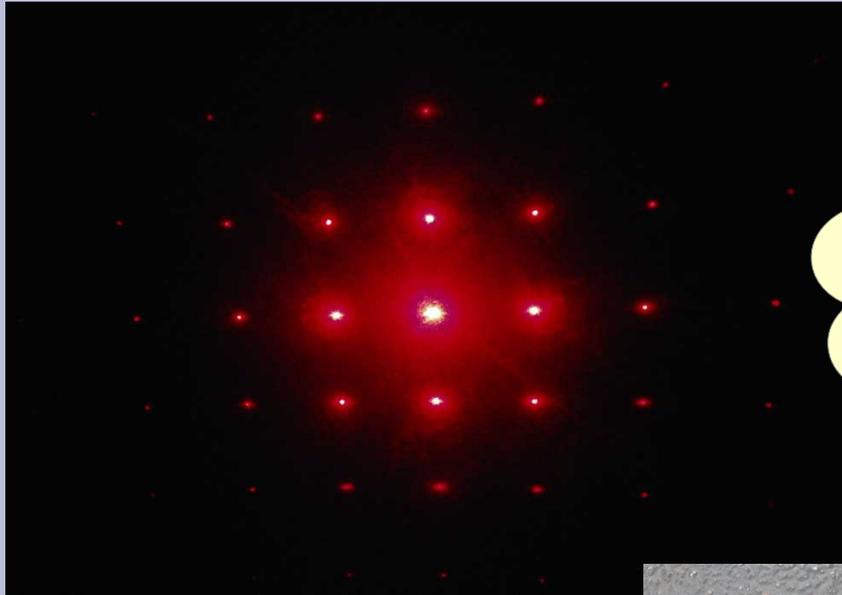


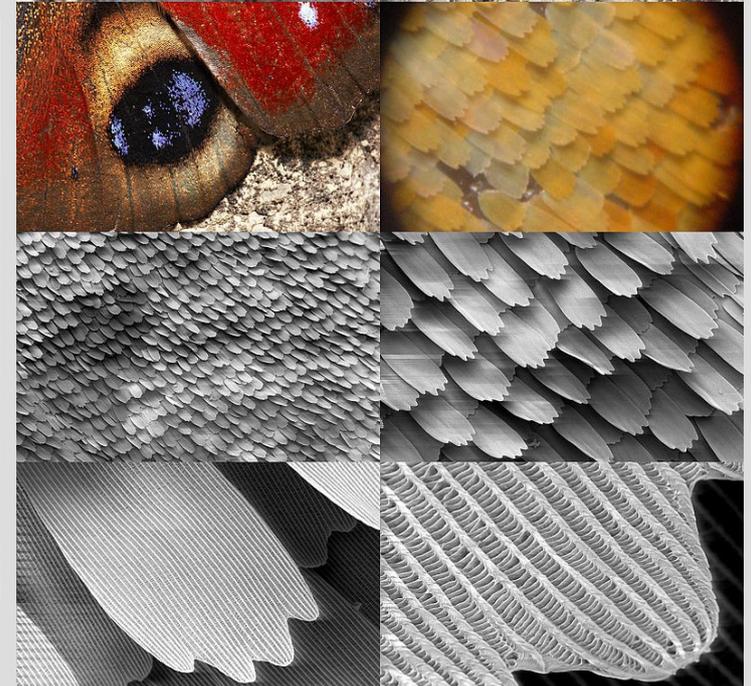
## Лекция 3. Волны де Бройля, соотношение неопределённостей Гейзенберга, волновая функция.

# Воспоминания из волновой оптики

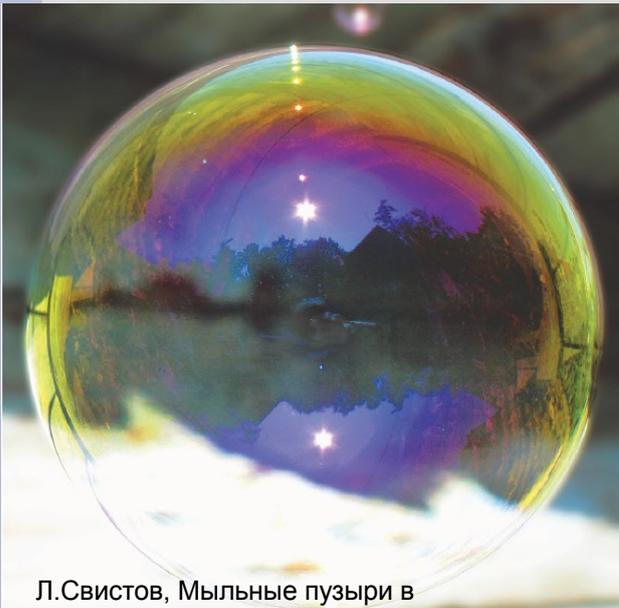


<http://www.animations.physics.unsw.edu.au/action/diffraction-labs.html>

Дифракция и  
интерференция  
ВОЛН



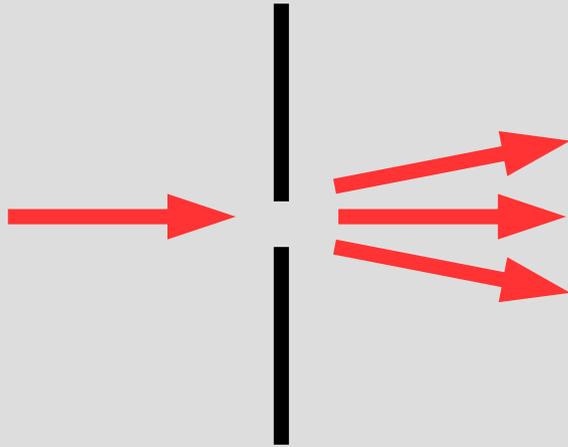
Hyperphysics Project, Oil Film Interference, 2017, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/oilfilm.html>



Л.Свистов, Мыльные пузыри в  
фотографиях, Квант, 4, 2 ( 2015)

wikipedia.org, Structural coloration, 2017,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Structural\\_coloration](https://en.wikipedia.org/wiki/Structural_coloration)

## Отклонение волн при дифракции



Угол расходимости пучка после прохождения неоднородности размером  $d$

$$\Theta \sim \frac{\lambda}{d}$$

## Гипотеза Планка+импульс электромагнитной волны+эффект Комптона

В некоторых случаях (эффект Комптона, фотоэффект...) электромагнитная волна при взаимодействии с веществом ведёт себя также, как если бы она состояла из потока частиц с энергией и импульсом

$$E = \hbar \omega, \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Такая частица называется **фотон**

## Гипотеза Планка+импульс электромагнитной волны+эффект Комптона

В некоторых случаях электромагнитное вещество ведет себя как поток частиц

Такая частица

Релятивистская механика:

Связь импульса и энергии типа

$$E = pc$$

характерна для безмассовой или ультрарелятивистской частицы

## Гипотеза де Бройля

«Waves and Quanta», Comptes Rendus **177**, 507 (1923)

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

- По аналогии с «корпускулярными» свойствами света предположим, что и «настоящим» частицам соответствует какой-то волновой процесс
- Так как ультрарелятивистская частица «механически» от фотона не отличается, естественно ожидать, что для длины волны будет та же связь с импульсом, что и у фотона
- Групповая скорость таких волн де Бройля должна совпадать со скоростью частицы

**КАК ПРОВЕРИТЬ?**

## Порядки величины для длины волны

В быту:

1 миллиграмм, 1 м/сек

$$\lambda = \frac{h}{mV} \approx \frac{6 \times 10^{-34}}{10^{-6}} \text{ м} \sim 10^{-27} \text{ м}$$



<https://zooclub.ru/attach/6982.jpg>

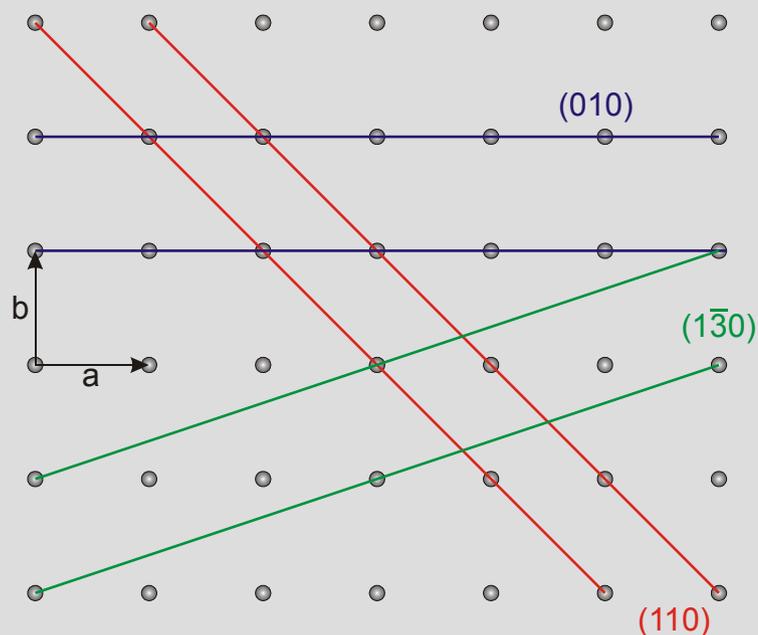
В микромире:

Электрон, разность потенциалов 100 В

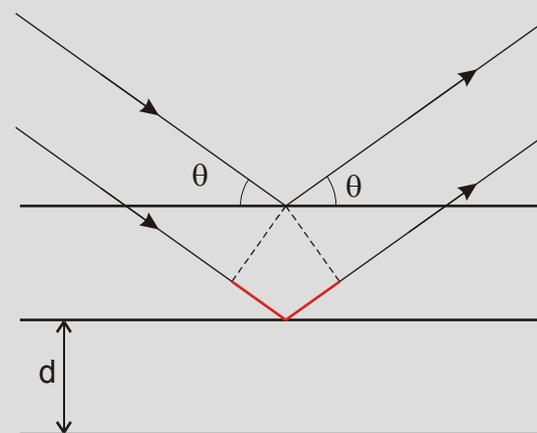
$$\lambda = \frac{h}{mV} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \approx \frac{6 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 10^{-30} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 100}} \text{ м} \sim 10^{-10} \text{ м}$$

Типичный атомный и межатомный размер — можно проверить в дифракции на кристаллах

## 3-мерная дифракционная решётка. Условие Брэгга-Вульфа



$$2d \sin \theta = n \lambda$$

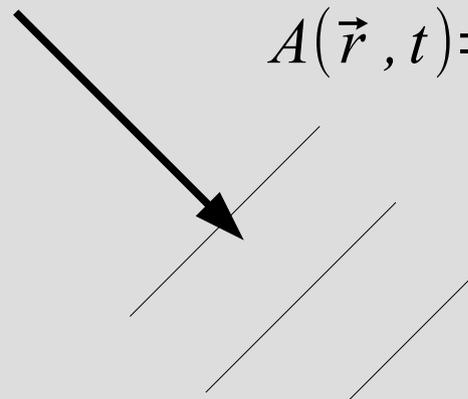


Усиление интерференции волн, отраженных от эквивалентных плоскостей кристалла. Проверено в опытах по рентгеновской дифракции

# 3-мерная дифракционная решётка. Формализм обратной решётки.

Падающая волна,  $k$

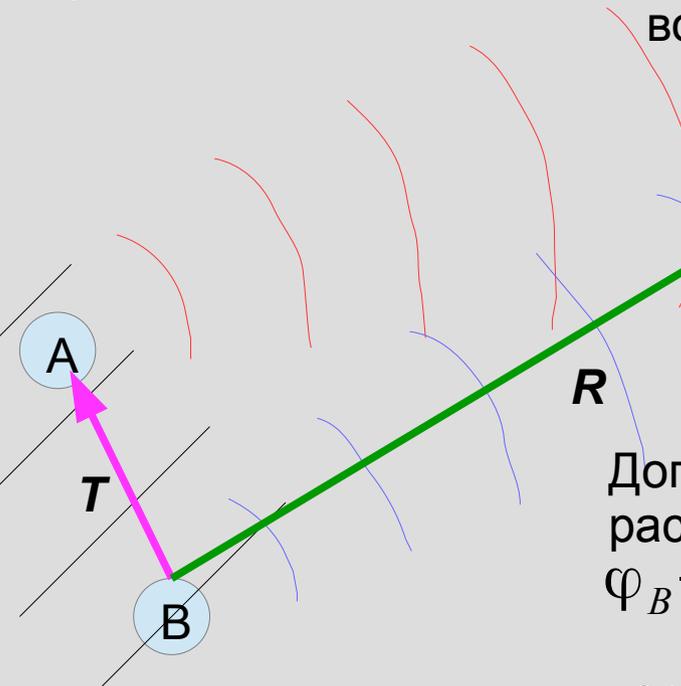
$$A(\vec{r}, t) = A_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$



Падающая волна:

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B = -\vec{k} \cdot \vec{T}$$



Рассеянная волна,  $k'$



рис. с сайта caricatura.ru

Дополнительная разность хода рассеянных волн:

$$\varphi_B - \varphi_A = k |\vec{R}| - k |\vec{R} - \vec{T}| \approx$$

$$\approx k |\vec{R}| - k \sqrt{R^2 - 2 \vec{R} \cdot \vec{T}} \approx$$

$$\approx \frac{k}{R} (\vec{R} \cdot \vec{T}) \approx \vec{k}' \cdot \vec{T}$$

Полностью:

$$\phi_B - \phi_A = (\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{T}$$

## 3-мерная дифракционная решётка. Формализм обратной решётки.

Для простоты — кубический кристалл

$$\vec{T} = N a \vec{x} + M a \vec{y} + P a \vec{z}$$

$a$  — период,  $N, M, P$  — целые.

**ЕСЛИ**

$$\vec{k}' - \vec{k} = \vec{G} = N' \frac{2\pi}{a} \vec{x} + M' \frac{2\pi}{a} \vec{y} + P' \frac{2\pi}{a} \vec{z}$$

то **ВСЕ** рассеянные волны складываются в фазе!

$$\varphi_B = -k \cdot T$$

Полностью:

$$\varphi_B - \varphi_A = (\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{T}$$

Рассеянная волна,  $\vec{k}'$



рис. с сайта caricatura.ru

$\vec{R}$

Дополнительная разность хода рассеянных волн:

$$\varphi_B - \varphi_A = k |\vec{R}| - k |\vec{R} - \vec{T}| \approx$$

$$\approx k |\vec{R}| - k \sqrt{R^2 - 2 \vec{R} \cdot \vec{T}} \approx$$

$$\approx \frac{k}{R} (\vec{R} \cdot \vec{T}) \approx \vec{k}' \cdot \vec{T}$$

## Опыты Дэвиссона-Гермера

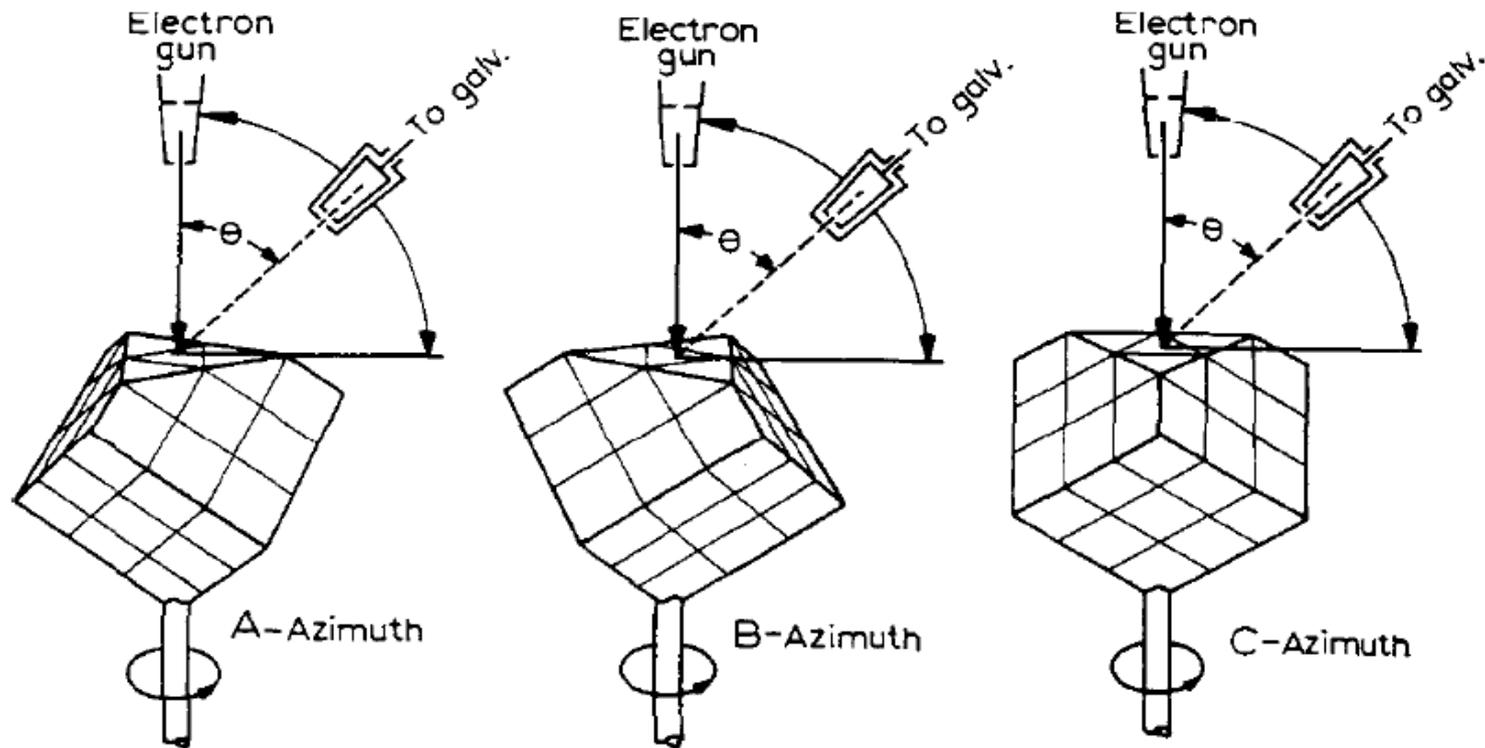
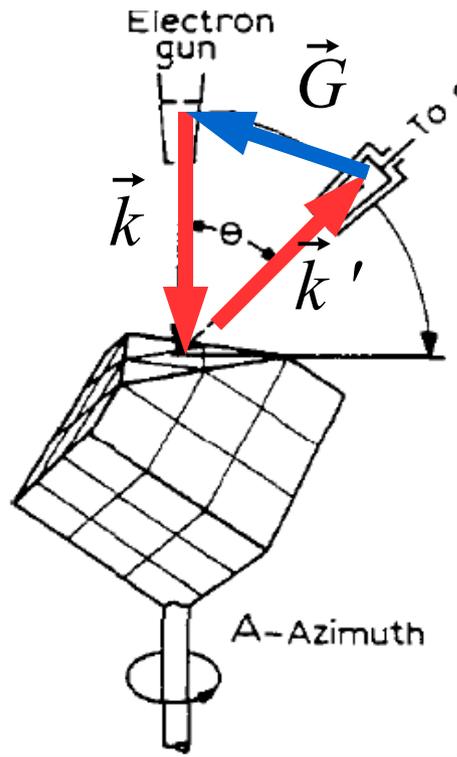


Fig. 1. Schematic diagram showing disposition of primary beam, nickel crystal, and collector. Crystal shown revolved to bring one principal azimuth after another into plane of observation.

C. Davisson, Nobel prize lecture, , [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1937/index.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1937/index.html)

Пучок электронов рассеивается на кристалле никеля, энергии  $\sim 100$  эВ

# Опыты Дэвиссона-Гермера



$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2meU}}{\hbar}$$

резонансное усиление  
амплитуды рассеяния

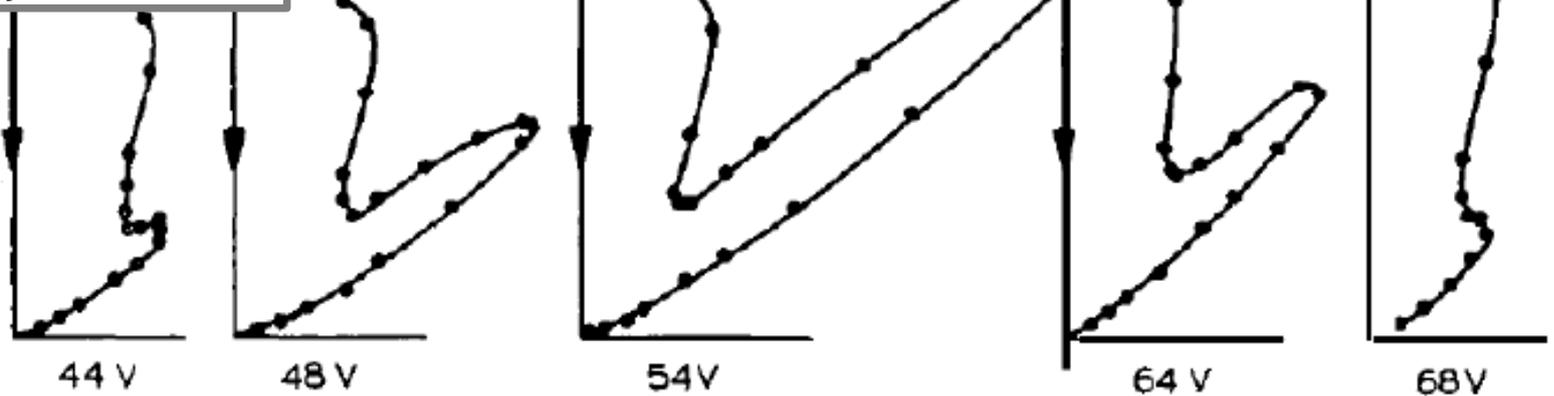


Fig. 2. Polar diagram showing intensity of elastic scattering in A-azimuth (Fig. 1) as function of latitude angle, for series of primary-beam voltages.

C.Davisson, Nobel prize lecture, , [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1937/index.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1937/index.html)

$$\lambda = \frac{h}{mV} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \approx \frac{6 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-30} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 100} \text{ м} \sim 10^{-10} \text{ м}$$

# Опыт Дэвиссона-Гермера: результат

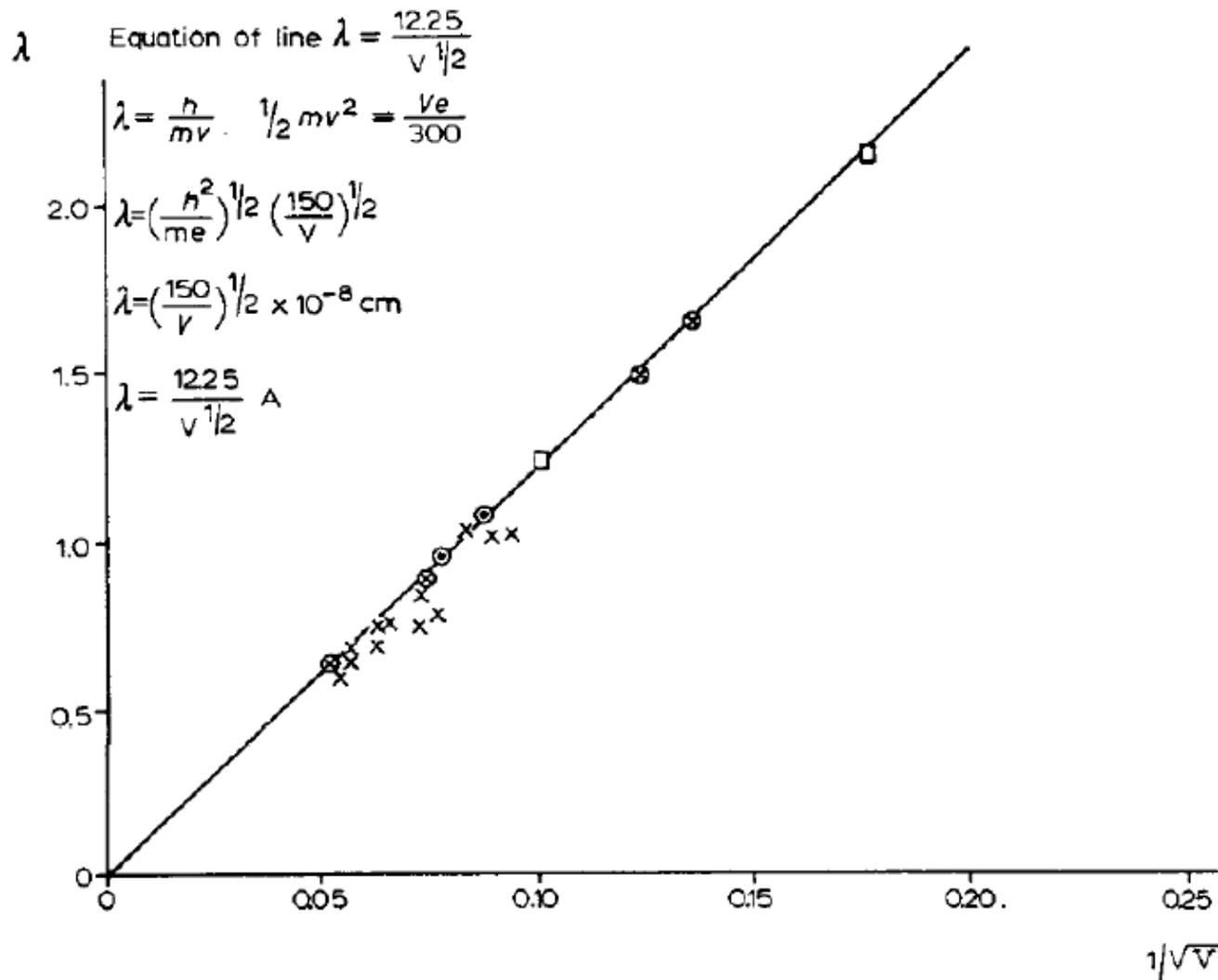


Fig. 4. Test of the de Broglie formula  $\lambda = k/p = h/mv$ . Wavelength computed from diffraction data plotted against  $1/\sqrt{V}$ , ( $V$ , primary-beam voltage). For precise verification of the formula all points should fall on the line  $\lambda_s = 12.25/V^{1/2}$  plotted in the diagram. (x From observations with diffraction apparatus; o same, particularly reliable; □ same, grazing beams. ⊙ From observations with reflection apparatus.)

# Опыт Томсона

$U \sim 10$  кэВ

$$\lambda = \frac{12.25 \text{ \AA}}{\sqrt{E[\text{эВ}]} } \sim 0.1 \text{ \AA}$$

Маленькая длина волны, малые углы отклонения.

Структура колец – из-за случайно ориентированных кристаллитов, каждое кольцо — очередной вектор обратной решетки.



<https://marketplace.secondlife.com/>

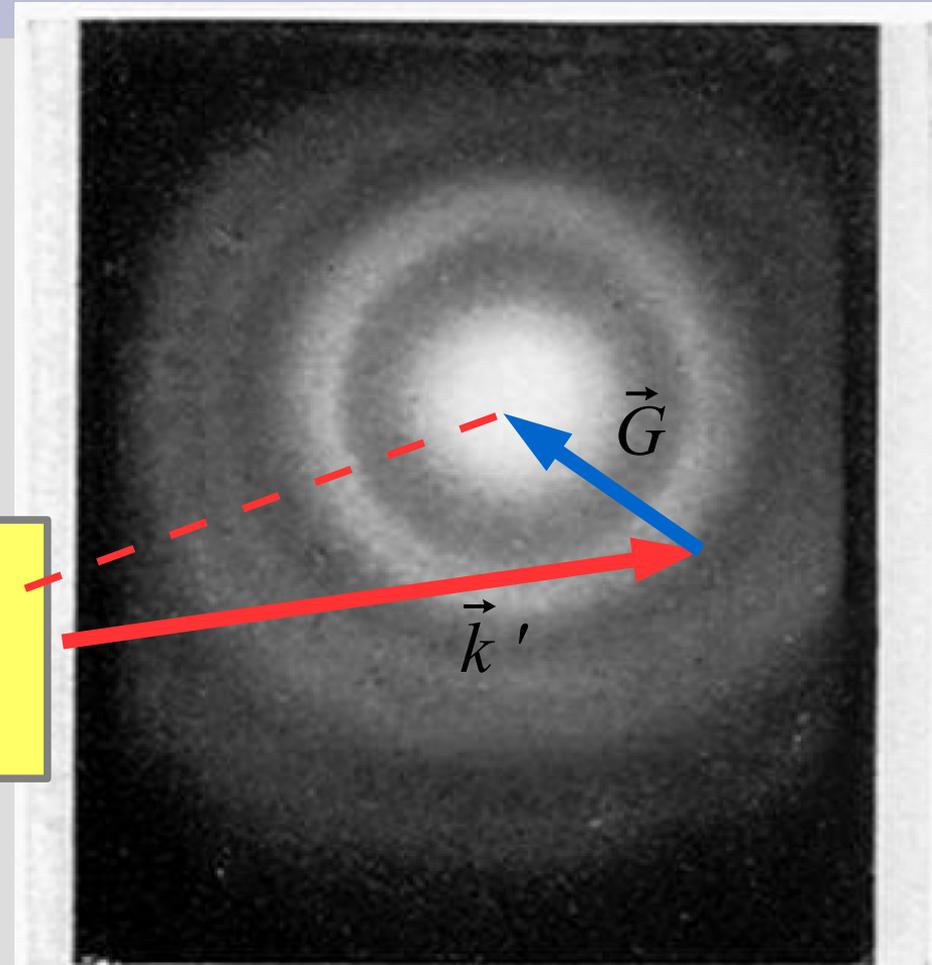
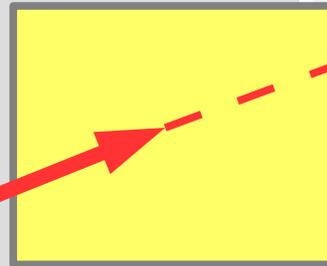


FIG. 4.—Gold.

G. P. Thomson, Experiments on the Diffraction of Cathode Rays, Proc. R. Soc. Lond. A, 117, 600 (1928)

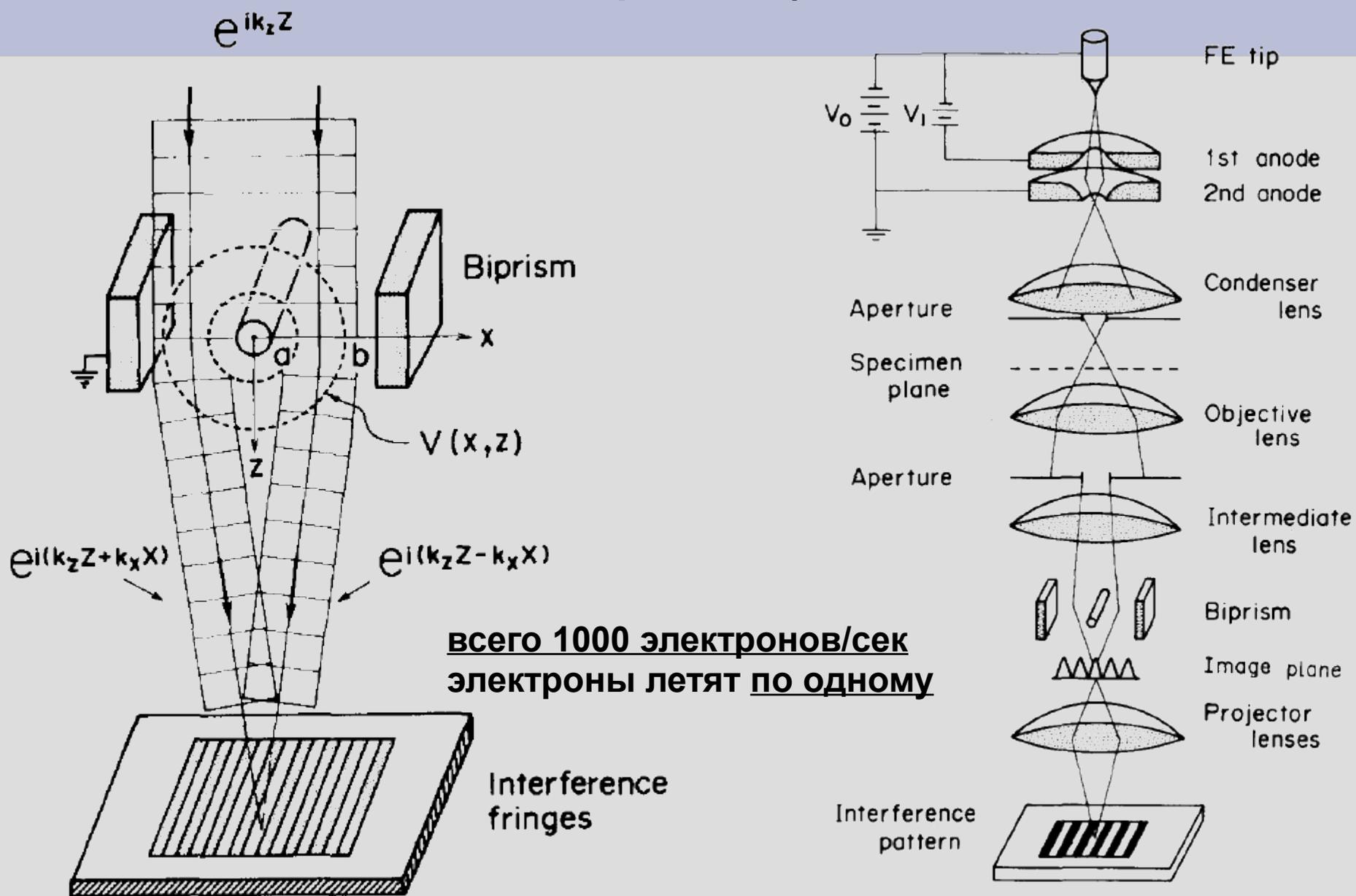
## Современное развитие методов дифракции частиц

- дифракция электронов LEED (low energy electron diffraction) — изучение структуры поверхности и тонких плёнок
- дифракция нейтронов — один из наиболее мощных способов анализа структуры кристаллов, в т.ч. магнитной структуры

## Промежуточный вывод

Гипотеза де Бройля оказалась верной — частицы дифрагируют на периодической структуре кристалла

# HITACHI Experiment (Опыт типа опыта Юнга с электронами)



## HITACHI Experiment: результат



[https://www.youtube.com/watch?v=PanqoHa\\_B6c](https://www.youtube.com/watch?v=PanqoHa_B6c)

## С кем интерферирует электрон?



Суммарная картина распределения электронов на детекторе после накопления статистики по 70000 электронов.

A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, and T. Kawasaki, Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern, American Journal of Physics, 57, 117 (1989)

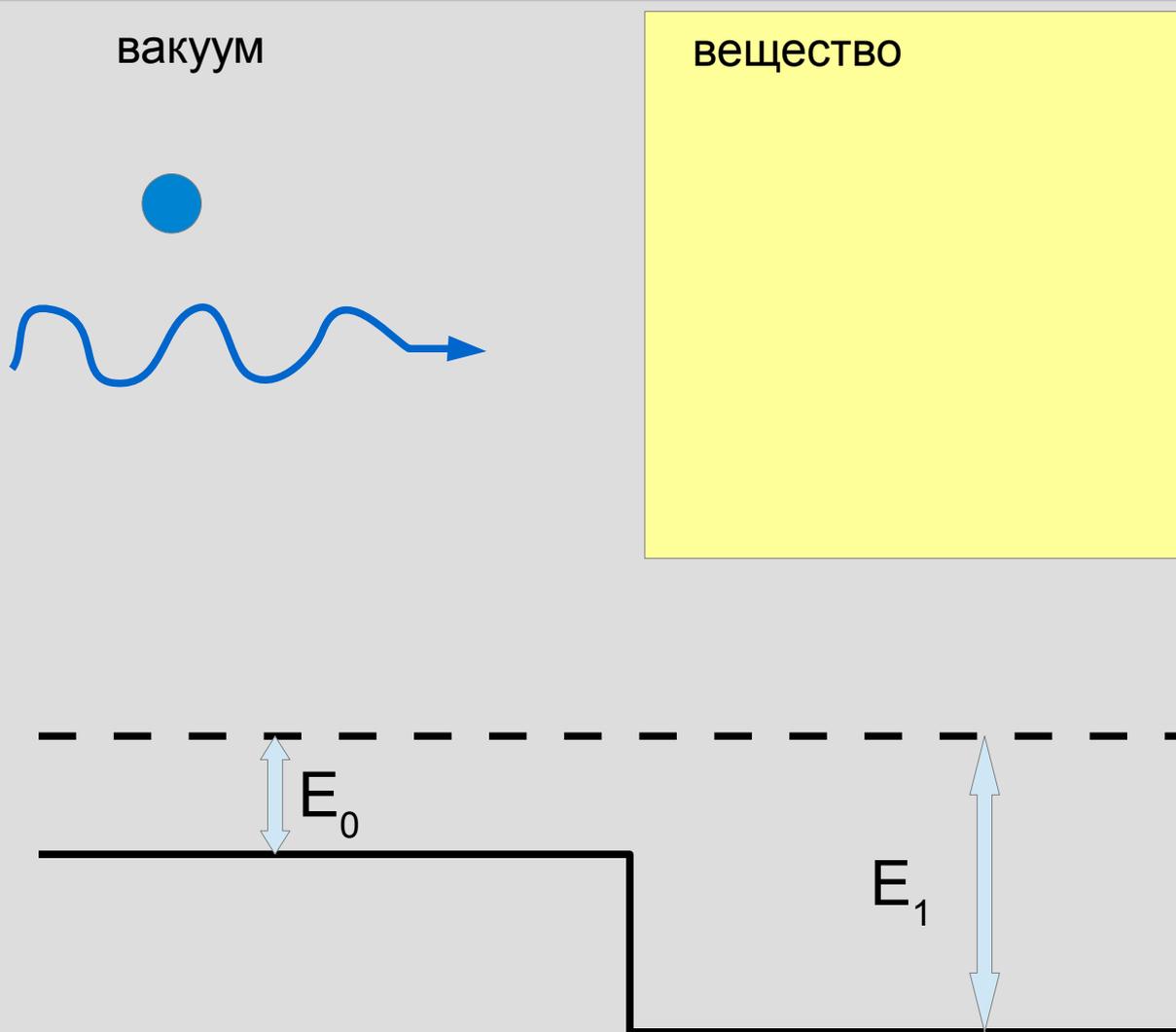
Электроны пролетают "по одиночке"

Но статистически формируется картина интерференции

Вывод 1: электрон (его волна де Бройля) интерферирует "сам с собой"

Вывод 2: мы в принципе не можем сказать с какой стороны от проволочки электронной бипризмы пролетела частица

## «Оптика» волн де Бройля



Если длина волны большая по сравнению с межатомным расстоянием, то приближение сплошной среды и учёт средней энергии взаимодействия частицы с веществом....

$$\lambda_0 = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m E_0}}$$
$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2 m E_1}} = \frac{h}{\sqrt{2 m (E_0 - U)}}$$
$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - U/E_0}}$$

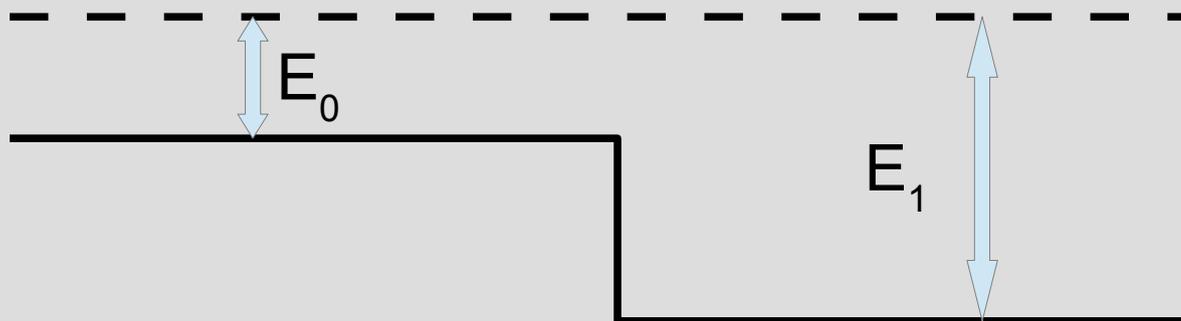
В «длинноволновом приближении» законы преломления на границе будут как в геометрической оптике.

Так как взаимодействие может быть любого знака — возможно и  $n < 1$  и эффект «полного внешнего отражения» (используется для удержания медленных нейтронов)

Может потребоваться учёт преломления при рассмотрении дифракции волн де Бройля.

ойля

Если длина волны большая по сравнению с межатомным расстоянием, то приближение сплошной среды и учёт средней энергии взаимодействия частицы с веществом....



$$\lambda_0 = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m E_0}}$$
$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2 m E_1}} = \frac{h}{\sqrt{2 m (E_0 - U)}}$$
$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - U/E_0}}$$

# Критерии квантовости системы

$$\Delta E \text{ vs. } \hbar \omega$$
$$L \text{ vs. } \lambda = \frac{h}{p}$$

если характерный квант энергии сравним с типичным изменением энергии в каком-то процессе

если характерный размер системы сравним с длиной волны де Бройля частицы

В частности, квантовые свойства начинают проявляться при достаточно низких температурах

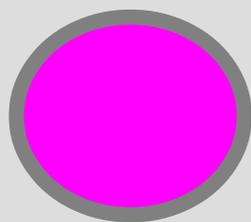
## Локализованная частица как волновой пакет.

$$f(\vec{k}) \propto \int g(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}$$
$$f(\omega) \propto \int g(t) e^{i\omega t} dt$$

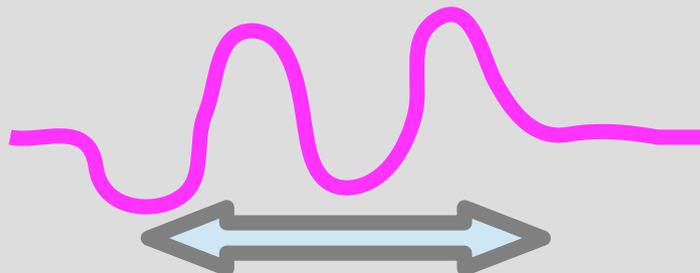
Преобразования Фурье сопрягают переменные  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{r}$ , а также  $\omega$  и  $t$

Волна с точно определённым волновым вектором делокализована по всему пространству, волна с точно определённой частотой существует бесконечное время

как быть с частицами?



=



Волновой пакет локализован в пространстве

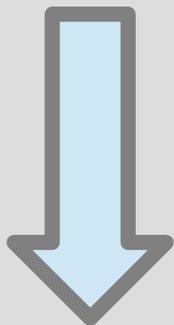
# Соотношения неопределённостей Гейзенберга:

## 1. Аналогия с волнами

$$f(\vec{k}) \propto \int g(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}$$
$$f(\omega) \propto \int g(t) e^{i\omega t} dt$$

координата-импульс

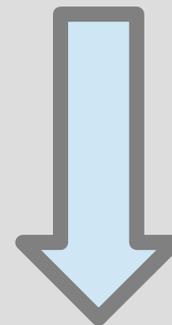
$$\Delta k_x \Delta x \simeq 1$$



$$\Delta p_x \Delta x \simeq \hbar$$

время-энергия

$$\Delta \omega \Delta t \simeq 1$$



$$\Delta E \Delta t \simeq \hbar$$

$$E = \hbar \omega$$
$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Запись немного условная, подразумеваются 'по определению'  
положительные неопределённости переменных

## Соотношения неопределённостей Гейзенберга: 2. Проблема измерения.

$$\Delta p_x \Delta x \simeq \hbar$$

$$\Delta E \Delta t \simeq \hbar$$

Невозможно **здать** импульс (энергию) частицы точнее, чем определяется этими соотношениями, для заданной точности установки координаты частицы (времени взаимодействия)



Невозможно **измерить** импульс (энергию) частицы точнее, чем определяется этими соотношениями, для заданной точности измерения координаты частицы (времени измерения)

Соотношения неопределённостей Гейзенберга:  
3. «Более точная» формулировка.

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

$$\sqrt{(\Delta x)^2} \cdot \sqrt{(\Delta p_x)^2} \geq \hbar/2$$

# Применения соотношений неопределенности для оценок

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$



Оценка некогерентности излучения атома/ядра по времени жизни возбужденного состояния

$$\sqrt{(\Delta x)^2} \cdot \sqrt{(\Delta p_x)^2} \geq \hbar/2$$



Оценка минимальной энергии системы, размера локализованного состояния. Например, для атома водорода:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

для основного состояния:  $\Delta p \sim p, \Delta x \sim r \rightarrow pr \simeq \hbar$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} - \frac{e^2}{r}$$

$$\min E \rightarrow r \simeq \frac{\hbar^2}{m e^2} = (\text{СГС!}) \approx 0.5 \text{ \AA}$$

$$E \simeq -\frac{m e^4}{\hbar^2} \approx -\frac{10^{-27} \times (5 \times 10^{-10})^4}{(10^{-27})^2} \text{ эрг} = -6 \times 10^{-11} \text{ эрг} = -40 \text{ эВ}$$

# Соотношение неопределённостей для времени и концепция виртуальных частиц



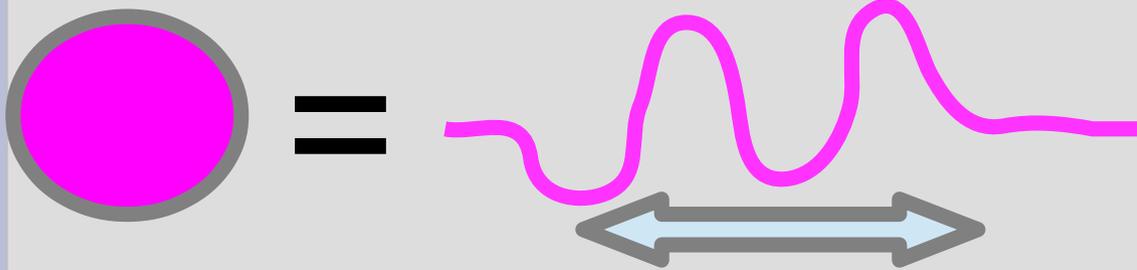
<http://www.treda.ru/i/photos/b/5586/898495a52b9c344d3a05a1848c879b86.jpg>

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

$$\Delta E = m c^2$$

$$r_{max} = c \Delta t = \frac{\hbar}{m c} = \frac{\Lambda}{2\pi}$$

# Волновая функция. Вероятностная интерпретация волновой функции.



Волновой пакет локализован в пространстве

Там где волна имеет ненулевую амплитуду есть вероятность обнаружить частицу

$$\Psi(\vec{r}, t)$$

← комплексная функция координат и времени (координатное представление)

$$w \propto \int |\Psi|^2 d^3 \vec{r}$$

← вероятность найти частицу в элементе объёма

## Волновая функция. Вероятностная интерпретация волновой функции.

Описание становится *вероятностным* (вспоминаем Hitachi experiment), в мире квантовой механики нет детерминизма, задача динамики в классической механике превращается в задачу об эволюции распределения вероятностей для наблюдаемых параметров

плотность вероятности обнаружить частицу

$$\Psi(\vec{r}, t)$$

← комплексная функция координат и времени

$$w \propto \int |\Psi|^2 d^3 \vec{r}$$

← вероятность найти частицу в элементе объёма

## Основное на лекции

$$\lambda = \frac{h}{p}$$



$$\Psi(\vec{r}, t)$$

$$w \propto \int |\Psi|^2 d^3 \vec{r}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

$$\sqrt{(\Delta x)^2} \cdot \sqrt{(\Delta p_x)^2} \geq \hbar/2$$