}} - \mathbf{l}(\dot{\mathbf{H}})], \quad (13)$$

где

$$H_{ii} = -\frac{\partial U}{\partial l_i} = a_{ki} \frac{\partial^2 l_i}{\partial x_k \partial x_l} - \alpha_{ik} l_k - \chi_{\perp} (\mathbf{H}) H_i - \chi_{\perp} [d\mathbf{H}]_i$$

— действующее на  $\mathbf{l}$  эффективное поле.

Частоты магнитного резонанса и спектр спиновых волн, получающиеся из линеаризованных уравнений (13), совпадают с результатами модельной феноменологической теории<sup>4, 5, 29</sup>. В отличие от последней уравнения (13) дают последовательное описание также и нелинейных эффектов.

### 5. СПИНОВОЕ СТЕКЛО

Описание спиновых стекол в излагаемой теории аналогично теории упругости обычных стекол<sup>16-18</sup>. Как и в теории упругости, стекло является недиссипативной системой на не слишком малых частотах, значительно превышающих некоторое характерное время рассасывания упругих напряжений. Рассмотрим динамику спинового стекла, предполагая сначала это условие выполненным. Обсуждение общего случая будет проведено в конце данного раздела.

В спиновом стекле спонтанное нарушение изотропии спинового пространства является полным, поэтому в макроскопическом описании должны участвовать все три угла спиновых вращений. Пусть параметры  $\varphi^{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) осуществляют некоторую параметризацию группы спиновых вращений. Тогда эти параметры  $\varphi^{\alpha}(x_i, t)$  как функции координат и времени определяют те состояния, которые соответствуют низкочастотным движениям. Конфигурация спинов в точке  $x_i$  в момент времени  $t$  отличается от конфигурации в той же точке в исходном равновесном состоянии общим поворотом  $\varphi^{\alpha}(x_i, t)$ .

Для вычисления потенциальной энергии  $U$ , квадратичной по пространственным производным от  $\varphi^{\alpha}$ , рассмотрим вращения  $\varphi^{\alpha}(x_i)$  и  $\varphi^{\alpha}(x_i + dx_i) = \varphi^{\alpha}(x_i) + d\varphi^{\alpha}$ , соответствующие двум близким точкам. Пусть

$$\delta\theta = 2\lambda_{\alpha}(\varphi) d\varphi^{\alpha}$$

(множитель 2 введен для удобства в дальнейшем) есть бесконечно малый угол поворота, определяющий вращение такое, что последовательное применение вращений  $\varphi^{\alpha}$  и  $\delta\theta$  дает  $\varphi^{\alpha} + d\varphi^{\alpha}$ . В силу полной хаотичности спинового стекла единственной величиной, от которой может зависеть  $U$ , является

$$\left(\frac{\delta\theta}{dx_i}\right)^2 = 4\lambda_{\alpha}(\varphi)\lambda_{\beta}(\varphi)\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial x_i}.$$

Величины  $\lambda_{\alpha}(\varphi)\lambda_{\beta}(\varphi)$  есть, по определению, метрический тензор  $g_{\alpha\beta}(\varphi)$ , задающий (см.<sup>40</sup>) метрику риманова пространства, соответствующего группе трехмерных вращений. Имеем

$$U = \frac{a}{2} g_{\alpha\beta}(\varphi) \frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial x_i}, \quad (14)$$

где  $a > 0$  — некоторая постоянная.

Кинетическая энергия  $T$  квадратична по временным производным от  $\varphi^\alpha$ . Аналогично (14) получаем

$$T = \frac{a}{2c^2} g_{\alpha\beta}(\varphi) \dot{\varphi}^\alpha \dot{\varphi}^\beta,$$

где  $c$  — постоянная, равная, как будет видно ниже, скорости спиновых волн.

Функция Лагранжа спинового стекла в отсутствие внешнего магнитного поля и релятивистских взаимодействий равна

$$L = T - U = \frac{a}{2} g_{\alpha\beta}(\varphi) \left( \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}^\alpha \dot{\varphi}^\beta - \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_i} \right). \quad (15)$$

Соответствующие уравнения Лагранжа имеют вид

$$\ddot{\varphi}^\alpha - c^2 \Delta \varphi^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha (\dot{\varphi}^\beta \dot{\varphi}^\gamma - c^2 \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x_i}) = 0; \quad (16)$$

здесь  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  — символы Кристоффеля, соответствующие метрике  $g_{\alpha\beta}$ .

Введем теперь конкретную параметризацию  $\{\varphi^\alpha\} = \varphi$ , удобную для дальнейшего. Положим  $\varphi = n\varphi$ , где  $n$  — единичный вектор вдоль оси вращения и  $\varphi = \text{tg}(\theta/2)$ ,  $\theta$  — угол вращения вокруг  $n$ ,  $0 < \theta < \pi$ . Любой спиновый вектор  $\sigma$  преобразуется под действием спинового вращения  $\varphi$  согласно формуле

$$\sigma' = \sigma + \frac{2}{1+\varphi^2} \{[\varphi[\varphi\sigma]] + [\varphi\sigma]\}. \quad (17)$$

Преимущества данной параметризации выявляются в простом законе, определяющем произведение двух вращений. Если сначала произвести вращение  $\varphi_1$ , затем  $\varphi_2$ , то в результате получится вращение, соответствующее параметру

$$\varphi_{21} = \frac{\varphi_2 + \varphi_1 + [\varphi_2\varphi_1]}{1 - \varphi_2\varphi_1}. \quad (18)$$

Элемент «длины»  $dl$  группового пространства легко определяется с помощью формулы (18). Имеем

$$dl^2 \equiv g_{\alpha\beta} d\varphi^\alpha d\varphi^\beta = \left( \frac{\delta\theta}{2} \right)^2,$$

где  $\delta\theta/2$  получается из (18) при подстановке  $\varphi_1 = -\varphi$ ,  $\varphi_2 = \varphi + d\varphi$ :

$$\frac{\delta\theta}{2} = \frac{d\varphi + [\varphi d\varphi]}{1 + \varphi^2}. \quad (19)$$

В результате находим

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{1 + \varphi^2} - \frac{\varphi^\alpha \varphi^\beta}{(1 + \varphi^2)^2}. \quad (20)$$

Уравнения движения (16) в выбранной параметризации приобретают следующий вид:

$$\ddot{\varphi} - c^2 \Delta \varphi = \frac{\dot{\varphi}(\varphi^2) - c^2 \varphi_i (\varphi^2)_i}{1 + \varphi^2}, \quad (21)$$

где

$$(\varphi^2)^\cdot = \frac{\partial \varphi^2}{\partial t}, \quad \varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (\varphi^2)_i = \frac{\partial \varphi^2}{\partial x_i}.$$

Метрика (20) есть метрика сферы в четырехмерном евклидовом пространстве. Действительно, записывая  $dl^2$  в переменных  $\theta/2$ ,  $\vartheta$ ,  $\Phi$ , где



$\theta, \Phi$  — полярный угол и азимут направления  $\mathbf{n}$ , получим

$$dl^2 = \left(\frac{d\theta}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (d\Phi^2 + \sin^2\theta d\Phi^2),$$

что совпадает (см. <sup>41</sup>, § 104) с метрикой трехмерной сферы единичного радиуса. Ясно поэтому, что уравнения движения инвариантны относительно шестипараметрической группы  $O(4)$  четырехмерных вращений. Бесконечно малые преобразования координат  $\varphi$ , сохраняющие метрику, определяются формулами

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \frac{\varphi + \varepsilon_1 - [\varphi\varepsilon_1]}{1 - \varphi\varepsilon_1} - \varphi \approx \varepsilon_1 + \varphi(\varphi\varepsilon_1) + [\varepsilon_1\varphi], \\ \delta\varphi &= [\varepsilon_2\varphi]. \end{aligned} \tag{22}$$

Первое из них есть бесконечно малое спиновое вращение на угол  $\delta\theta = 2\varepsilon_1$ .

Вариация плотности действия  $W$  как функции координат при произвольных  $\delta\varphi$  равна

$$\delta W = \frac{a}{c^2} g_{\alpha\beta} \dot{\varphi}^\beta \delta\varphi^\alpha.$$

Подставляя сюда (22), находим плотности величин, сохраняющихся в силу симметрии  $O(4)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{\delta W}{2\varepsilon_1} = \frac{a}{2c^2} \frac{\dot{\varphi} + [\varphi\dot{\varphi}]}{1 + \varphi^2}, \\ \mathbf{N} &= \frac{\delta W}{\varepsilon_2} = \frac{a}{c^2} \frac{[\varphi\dot{\varphi}]}{1 + \varphi^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Величина  $\mathbf{S}$  есть плотность механического спинового момента, которая лишь гиромангнитным отношением  $\gamma$  отличается от намагниченности

$$\mathbf{M} = \frac{a\gamma}{2c^2} \frac{\dot{\varphi} + [\varphi\dot{\varphi}]}{1 + \varphi^2}.$$

При наличии внешнего магнитного поля в функции Лагранжа (15) появляется добавочное слагаемое  $\mathbf{M}\mathbf{H}$ . Вычисляя, как и выше,  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{M} = \gamma\mathbf{S}$  для новой функции Лагранжа, получим

$$\mathbf{M} = \frac{a\gamma}{2c^2} \frac{\dot{\varphi} + [\varphi\dot{\varphi}]}{1 + \varphi^2} + \frac{a\gamma^2}{4c^2} \mathbf{H}.$$

Отсюда следует, что должно быть выполнено равенство  $a\gamma^2/4c^2 = \chi$ , где  $\chi$  — магнитная восприимчивость, которая в спиновом стекле, естественно, изотропна.

Нам осталось написать в функции Лагранжа дополнительные слагаемые, описывающие релятивистскую энергию анизотропии  $U_a$ . Величина  $U_a$  зависит от самих углов поворота (а не от производных) и должна выражаться через ортогональную матрицу спиновых вращений  $U_{\alpha\beta}$ , согласно (17) равную

$$U_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{2}{1 + \varphi^2} (\varphi^\alpha \varphi^\beta - \varphi^2 \delta_{\alpha\beta} + e_{\alpha\gamma\beta} \varphi^\gamma).$$

Поскольку  $U_a$  получается из гамильтониана спин-орбитального и спин-спинового взаимодействий, который содержит члены, линейные и квадратичные по спинам,  $U_a$  может содержать лишь комбинации, линейные или квадратичные по  $U_{\alpha\beta}$  и, кроме того, инвариантные относительно

вращений. Имеются всего две такие комбинации:

$$U_{\alpha\alpha} = 3 - \frac{4\varphi^2}{1+\varphi^2}, \quad U_{\alpha\beta}U_{\beta\alpha} = 3 - \frac{16\varphi^2}{(1+\varphi^2)^2}.$$

Ясно, что энергию анизотропии спинового стекла можно записать в виде

$$U_a = \frac{\alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4}{(1+\varphi^2)^2}, \quad (24)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые положительные константы анизотропии. Существенно заметить, что эти константы пропорциональны четвертой степени отношения скорости электронов к скорости света, т. е. они значительно меньше фигурирующих в формуле (4) констант анизотропии  $A$ ,  $B$  неупорядоченного антиферромагнетика. Действительно, для вычисления энергии анизотропии мы должны заменить в гамильтониане релятивистских взаимодействий спиновые операторы электронов  $\sigma_1^\alpha$ ,  $\sigma_2^\beta$ , ... на  $U_{\alpha\gamma}\sigma_1^\gamma$ ,  $U_{\beta\delta}\sigma_2^\delta$ , ... и провести усреднение по равновесному состоянию. Если пренебречь релятивистскими взаимодействиями, то

$$\langle \sigma_1^\gamma \rangle = \langle \sigma_2^\delta \rangle = 0, \quad \langle \sigma_1^\gamma \sigma_2^\delta \rangle \propto \delta_{\gamma\delta},$$

и в силу ортогональности матрицы вращений  $U_{\alpha\gamma}U_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}$ . Чтобы получить зависимость энергии от угла спинового вращения, необходимо еще раз учесть релятивистские взаимодействия. Константы  $\alpha$  и  $\beta$  пропорциональны, таким образом, квадрату релятивистских взаимодействий.

Напишем полное выражение для функции Лагранжа спинового стекла с учетом магнитного поля и релятивистских взаимодействий<sup>17</sup>:

$$L = \frac{2\chi}{\gamma^2} \left[ \frac{\dot{\Phi}^2 - c^2\Phi_i^2}{1+\varphi^2} - \frac{(\Phi\dot{\Phi})^2 - c^2(\Phi\Phi_i)^2}{(1+\varphi^2)^2} \right] + \frac{2\chi}{\gamma} \dot{\Phi} \frac{\mathbf{H} + [\mathbf{H}\Phi]}{1+\varphi^2} - \frac{\alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4}{(1+\varphi^2)^2}. \quad (25)$$

Линеаризованные уравнения движения в постоянном поле, соответствующие этой функции Лагранжа, имеют вид

$$\ddot{\Phi} - c^2\Delta\Phi + \gamma[\mathbf{H}\dot{\Phi}] + \frac{\alpha\gamma^2}{2\chi}\Phi = 0, \quad (26)$$

откуда легко находим<sup>17</sup> частоты продольно поляризованных (по отношению к магнитному полю) спиновых волн:

$$\omega_l^2 = \frac{\alpha\gamma^2}{2\chi} + c^2k^2 \quad (27)$$

и поперечно поляризованных спиновых волн:

$$\omega_t = \sqrt{\omega_l^2 + \left(\frac{\gamma H}{2}\right)^2} \pm \frac{\gamma H}{2}. \quad (28)$$

В случае  $H = \alpha = 0$  эти формулы переходят в результаты работы Гальперина и Саслова<sup>16</sup>.

На достаточно низких частотах в спиновых стеклах становятся существенными диссипативные явления, аналогичные рассеиванию упругих напряжений в обычных стеклах или очень вязких жидкостях. Учет этих явлений качественно легко произвести по аналогии с известной теорией Максвелла (см. <sup>26</sup>, § 36). Уравнение (26) в отсутствие релятивистских взаимодействий можно записать как закон сохранения момента  $\mathbf{M} = (2\chi/\gamma)\dot{\Phi} = (\chi/\gamma)\dot{\theta}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} - \gamma[\mathbf{M}\mathbf{H}] = \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i}, \quad (29)$$

где  $\Pi_i$  — поток момента, играющий здесь роль тензора упругих напряжений. В рассмотренном выше высокочастотном случае  $\Pi_i$  линейно выражается через «деформацию»  $\partial\theta/\partial x_i$ :

$$\Pi_i = \frac{2\chi c^2}{\gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\chi c^2}{\gamma} \frac{\partial\theta}{\partial x_i}.$$

Последнее соотношение обычным образом обобщается на случай произвольных частот путем введения максвелловского времени  $\tau$  рассасывания упругих напряжений в спиновой системе:

$$\dot{\Pi}_i + \frac{1}{\tau} \Pi_i = \frac{\chi c^2}{\gamma^2} \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x_i} = c^2 \frac{\partial M}{\partial x_i}. \quad (30)$$

Формулы (29) и (30) дают искомое обобщение линейных уравнений. В пределе очень низких частот  $\omega \ll 1/\tau$  из (29) и (30) получается уравнение, характерное для парамагнетиков:

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \gamma [\mathbf{M}\mathbf{H}] - D\Delta M = 0.$$

Коэффициент спиновой диффузии  $D$  связан с временем  $\tau$  соотношением  $D = c^2\tau$ , которое аналогично максвелловскому выражению для вязкости жидкостей. С этой точки зрения спиновое стекло — парамагнетик с очень большой диффузией.

#### 6. НЕКОЛЛИНЕАРНЫЕ И НЕУПОРЯДОЧЕННЫЕ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКИ

Уравнения для неколлинеарных антиферромагнетиков, в том числе неупорядоченных, аналогичны уравнениям для спинового стекла. Однако в коэффициенты квадратичных форм (15), определяющих кинетическую и потенциальную энергию, кроме метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$  могут входить компоненты магнитных векторов  $\mathbf{l}_\alpha$ . В произвольном состоянии, характеризующемся углами  $\varphi^\alpha(x_i, t)$ , магнитные векторы равны

$$\mathbf{l}_\alpha(x_i, t) = \mathbf{l}_\alpha^{(0)} + \frac{2}{1+\varphi^2} \{ \varphi (\varphi \mathbf{l}_\alpha^{(0)}) - \varphi^2 \mathbf{l}_\alpha^{(0)} + [\varphi \mathbf{l}_\alpha^{(0)}] \}, \quad (31)$$

где  $\mathbf{l}_\alpha^{(0)}$  — постоянные значения в исходном равновесном состоянии.

Если ввести угловую скорость  $\Omega = \delta\theta/dt$  вращения в спиновом пространстве и аналогичные величины  $\Omega_i = \delta\theta/dx_i$ , характеризующие изменение углов в пространстве, то кинетическая и потенциальная энергии спинового стекла соответственно равны  $(\chi/2\gamma^2) \Omega^2$  и  $(\chi c^2/2\gamma^2) \Omega^2$ .

Для произвольного антиферромагнетика кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2\gamma^2} \chi_{\alpha\beta}(\varphi) \Omega_\alpha \Omega_\beta. \quad (32)$$

Описанным выше способом легко убедиться, что величины  $\chi_{\alpha\beta}$  есть тензор магнитной восприимчивости. При этом одновременно находим члены, учитывающие магнитное поле, которые надо прибавить к  $T$  для получения функции Лагранжа в пространственно однородном случае в отсутствие релятивистских взаимодействий:

$$L = \frac{1}{2\gamma^2} \chi_{\alpha\beta} (\Omega_\alpha + \gamma H_\alpha) (\Omega_\beta + \gamma H_\beta). \quad (33)$$

Вид тензора  $\chi_{\alpha\beta}$  определяется обменной симметрией антиферромагнетика. Например, в  $\text{UO}_2$  и в неупорядоченном антиферромагнетике три взаимно перпендикулярных магнитных вектора преобразуются по одному трехмерному представлению, что соответствует кубической симметрии спинового пространства. Существует всего один инвариант  $\Omega^2$  вида (32), так

что  $\chi_{\alpha\beta} = \chi\delta_{\alpha\beta}$ . В  $\text{YMnO}_3$  имеется два инварианта вида (32), в качестве которых удобно выбрать  $\Omega^2$  и  $(\mathbf{n}\Omega)^2$ , где  $\mathbf{n} = [1_1 1_2]$ . Восприимчивость

$$\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\perp}\delta_{\alpha\beta} + (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp})n_{\alpha}n_{\beta}$$

имеет две независимые компоненты  $\chi_{\parallel}$ ,  $\chi_{\perp}$  в направлении  $\mathbf{n}$  и в перпендикулярной плоскости. В неколлинеарных антиферромагнетиках с магнитными векторами, преобразующимися только по одномерным представлениям, магнитная восприимчивость имеет три независимые компоненты.

Потенциальная энергия в общем случае имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \Lambda_{\alpha\beta}^{ik}(\varphi) \Omega_{i\alpha} \Omega_{k\beta}, \quad (34)$$

где инвариантный тензор  $\Lambda_{\alpha\beta}^{ik}$  играет роль тензора модулей упругости.

Полная функция Лагранжа есть сумма выражений (33), (34) и релятивистской энергии анизотропии.

В  $\text{YMnO}_3$  имеется шесть независимых инвариантов вида (34) и три независимых релятивистских инварианта, пропорциональных квадрату отношения скорости электронов к скорости света. Функция Лагранжа  $\text{YMnO}_3$  равна

$$\begin{aligned} L = & \frac{\chi_{\perp}}{2\gamma^2} (\Omega + \gamma\mathbf{H})^2 + \\ & + \frac{\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}}{2\gamma^2} (\Omega + \gamma\mathbf{H}, \mathbf{n})^2 - \frac{1}{2} \{ \Lambda_1 \Omega_z^2 + \Lambda_2 (\Omega_x \mathbf{n})^2 + \Lambda_3 (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + \\ & + \Lambda_4 [(\Omega_x \mathbf{n})^2 + (\Omega_y \mathbf{n})^2] + \Lambda_5 (\Omega_x \mathbf{l}_2 + \Omega_y \mathbf{l}_1)^2 + \Lambda_6 (\Omega_x \mathbf{l}_1 - \Omega_y \mathbf{l}_2)^2 \} - \\ & - \frac{A}{2} [(l_{1y} - l_{2x})^2 + (l_{1x} + l_{2y})^2] - \frac{B}{2} (l_{1y} + l_{2x})^2 - \frac{C}{2} (l_{1x} - l_{2y})^2, \quad (35) \end{aligned}$$

где  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_6$  — упругие константы,  $A, B, C$  — константы анизотропии. В равновесном состоянии  $\text{YMnO}_3$  отличные от нуля компоненты магнитных векторов равны  $l_{1x}^{(0)} = -l_{2y}^{(0)} = 1$ . Магнитный момент  $\text{YMnO}_3$  определяется формулой

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_{\perp}}{\gamma} (\Omega + \gamma\mathbf{H}) + \frac{\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}}{\gamma} \mathbf{n} (\mathbf{n}, \Omega + \gamma\mathbf{H}).$$

Приведем получающийся из функции Лагранжа (35) спектр спиновых волн в случае, когда магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = & \frac{\gamma^2}{\chi_{\parallel}} [4(B - C) + (\Lambda_1 + \Lambda_2)k_z^2 + (\Lambda_3 + \Lambda_4)(k_x^2 + k_y^2)], \quad (36) \\ \omega_{2,3}^2 = & \frac{1 + \eta^2}{2} (\gamma H)^2 + \frac{\gamma^2}{\chi_{\perp}} \left[ 2|C| + \Lambda_1 k_z^2 + \left( \Lambda_3 + \frac{\Lambda_5 + \Lambda_6}{2} \right) (k_x^2 + k_y^2) \right] \pm \\ & \pm \left\{ \frac{(1 - \eta^2)^2}{4} (\gamma H)^4 + (\gamma H)^2 (1 - \eta)^2 \frac{\gamma^2}{\chi_{\perp}} \left[ 2|C| + \Lambda_1 k_z^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \Lambda_3 + \frac{\Lambda_5 + \Lambda_6}{2} \right) (k_x^2 + k_y^2) \right] + \frac{\gamma^4}{\chi_{\perp}^2} \frac{(\Lambda_5 - \Lambda_6)^2}{4} (k_x^2 + k_y^2)^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $\eta = (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp})/\chi_{\perp}$ . Имеется три различные ветви, из которых одна, соответствующая колебаниям угла поворота вокруг оси  $z$ , не зависит от величины магнитного поля.

При  $H = 0$  имеем

$$\omega_2^2 = \frac{\gamma^2}{\chi_{\perp}} [2|C| + \Lambda_1 k_z^2 + (\Lambda_3 + \Lambda_5)(k_x^2 + k_y^2)],$$

$$\omega_3^2 = \frac{\gamma^2}{\chi_{\perp}} [2|C| + \Lambda_1 k_z^2 + (\Lambda_3 + \Lambda_6)(k_x^2 + k_y^2)].$$

При  $\mathbf{k} = 0$  получаем три различные частоты антиферромагнитного резонанса

$$\omega_1 = 2\gamma \sqrt{\frac{B-C}{\chi_{||}}}, \quad \omega_{2,3} = \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\chi_{\perp}} |C| + \frac{(1+\eta)^2}{4} (\gamma H)^2 \pm \frac{1-\eta}{2} \gamma H}. \quad (37)$$

В пределе  $\eta \rightarrow 0$  формулы (37) переходят в получающиеся из (27), (28) резонансные частоты спинового стекла. При  $\eta = -1$ , т. е. при  $\chi_{||} = 0$  остаются всего две частоты, имеющие стандартный вид для коллинеарных антиферромагнетиков.

В  $UO_2$ , кроме  $\Omega_i^2$ , имеется еще один инвариант вида (34)

$$(\Omega_x \mathbf{l}_1)^2 + (\Omega_y \mathbf{l}_2)^2 + (\Omega_z \mathbf{l}_3)^2 = \frac{4}{(1+\varphi^2)^2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \varphi_z \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \varphi_y \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \varphi_x \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} - \varphi_z \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} + \varphi_y \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} - \varphi_x \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \right)^2 \right],$$

где  $x, y, z$  — декартовы координаты вдоль главных осей кристалла, и один квадратичный релятивистский инвариант

$$l_{1x}^2 + l_{2y}^2 + l_{3z}^2 = 1 - \frac{8}{(1+\varphi^2)^2} (\varphi_x^2 \varphi_y^2 + \varphi_x^2 \varphi_z^2 + \varphi_y^2 \varphi_z^2 + \varphi^2).$$

Функция Лагранжа  $UO_2$  равна

$$L = \frac{2\chi}{\gamma^2} \left[ \frac{\dot{\varphi}^2 - c_1^2 \varphi_i^2}{1+\varphi^2} - \frac{(\varphi \dot{\varphi})^2 - c_1^2 (\varphi \varphi_i)^2}{(1+\varphi^2)^2} \right] + 2 \frac{\chi}{\gamma} \dot{\varphi} \frac{\mathbf{H} + [\mathbf{H}\varphi]}{1+\varphi^2} - \\ - \frac{2\chi}{\gamma^2} \frac{(c_2^2 - c_1^2)}{(1+\varphi^2)^2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \varphi_z \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \varphi_y \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \varphi_x \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} - \varphi_z \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} + \varphi_y \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} - \varphi_x \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \right)^2 \right] - \\ - \frac{A}{(1+\varphi^2)^2} (\varphi^2 + \varphi_x^2 \varphi_y^2 + \varphi_x^2 \varphi_z^2 + \varphi_y^2 \varphi_z^2), \quad (38)$$

где  $A$  — константа анизотропии,  $c_1, c_2$  — постоянные размерности скорости. Магнитный момент  $UO_2$  равен

$$\mathbf{M} = \frac{2\chi}{\gamma} \frac{\dot{\varphi} + [\varphi \dot{\varphi}]}{1+\varphi^2} + \chi \mathbf{H}. \quad (39)$$

В случае, когда магнитное поле направлено вдоль одной из главных осей кристалла, частоты трех ветвей спиновых волн определяются формулами

$$\omega_1^2 = c_1^2 (k_x^2 + k_y^2) + c_2^2 k_z^2 + \frac{A\gamma^2}{2\chi}, \\ \omega_{2,3}^2 = c_1^2 k^2 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) (k_x^2 + k_y^2) + \frac{A\gamma^2}{2\chi} + \frac{\gamma^2 H^2}{2} \pm \\ \pm \left\{ \frac{(c_2^2 - c_1^2)^2}{4} (k_x^2 - k_y^2)^2 + \gamma^2 H^2 \left[ c_1^2 k^2 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} (k_x^2 + k_y^2) + \frac{A\gamma^2}{2\chi} \right] + \frac{\gamma^4 H^4}{4} \right\}^{1/2},$$

что совпадает с результатами работы Дзялошинского и Кухаренко<sup>42</sup>. Частоты магнитного резонанса ( $\mathbf{k} = 0$ ) для  $UO_2$  не отличаются от случая спинового стекла.

В неупорядоченном антиферромагнетике (в изотропной фазе, в которой  $M_{i\alpha} = \delta_{i\alpha}$ ) кроме  $\Omega_i^2$ , имеется инвариант

$$(\Omega_i \mathbf{M}_i)^2 = \left( \frac{\text{div } \varphi + \varphi \text{ rot } \varphi}{1+\varphi^2} \right)^2$$

вида (34). Энергия анизотропии определяется формулой (4). Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{2\chi}{\gamma^2} \left[ \frac{\dot{\Phi}^2 - c_l^2 \Phi_l^2}{1 + \Phi^2} - \frac{(\Phi\dot{\Phi})^2 - c_l^2 (\Phi\Phi_l)^2}{(1 + \Phi^2)^2} \right] + \frac{2\chi}{\gamma} \dot{\Phi} \frac{\mathbf{H} + [\mathbf{H}\Phi]}{1 + \Phi^2} - \frac{2\chi}{\gamma^2} (c_l^2 - c_t^2) \left( \frac{\operatorname{div} \Phi + \Phi \operatorname{rot} \Phi}{1 + \Phi^2} \right)^2 - \frac{A\Phi^2 + B\Phi^4}{(1 + \Phi^2)^2},$$

где  $c_t, c_l$  — постоянные, которые оказываются равными скорости поперечных и продольных спиновых волн.

Магнитный момент неупорядоченного антиферромагнетика отличается от выражения (39) наличием добавочного слагаемого  $\mu \partial \mathbf{M}_i / \partial x_i$  ( $\mu$  — постоянная), возникающего, как и в формуле (8), из-за существования инварианта  $\Omega \partial \mathbf{M}_i / \partial x_i$ , являющегося суммой полных производных.

Соответствующие приведенной выше функции Лагранжа линеаризованные уравнения движения неупорядоченного антиферромагнетика в постоянном поле имеют вид

$$\ddot{\Phi} - c_l^2 \Delta \Phi - (c_l^2 - c_t^2) \nabla \operatorname{div} \Phi + \gamma [\mathbf{H}\dot{\Phi}] + \frac{A\gamma^2}{2\chi} \Phi = 0.$$

В общем случае для частот спиновых волн получается кубическое уравнение. Имеем

$$\omega^2 = \frac{A\gamma^2}{2\chi} + c_l^2 k^2 + \kappa,$$

где  $\kappa$  удовлетворяет уравнению

$$\kappa^3 + \kappa^2 [(c_l^2 - c_t^2) k^2 + \gamma^2 H^2] + \kappa \gamma^2 H^2 \left[ (c_l^2 - c_t^2) k^2 \cos^2 \psi - \frac{A\gamma^2}{2\chi} - c_l^2 k^2 \right] + \gamma^2 H^2 \left( \frac{A\gamma^2}{2\chi} + c_l^2 k^2 \right) (c_l^2 - c_t^2) k^2 \cos^2 \psi = 0;$$

здесь  $\psi$  — угол между направлениями магнитного поля и волнового вектора.

При  $H = 0$  частоты одной продольной и двух поперечных спиновых волн равны

$$\omega_l^2 = \frac{A\gamma^2}{2\chi} + c_l^2 k^2, \quad \omega_t^2 = \frac{A\gamma^2}{2\chi} + c_t^2 k^2.$$

При  $\mathbf{k} = 0$  имеются три различные частоты магнитного резонанса, выражения для которых формально совпадают с формулами (27), (28) для резонансных частот в спиновом стекле.

## 7. НЕКОЛЛИНЕАРНЫЕ ФЕРРИМАГНЕТИКИ И НЕУПОРЯДОЧЕННЫЙ ФЕРРОМАГНЕТИК

Для того чтобы при определении функции Лагранжа структур с ненулевой спонтанной намагниченностью избежать превышения точности, необходимо принять во внимание следующие обстоятельства<sup>17</sup>. В неравновесных состояниях точное значение магнитного момента единицы объема, которое в данной главе обозначим  $\vec{\mathcal{M}}$ , отличается вообще говоря, от спонтанного момента  $\mathbf{M}(x_i, t)$ , выраженного формулой (17) через углы  $\Phi(x_i, t)$  и равновесное значение  $\mathbf{M}_0$ , членами содержащими производные. Поскольку  $\mathbf{M}$  зависит от самих углов, а не от производных, соотношение между  $\vec{\mathcal{M}}$  и  $\mathbf{M}$  оказывается не инвариантным относительно произвольного малого переопределения углов, при котором новые углы отличаются

от старых членами с производными. Ясно, что, используя этот произвол, всегда можно добиться совпадения направлений моментов  $\vec{M}$  и  $\vec{M}$ . Таким образом, по определению углов поворота, уточненному для неравновесного случая, имеем  $\vec{M} = \text{const } \mathbf{M}$ . В равновесии  $\text{const}$  равна единице.

Для обычных ферромагнетиков или коллинеарных ферримагнетиков (диэлектрических) последнее условие сохраняется также и в неравновесных состояниях, что связано с упоминавшимся уже в гл. 4 квантовомеханическим принципом неразличимости. Равенство  $\text{const} = 1$  является выражением этого принципа в нашем случае аналогично тому, как в теории двухатомных молекул с ненулевым электронным моментом (см. <sup>28</sup>, § 82) требуется равенство проекций на ось молекулы полного и электронного орбитальных моментов.

В неравновесных состояниях неколлинеарных ферримагнетиков и неупорядоченного ферромагнетика для  $\text{const}$  должно быть написано разложение по малым величинам  $\Omega$  и  $\Omega_i$ . Это разложение, если учесть симметрию относительно обращения времени, приводит к формуле

$$\vec{M} = \mathbf{M} + \frac{\chi_{\parallel}}{\gamma M^2} (\mathbf{M}\Omega) \mathbf{M}, \quad (40)$$

где  $\chi_{\parallel}$  — постоянная, имеющая смысл, как будет видно ниже, восприимчивости вдоль направления  $\mathbf{M}$ . Формула (40) применима к ферримагнетикам, несмотря на возможность существования в них наряду с  $(\mathbf{M}\Omega)$  инвариантов вида  $(\mathbf{M}\Omega)$ . Появление таких инвариантов в разложении  $\text{const}$  нарушило бы симметричность производных  $\partial M_{\alpha} / \partial \Omega_{\beta} = \partial^2 L / \partial \Omega_{\alpha} \partial \Omega_{\beta}$ .

Для того чтобы момент  $\vec{M}$  определялся формулой (40), функция Лагранжа в пространственно однородном случае в отсутствие релятивистских взаимодействий должна быть равна

$$L = \frac{1}{\gamma} (\mathbf{M}, \Omega + \gamma \mathbf{H}) + \frac{\chi_{\parallel}}{2\gamma^2 M^2} (\mathbf{M}, \Omega + \gamma \mathbf{H})^2, \quad (41)$$

где обычным образом учтено магнитное поле. Его учет в выражении для  $\vec{M}$  дает

$$\vec{M} = \mathbf{M} + \frac{\chi_{\parallel}}{\gamma M^2} \mathbf{M} (\mathbf{M}, \Omega + \gamma \mathbf{H}). \quad (42)$$

Добавочные члены в формуле (41), связанные с пространственной неоднородностью и релятивистскими взаимодействиями, не отличаются по существу от подобных членов в рассмотренных выше случаях спинового стекла и антиферромагнетиков. В неколлинеарных ферримагнетиках они имеют, как правило, громоздкий вид. Получающиеся же в результате уравнения и спектры колебаний в ферримагнетиках и неупорядоченном ферромагнетике аналогичны. Их специфика связана с наличием в формуле (41) первого члена, линейного по угловой скорости. Ниже мы продемонстрируем эту специфику на примере неупорядоченного ферромагнетика.

В данном случае имеется всего два инварианта вида (34) с пространственными производными:  $\Omega_i^2$  и  $(\mathbf{M}\Omega_i)^2$ . Поскольку из компонент вектора  $\mathbf{M}$  можно составить единственный инвариант  $M^2$ , который не меняется при спиновых вращениях, энергия анизотропии неупорядоченного ферромагнетика, как и спинового стекла, пропорциональна четвертой степени отношения скорости электронов к скорости света. Кроме  $U_{\alpha\alpha}$  и  $U_{\alpha\beta} U_{\beta\alpha}$ , она может содержать инварианты

$$U_{\alpha\beta} M_{\alpha} M_{\beta} = M^2 - \frac{2}{1+\varphi^2} [M\varphi]^2, \quad U_{\alpha\gamma} U_{\gamma\beta} M_{\alpha} M_{\beta} = M^2 - \frac{8 [M\varphi]^2}{(1+\varphi^2)^2}$$

и  $U_{\alpha\beta} M_{\alpha} M_{\beta} U_{\gamma\gamma}$ . Общее выражение для энергии анизотропии содержит четыре постоянные  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ :

$$U_a = \frac{\alpha_1 \Phi^2 + \alpha_2 [\mathbf{v}\Phi]^2 + \alpha_3 \Phi^4 + \alpha_4 \Phi^2 [\mathbf{v}\Phi]^2}{(1 + \Phi^2)^2},$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{M}/M$ .

Полная функция Лагранжа неупорядоченного ферромагнетика, таким образом, равна

$$L = \frac{1}{\gamma} (\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega} + \gamma \mathbf{H}) + \frac{\chi_{\parallel}}{2\gamma^2} (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega} + \gamma \mathbf{H})^2 - \frac{aM}{2\gamma} [\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}_i]^2 - \frac{\chi_{\parallel} c^2}{2\gamma^2} (\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}_i)^2 - U_a. \quad (43)$$

Напишем получающиеся из (43) линеаризованные (относительно равновесного состояния  $\mathbf{M}_0 \parallel \mathbf{H}$ ) уравнения движения в постоянном поле:

$$\begin{aligned} \gamma M [\dot{\mathbf{v}}\Phi] - \chi_{\parallel} (\dot{\mathbf{v}}\Phi) \mathbf{v} + a\gamma M \Delta\Phi + (\chi_{\parallel} c^2 - a\gamma M) (\mathbf{v}\Delta\Phi) \mathbf{v} - \\ - \gamma^2 M H (\Phi - (\Phi\mathbf{v}) \mathbf{v}) - \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) \Phi - \frac{1}{2} \alpha_2 \mathbf{v} (\mathbf{v}\Phi), \quad (44) \end{aligned}$$

где мы пренебрегли малым по сравнению с первым слагаемым членом  $\chi_{\parallel} \gamma H [\dot{\mathbf{v}}\Phi]$ .

Из (44) получаем спектр

$$\omega_i^2 = c^2 k^2 + \frac{1}{2\chi_{\parallel}} \alpha_1 \gamma^2$$

продольных спиновых волн антиферромагнитного типа и спектр

$$\omega_i = ak^2 + \gamma H + \frac{1}{2M} \gamma (\alpha_1 + \alpha_2)$$

поперечных спиновых волн, характерных для ферромагнетиков. Подчеркнем в заключение, что изложенный подход к неупорядоченным ферромагнетикам (и антиферромагнетикам) справедлив, как и в случае спиновых стекол, на не слишком низких частотах. Хотя в данном случае система обладает дальним порядком, в ней из-за наличия также и неупорядоченности возможны диссипативные процессы типа рассасывания упругих напряжений.

Институт физических проблем АН СССР

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Блох Ф. Молекулярная теория магнетизма.— М.: ОНТИ, 1936.
2. Holstein T., Primakoff H.— Phys. Rev. 1940, v. 58, p. 1098.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.— Phys. Zs. Sowjetunion, 1935, т. 8, с. 153; то же: Ландау Л. Д. Собрание трудов.— М.: Наука, 1969, т. 1, с. 128.
4. Каганов М. И., Цукерник В. М.— ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 106.
5. Туров Е. А. Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.
6. Андреев А. Ф., Марченко В. И.— ЖЭТФ, 1976, т. 70, с. 1522.
7. Дзялошинский И. Е.— ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 1420.
8. Lange R. V.— Phys. Rev., 1966, v. 146, p. 301.
9. Stern H.— Ibid., 1966, v. 147, p. 94.
10. Wagner H.— Zs. Phys., 1966, v. 195, p. 273.
11. Лерлае L., Умезава Н.— Nuovo Cimento. Ser. B, 1966, v. 44, p. 410.
12. Волков Д. В., Желтухин А. А., Блиох Ю. П.— ФТТ, 1971, т. 13, с. 1668.
13. Leggett A. J.— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 331.
14. Maki K.— Phys. Rev. Ser. B, 1975, v. 11, p. 4264.
15. Halperin B. I., Hoehenberg P. C.— Ibid., 1969, v. 188, p. 898.
16. Halperin B. I., Saslow W. M.— Ibid. Ser. B, 1977, v. 16, p. 2154.
17. Андреев А. Ф.— ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 786.
18. Воловик Г. Б., Дзялошинский И. Е.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 1102.



19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Физматгиз, 1959.
20. Найш В. Е.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1963, т. 27, с. 1497.
21. Kitz A.— Phys. Stat. Sol., 1965, v. 10, p. 455.
22. Brinkman W., Elliott R. J.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1966, v. 294, p. 343.
23. Litvin D. B., Orzechowski W.— Physica, 1974, v. 76, p. 538.
24. Копчик В. А., Коцев И. Н.— Препринт ОИЯИ Р4-8466.— Дубна: 1974.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика.— М.: Наука, 1976. Ч. 1.
26. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.— М.: Наука, 1965.
27. Любарский Г. Я. Теория группы и ее применение в физике.— М.: Физматгиз, 1958.
28. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1963.
29. Боровик-Романов А. С. Антиферромагнетизм.— М.: ВИНТИ, 1962. (Итоги науки. Вып. 4).
30. Физика магнитных диэлектриков /Под ред. Г. А. Смоленского — Л.: Наука, 1974.
31. Дзялошинский И. Е., Манько В. И.— ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 1352.
32. Faber J., Lander G. H., Соорег В. R.— Phys. Rev. Lett. 1975, v. 35, p. 1770.
33. M y d o s h I. A.— In: Magnetism and Magnetic Materials. New York, 1974.— AIP Conf. Proc., 1975, No 24, p. 131.
34. S a r g i l l G. S., Ibid., p. 138.
35. Френкель Я. И. Электродинамика.— Л.: ОНТИ, 1935.— Т. II.
36. D ö r i n g W.— Zs. Naturforsch., 1948, Bd. 3a, S. 373 — Перевод в кн. Ферромагнитный резонанс/ Под ред. С. В. Вонсовского — М.: ИЛ, 1951.— С. 312.
37. Brown W. F. Micromagnetics.— N.Y.; Lnd.: Interscience Publ., 1963.— p. 36.
38. Дзялошинский И. Е., Кухаренко Б. Г.— ЖЭТФ, 1976, т. 70, с. 2360.
39. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика.— М.: Физматгиз, 1958.— § 43.
40. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства.— М.: ИЛ, 1949.
41. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Физматгиз, 1960.
42. Дзялошинский И. Е., Кухаренко Б. Г.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 2290.