

## ЛОКАЛИЗАЦИЯ В ОДНОМЕРНЫХ НЕСОИЗМЕРИМЫХ СИСТЕМАХ

И. М. Сулов

Рассматривается задача о движении электрона в поле двух одномерных периодических потенциалов с несоизмеримыми периодами. Показано существование в такой системе перехода Андерсона и найдены пороги подвижности. Вычислен критический индекс радиуса локализации волновых функций; он оказался равным единице.

## Введение

В последнее время в связи с появлением новых экспериментальных методик стало возможным создание так называемых несоизмеримых систем (см. [1] и цитированную там литературу). Простейшим примером такой системы является моноатомная пленка с периодом  $a$ , лежащая на кристаллической подложке с периодом  $b$ , так что отношение  $\beta = a/b$  является иррациональным числом (случай рационального отношения неинтересен, так как система будет периодической с большим периодом). Нас будет интересовать случай металлической пленки на подложке из диэлектрика. В связи с электронными свойствами таких систем естественно возникает задача о движении электрона в поле двух периодических потенциалов с несоизмеримыми периодами.

Такие системы интересны тем, что они представляют собой промежуточный случай между периодическими и неупорядоченными системами — в них нет трансляционной симметрии, но нет и настоящего беспорядка; в частности, в них возможна андерсоновская локализация [2, 3], привлекающая в последнее время большое внимание. В пользу существования локализации в несоизмеримых системах свидетельствуют соображения, высказанные Азбелем [4], Обри [5], Соколовым и др. [6], а также результаты численных экспериментов [7, 8]. В настоящей работе будет показано, что для определенного класса несоизмеримых систем может быть построена последовательная теория локализации, вычислены пороги подвижности и критический индекс радиуса локализации.

Поскольку в несоизмеримых системах переход Андерсона имеется уже в одномерном случае, мы ограничимся рассмотрением этого случая; он имеет также приложение к системам типа ртутных цепочек (см. ссылки на экспериментальные работы в [4]). Заметим, что в настоящее время не известны другие модели, допускающие аналитическое решение, в которых имеется переход Андерсона (исключая решетки Бете).

## § 1. Локализация в простейшей модели

Простейшая модель, описывающая рассматриваемую ситуацию, — модель сильной связи с периодической модуляцией уровней:

$$a_{i+1} + a_{i-1} + V \cos(2\pi\beta l) a_i = E a_i, \quad (1)$$

где  $\beta$  — иррациональный параметр несоизмеримости (энергия измеряется в единицах интеграла перекрытия  $J$ ). Без ограничения общности можно считать  $\beta < 1$  (изменение  $\beta$  на целое число не меняет гамильтониана).

Как показано Азбелем [4], классификация состояний несоизмеримой

системы определяется разложением  $\beta$  в цепную дробь:

$$\beta = \frac{1}{n_1 + \beta_1} = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \beta_2}} = \dots = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}} \quad (2)$$

Причину появления в теории цепной дроби (2) легко понять. Иррациональное число  $\beta$  естественно мыслить как предел последовательности рациональных чисел. Из всех таких последовательностей выделенной является последовательность рациональных чисел  $p_n/q_n$ , получающихся обрывом цепной дроби (2) на  $n$ -м шаге. Эти числа (и только они) обладают определенным экстремальным свойством — каждое из них дает, в известном смысле, наилучшую оценку  $\beta$  (именно,  $p_n/q_n$  имеет минимальное значение величины  $|q_n\beta - p_n|$  среди всех дробей со знаменателем, не превышающем  $q_n$  [9]). Указанная последовательность рациональных чисел порождает последовательность периодических систем, экстремальным образом аппроксимирующих данную несоизмеримую. Периоды этих систем (межатомное расстояние  $L_0=1$ )

$$L_1 \sim \frac{1}{\beta}, \quad L_2 \sim \frac{1}{\beta\beta_1}, \quad \dots, \quad L_n \sim \frac{1}{\beta\beta_1 \dots \beta_{n-1}}, \quad \dots \quad (3)$$

являются характерными длинами рассматриваемой несоизмеримой системы и так или иначе проявляются во всех наблюдаемых явлениях.

Чтобы получить прозрачную физическую картину, будем рассматривать ситуацию, когда имеется иерархия длин (3), т. е. когда  $\beta, \beta_1, \beta_2 \dots \ll 1$ . Тем самым мы ограничиваем рассмотрение иррациональными числами определенного типа<sup>1)</sup>. Качественная картина для любых иррациональных чисел будет представлена в § 3.

Задача состоит в выяснении характера решений уравнения (1). При  $V=0$  его спектр представляет собой зону шириной  $\sim 1$ ; ясно, что эта зона сохранится в каком-то виде и при конечных  $V$ . Рассматривая край зоны, мы можем ввиду условия  $\beta \ll 1$  заменить разностный оператор дифференциальным (так как  $a_i$  будет медленно меняющейся функцией). Тогда получим обычное уравнение Шредингера с периодическим потенциалом:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + V \cos(2\pi\beta x) \right] a(x) = E a(x), \quad (4)$$

спектр которого состоит из совокупности зон с экспоненциально малой (по  $\beta$ ) шириной, расстояние между которыми  $\sim \beta$ . Таким образом, в этом приближении исходная зона уравнения (1) оказывается расщепленной на большое число ( $\sim 1/\beta$ ) узких зон (назовем их зонами первого порядка), а волновые функции являются бреховскими волнами.

Однако при переходе от (1) к (4) мы полностью потеряли несоизмеримость: в уравнении (1) два периода — 1 и  $1/\beta$ , тогда как в уравнении (4) только один —  $1/\beta$ . Оказывается, однако, что уравнение (4) дает правильное первое приближение, но дополнительно к нему нужно учесть основной эффект дискретности.

Для выяснения эффекта дискретности рассмотрим разностное уравнение типа (1), но с потенциалом в виде одной ямы (рис. 1, а) вместо периодического потенциала  $V \cos(2\pi\beta x)$ . Пусть в непрерывном приближении (при стремлении шага разностного оператора к нулю) в яме имеется уровень  $E_0$ . Тогда для дискретного уравнения также имеется уровень  $E$ , при малом шаге (или медленно меняющемся потенциале) близкий к  $E$ . Однако

<sup>1)</sup> Множество чисел, принадлежащих к этому типу, имеет мощность континуума. В качестве примера укажем иррациональности вида  $\beta = (n^2 + 1)^{1/2} - n$ ,  $n \gg 1$ .

дискретность приводит к новому эффекту — зависимости уровня  $E$  от фазы  $\varphi$  (рис. 1, а), определяющей положение дискретной системы точек, выделяемой разностным оператором, относительно дна ямы. Поскольку изменение  $\varphi$  на единицу ничего не меняет, эта зависимость будет периодической. Для медленно меняющегося потенциала эта зависимость описывается одной гармоникой (см. § 2):

$$E(\varphi) - E_0 \propto \cos 2\pi\varphi. \quad (5)$$

Вернемся к спектру уравнения (1) и рассмотрим одну из зон первого порядка. Эта зона возникла в результате уширения уровня, соответствующего движению в одном из минимумов потенциала, из-за туннелирования

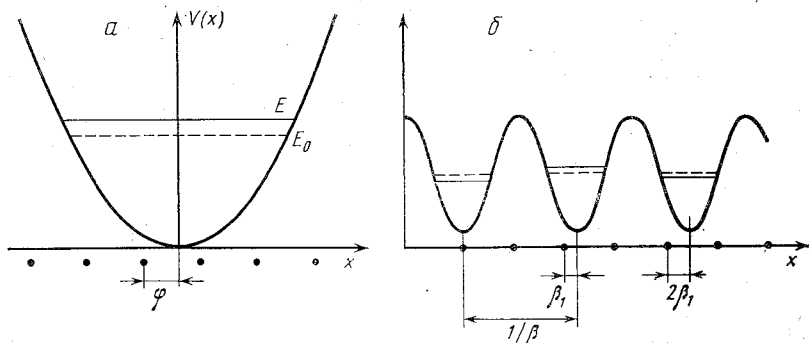


Рис. 1. а) Уровень дискретного уравнения Шредингера  $E$  осциллирует в зависимости от фазы  $\varphi$ , определяющей положение дискретной системы точек, на которых задано уравнение. б) Фаза  $\varphi$  различна для разных минимумов периодического потенциала

в соседние минимумы (малость  $\beta$  обеспечивает применимость приближения сильной связи). В непрерывном приближении, соответствующем уравнению (4), уровни во всех ямах одинаковы; при учете дискретности они оказываются разными, так как фаза  $\varphi$  различна для разных ям (рис. 1, б): для  $k$ -й ямы  $\varphi_k = \beta_1 k$ , где  $\beta_1 = 1/\beta - [1/\beta]$  (т. е. совпадает с  $\beta_1$  из (2)), так что уровень  $E_k$  вследствие (5) изменяется пропорционально  $\cos(2\pi\beta_1 k)$ . Учитывая перекрытие волновых функций, соответствующих движению в отдельных ямах (т. е. пользуясь дискретным аналогом приближения сильной связи) и ограничиваясь ближайшими соседями, получаем, что каждая из зон первого порядка описывается уравнением типа (1) с  $\beta_1$  вместо  $\beta$ . Следовательно, каждая из зон первого порядка устроена так же, как исходная зона, т. е. оказывается расщепленной на большое число ( $\sim 1/\beta_1$ ) зон второго порядка и т. д. — возникает так называемая чертова лестница [4].

Из сказанного ясна процедура построения волновых функций уравнения (1). Первоначально мы имеем функции Ванье в узлах решетки с периодом  $L_0 = 1$ , амплитуды которых описываются уравнением (1). В первом приближении, т. е. на первой ступеньке чертовой лестницы, мы должны сформировать новые функции Ванье (первого порядка), расположенные в минимумах потенциала  $\cos(2\pi\beta x)$ , т. е. на расстоянии  $L_1 \sim 1/\beta$  друг от друга (рис. 2, а), амплитуды которых описываются уравнением типа (1), но с коэффициентами  $\beta_1$  (из (2)) вместо  $\beta$  и  $V_1$  вместо  $V$ . Аналогично на  $n$ -й ступеньке чертовой лестницы из функций Ванье  $(n-1)$ -го порядка формируются функции Ванье  $n$ -го порядка с расстоянием  $L_n \sim 1/\beta\beta_1 \dots \beta_{n-1}$  между ними, амплитуды которых описываются уравнением (1) с  $\beta_n$ ,  $V_n$  вместо  $\beta$ ,  $V$ . Требуется выяснить, что получится в пределе  $n \rightarrow \infty$ .

Заметим, что формальному пределу  $n \rightarrow \infty$  можно придать физический смысл: он соответствует стремлению к бесконечности длины системы  $L$  (так как ступени, которым соответствуют длины  $L_n > L$ , не оказывают

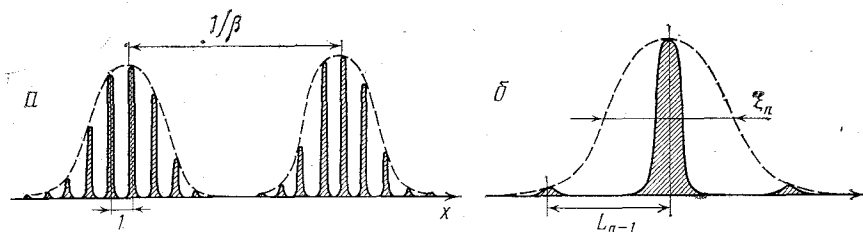


Рис. 2. а) Формирование функций Ванье первого порядка из исходных функций Ванье. б) Прекращение модификаций функций Ванье при  $V_n \approx 1/\beta_n$

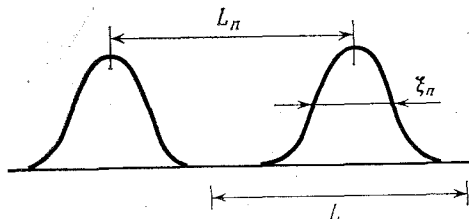


Рис. 3

влияния на свойства системы). Пусть  $L \sim L_n$ ; тогда на длине образца помещается одна функция Ванье  $n$ -го порядка (рис. 3). Так как функция Ванье убывает в обе стороны экспоненциально, то мы имеем некоторый аналог локализации; однако это не настоящая локализация, поскольку радиус локализации волновой функции  $\xi_n$  того же порядка, что и размер системы  $L$ . Увеличим размер системы до величины  $\sim L_{n+1}$ , тогда на длине образца поместится одна функция Ванье  $(n+1)$ -го порядка с радиусом локализации  $\xi_{n+1}$  и т. д. Очевидно, что для существования локализации необходимо  $\xi_n/L_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для этого в свою очередь необходимо, чтобы последовательность коэффициентов уравнения (1)  $V_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Нетрудно видеть, что при достаточно быстром росте  $V_n$  действительно имеется локализация. После того, как  $V_n$  достигает значения  $\sim 1/\beta_n$  (в единицах интеграла перекрытия  $J_n$ ), радиус локализации  $\xi_n$  функции Ванье  $n$ -го порядка становится меньше, чем расстояние  $L_{n-1}$  между функциями Ванье  $(n-1)$ -го порядка, и модификация функций Ванье перестает осуществляться (см. рис. 2, б) — функции Ванье  $n$ -го и  $(n-1)$ -го порядков оказываются фактически совпадающими. Тем самым радиус локализации  $\xi_n$  выходит на постоянное значение  $\xi$ .

Таким образом, задача сводится к нахождению закона преобразования коэффициентов  $V_n$ :

$$V_{n+1} = F_n(V_n) \quad (6)$$

и выяснению поведения  $V_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Как будет показано в § 2, преобразование (6) обладает следующими свойствами:

$$F_n(2) = 2, \quad (7a)$$

$$V < V_1 < V_2 < \dots \quad \text{при } V > 2, \quad (7б)$$

$$V_{n+1} \sim V_n^{1/\beta_n} \quad \text{при } V_n \gg 1, \quad (7в)$$

$$V > V_1 > V_2 > \dots \quad \text{при } V < 2, \quad (7г)$$

$$V_{n+1} \sim V_n^{1/\beta_n} \quad \text{при } V_n \ll 1. \quad (7д)$$

Таким образом, при  $V > 2$  последовательность  $V_n$  является возрастающей

и имеет при  $n \rightarrow \infty$  следующий порядок роста (при  $\beta \sim \beta_1 \sim \beta_2 \sim \dots$ ):

$$\ln \ln V_n \sim n. \quad (8)$$

Наоборот, при  $V < 2$  они убывают с той же скоростью. Очевидно,  $V=2$  является точкой перехода Андерсона: при  $V > 2$  все состояния рассматриваемой несоизмеримой системы локализованы, при  $V < 2$  все состояния делокализованы. Пороги подвижности по энергии в этой модели отсутствуют. Этот результат находится в согласии с данными численных экспериментов [7].

Выясним поведение радиуса локализации вблизи перехода Андерсона. Пусть  $N$  — номер ступени чертовой лестницы, на которой перестает происходить модификация функций Ваннье. Тогда, очевидно,

$$\xi \sim \xi_N \sim L_N \sim \frac{1}{\beta \beta_1 \dots \beta_{N-1}}. \quad (9)$$

Осталось определить  $N$ , т. е. выяснить, за сколько шагов последовательность  $V_n$  возрастает от значения  $V_0 = V \approx 2$  до значения  $V_N \sim 1/\beta_N$ , которое ввиду быстрого роста  $V_n$  можно считать не зависящим от  $N$ . Интересуясь значением  $\xi$  с точностью до постоянного множителя, можно определять  $N$  с точностью до аддитивной постоянной. Поэтому в качестве  $V_N$  можно взять любую константу: удобно выбрать ее близкой к 2. Разложив (6) вблизи перехода, получим уравнение

$$(V_{n+1} - 2) = A_n (V_n - 2), \quad V_0 = V,$$

решение которого

$$V_N - 2 = A_0 A_1 \dots A_{N-1} (V - 2). \quad (10)$$

Осталось положить  $V_N = \text{const}$  и исключить  $N$  из (9) и (10). Вычисление коэффициентов  $A_n$  в приближении сильной связи дает  $A_n = 1/\beta_n$  (см. § 2). Поэтому из (9) и (10) получим

$$\xi \propto (V - 2)^{-1}, \quad (11)$$

т. е. радиус локализации расходится вблизи перехода по степенному закону с универсальным критическим индексом, равным единице. Любопытно, что согласно численным расчетам для трехмерной модели Андерсона [10] этот критический индекс равен  $1,2 \pm 0,3$ , т. е. в пределах ошибки оказывается тем же самым.

По существу, мы получили однопараметрический скейлинг, близкий к предложенному в [11]. В частности, при  $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \dots$  преобразование (6) не зависит от  $n$  и может быть записано в виде «уравнения ренорм-группы»:

$$\Delta \ln V_n / \Delta \ln L_n = \beta(V_n), \quad (12)$$

где  $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$  и учтено, что  $L_n \sim 1/\beta^n$ , т. е.  $n \sim \ln L_n$ . «Функция Гелл-Мана — Лоу»  $\beta(V_n)$  монотонно возрастает (при увеличении  $V_n$ ) от  $-\infty$  до  $+\infty$  ( $\beta(V_n) \sim \ln V_n$  при  $V_n \gg 1$  и  $V_n \ll 1$ ), проходя через нуль при  $V_n = 2$ .

## § 2. Преобразование коэффициентов $V_n$ на чертовой лестнице

Прежде всего покажем, как вычисляется эффект осцилляции уровней дискретного уравнения Шредингера в зависимости от фазы  $\varphi$  (см. рис. 1, а). Для наглядности начнем с анализа дискретного осциллятора:

$$a_{l+1} + a_{l-1} + (l + \varphi)^2 a_l = E a_l. \quad (13)$$

Будем считать уравнение (13) заданным не на дискретном множестве точек  $x=0, \pm 1, \dots$ , а на всей оси  $x$ . С помощью операторов сдвига  $e^{\hat{p}}$  ( $\hat{p} = -i d/dx$ ) приведем его к виду

$$[2 \cos \hat{p} + x^2] a(x) = E a(x) \quad (14)$$

(фаза  $\varphi$  уничтожается заменой  $x + \varphi \rightarrow x$ ). Перейдя в импульсное представ-

ленице ( $\hat{p} \rightarrow p, x \rightarrow \hat{x} = id/dp$ ), получим уравнение Шредингера с периодическим потенциалом:

$$[-\hat{x}^2/dp^2 + 2 \cos p] a(p) = E a(p), \quad (15)$$

спектр которого есть совокупность зон. Вместо уровней дискретного осциллятора получились зоны, так как уравнение (14) имеет больше решений, чем (13) — в нем утеряна информация о фазе  $\varphi$ . Решения уравнения (13) отбрасываются из решений (14) с помощью граничных условий (в импульсном представлении)

$$a(p+2\pi) = e^{i2\pi\varphi} a(p). \quad (16)$$

Действительно, при  $\varphi=0$  функции  $a(x)$  отлична от нуля лишь в целых точках и ее фурье-образ периодичен с периодом  $2\pi$ ; сдвиг дискретной системы точек на  $\varphi$  приводит к появлению в (16) фазового множителя. Согласно (16), фаза  $\varphi$  играет для уравнения (15) роль квазиимпульса: при фиксированном  $\varphi$  из каждой зоны уравнения (15) отбирается уровень, соответствующий квазиимпульсу  $\varphi$ ; при изменении  $\varphi$  от нуля до единицы отбираемый уровень пробегает всю зону и возвращается в исходное положение. Таким образом,  $s$ -й уровень дискретного осциллятора изменяется по закону

$$E_s(\varphi) = \text{const} + \epsilon_s(\varphi),$$

где  $\epsilon_s(q)$  — закон дисперсии  $s$ -й зоны уравнения (15). Для квазиклассического потенциала спектр уравнения (15) описывается приближением сильной связи и закон дисперсии  $\epsilon_s(q)$  имеет вид простого косинуса — тем самым доказана формула (5).

По-существу, в приведенных рассуждениях мы не использовали никаких специфических свойств потенциала  $x^2$ . В случае произвольного потенциала  $V(x)$  мы приходим к уравнению (15), но с более общим законом дисперсии  $V(\hat{x})$  вместо  $\hat{x}^2 = -\hat{x}^2/dp^2$ .

Приступим к выводу закона преобразования (6): для определенности будем рассматривать первую ступень чертовой лестницы. Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$[\cos \hat{p} + 1/2 V \cos(2\pi\beta x)] a(x) = E a(x) \quad (A)$$

с граничным условием (16). Записав для него условия квазиклассического квантования, получим  $\sim 1/\beta$  уровней  $E_s$ , соответствующих движению в одном из минимумов потенциала (модуляция уровней в этом приближении отсутствует). Учет малой вероятности туннелирования в соседние минимумы приводит к уширению этих уровней в зоны с шириной

$$\Gamma_s^A = \Gamma_s(V/2) = \frac{2\omega}{\pi} \exp \left\{ - \int |p| dx \right\}, \quad |p(x)| = \text{arch} \{ 1/2 V \cos(2\pi\beta x) - E_s \} \quad (17)$$

(см. задачу 3 к § 55 в [12]); здесь  $\omega$  — частота классических колебаний, интегрирование в показателе экспоненты проводится по классически недоступной области. Ширина зоны  $\Gamma_s^A$  определяет интеграл перекрытия  $J_1$  на следующей ступени чертовой лестницы ( $\Gamma_s^A = 4J_1$ ). Как ясно из сказанного в начале параграфа, амплитуда модуляции уровней  $V_1$  определяется шириной зон  $\Gamma_s^B$  сопряженного с (A) уравнения ( $x \rightarrow \hat{p}, \hat{p} \rightarrow x$ )

$$[1/2 V \cos(2\pi\beta \hat{p}) + \cos x] a(x) = E a(x), \quad (B)$$

которое после замен  $x = 2\pi\beta \hat{x}, E = 1/2 V \bar{E}$  приводится к виду (A) с  $2/V$  вместо  $V/2$ , так что

$$\Gamma_s^B = 1/2 V \Gamma_s(2/V).$$

Выражая  $V_1 = \Gamma_s^B/2$  в единицах интеграла перекрытия  $J_1 = \Gamma_s^A/4$ , получаем

$$V_1^{(s)} = V \frac{\Gamma_s(2/V)}{\Gamma_s(V/2)}, \quad (18)$$

т. е. преобразование (6) с  $n=0$ . Такой же вид оно имеет на последующих ступенях.

Нетрудно дать формальный вывод выражения (18). Пренебрежем в (2) малой величиной  $\beta_1$ ; тогда несоизмеримая система превращается в периодическую с периодом из  $n_1$  атомов. Поэтому уравнение (А) с граничными условиями (16) будет иметь спектр из  $n_1$  зон с законами дисперсии

$$\varepsilon_s^A(p, \varphi), \quad 1 \leq s \leq n_1,$$

зависящими от  $\varphi$ , как от параметра. Ввиду периодичности системы, фаза  $\varphi$  будет одинакова для всех периодов потенциала уравнения (А), так что уравнение Шредингера для  $s$ -й зоны имеет вид

$$\varepsilon_s^A(p, \varphi) a(x) = E a(x). \quad (19)$$

При конечных, но малых  $\beta_1$  фаза  $\varphi$  становится медленно меняющейся в пространстве:  $\varphi = \beta_1 x$  (см. рис. 1, б), но уравнение (19) сохраняется в первом приближении. Поскольку фаза  $\varphi$  играет для сопряженного уравнения (В) роль квазипульса, а квазипульс  $p$  — роль фазы, то, очевидно,

$$\varepsilon_s^A(p, \varphi) = \varepsilon_s^B(\varphi, p), \quad (20)$$

где  $\varepsilon_s^B(p, \varphi)$  — закон дисперсии  $s$ -й зоны уравнения (В). В условиях применимости к уравнениям (А) и (В) приближения сильной связи  $\varepsilon_s^A$  и  $\varepsilon_s^B$  имеют косинусоидальный характер по  $p$ . Заметив также, что модуляция интегралов перекрытия мала по сравнению с модуляцией уровней, получим из (20), что

$$\varepsilon_s^A(p, \varphi) = \text{const} + \frac{1}{2} \Gamma_s^A \cos p + \frac{1}{2} \Gamma_s^B \cos 2\pi\varphi.$$

Подставляя это в (19) с  $\varphi = \beta_1 x$ , получаем уравнение вида (А) с  $V_1 = = 2\Gamma_s^B/\Gamma_s^A$  вместо  $V$ , что эквивалентно (18).

Свойства (7) преобразования (6) выводятся почти без вычислений. Свойство (7а) очевидно из (18). Свойства (7б) и (7г) следуют из того, что ширина разрешенных зон уравнения Шредингера уменьшается с ростом потенциала, причем в квазиклассике эта зависимость является очень сильной. Наконец, для установления свойства (7в) (и аналогично (7д)) заметим, что отношение ширины  $s$ -й зоны уравнения (А) к ширине  $s$ -й зоны уравнения (В) определяется при  $V \gg 1$  экспоненциально малым коэффициентом прохождения  $D$  через барьер, разделяющий два минимума потенциала  $V \cos(2\pi\beta x)$ ; в рассматриваемом случае  $D \sim V^{-\text{const}/\beta}$ . Вычисление коэффициентов  $A_n$  в (11) проводится по формулам (17) и (18) и не вызывает принципиальных трудностей.

Во всем предшествующем изложении мы существенно использовали приближение сильной связи, справедливость которого обеспечивалась малостью  $\beta, \beta_1, \dots$ . В связи с этим надо сделать два замечания.

1. При  $V_n \gg 1$  нарушается приближение сильной связи для уравнения (В), а при  $V_n \gg 1/\beta_n$  — квазиклассическое приближение для уравнения (А). Поэтому в уравнении (1) на последующих ступенях вместо  $\cos(2\pi\beta_n x)$  возникнет более сложная функция  $x$ , а также появится модуляция интегралов перекрытия. Тем не менее оценка (7в), в которой под  $V_h$  надо будет понимать отношение характерной величины потенциала к характерной величине интеграла перекрытия, сохранится и в этом случае.

Действительно, пусть для определенности  $V \gg 1$ . Уравнение Шредингера на первой ступени будет иметь вид (19), где  $\varepsilon_s^A(p, \varphi)$  является одним из  $n_1$  решений секулярного уравнения  $n_1$ -го порядка, которое, как легко показать, имеет следующую структуру:

$$\cos p + Q_{n_1}(E) = 0, \quad (21)$$

где  $Q_{n_1}$  — многочлен  $n_1$ -й степени относительно  $E$  со старшим коэффициентом

том  $\sim 1$ . При  $V \rightarrow \infty$  зоны уравнения Шредингера вырождаются в уровни

$$E_s = V \cos(2\pi s/n_1 + \varphi), \quad s=1, \dots, n_1,$$

а функции Ванье локализируются вблизи соответствующих узлов решетки. Следовательно, корни полинома  $Q_{n_1}(E)$  при больших  $V$  близки к  $E_s$ . Тогда из (21) легко получим, что зоны имеют ширину  $\sim 1/V^{n_1-1}$ , тогда как их смещение при изменении  $\varphi$  имеет порядок  $V$ . Следовательно, отношение характерной величины потенциала к величине интеграла перекрытия (которое есть не что иное, как  $V_1$ ) имеет порядок  $V^{n_1}$ , что согласуется с (7в).

Справедливости оценки (7в) достаточно для вывода о локализации; для вычисления же критического индекса существен лишь вид преобразования (6) при  $V_n \approx 2$ . Аналогичное замечание надо сделать для  $V_n \ll 1$ .

2. При  $V_n \approx 2$  приближение сильной связи неприменимо вблизи центра зоны  $n$ -го порядка, поэтому изложенная теория справедлива не для всех состояний. Тем не менее  $V=2$  является порогом локализации для всей зоны.

Проще всего в этом убедиться из следующих эвристических соображений [5]. Уравнение (А) при переходе в импульсное представление преобразуется само в себя с заменой  $V/2 \rightarrow 2/V$  (см. (В)), т. е. уравнение с  $V > 2$  переходит в уравнение с  $V < 2$  и наоборот. Локализации в координатном пространстве соответствует делокализация в импульсном и наоборот, поэтому, если пороговое значение  $V$  существует, то оно не может быть ничем, кроме 2. Нестрогость этих рассуждений ясна уже из того, что случай рациональных  $\beta$  ничем не выделен. Тем не менее при  $V=2$  уравнение (А) обладает дополнительной симметрией; покажем, как эта симметрия может быть использована последовательным образом.

Во-первых, легко показать существование порога локализации для всех состояний; действительно, из замечания 1 следует экспоненциальная локализация всех состояний при  $V \gg 1$ , откуда после фурье-преобразования получим делокализацию всех состояний при  $V \ll 1$ .

Далее, при  $V=2$  уравнения (А) и (В) совпадают, так что функции  $\epsilon_s^A(p, \varphi)$  и  $\epsilon_s^B(p, \varphi)$  тождественны. Тогда из (20) следует симметрия функции  $\epsilon_s^A(p, \varphi)$  относительно перестановки  $p$  и  $\varphi$ , а следовательно, ввиду (19), инвариантность гамильтониана на следующей ступени чертовой лестницы относительно перестановки  $p$  и  $x$ . Поэтому уравнения (А) и (В) будут совпадать и на этой ступени. Продолжая индукцию, получим, что инвариантность гамильтониана относительно перестановки  $p$  и  $x$  сохраняется на всех последующих ступенях чертовой лестницы.

Гамильтониан  $\epsilon_s^A(p, \beta, x)$ , вообще говоря, не может быть представлен в виде двух слагаемых, соответствующих потенциальной и кинетической энергиям. Ясно, однако, что смысл потенциала  $V_1$  имеет характерная амплитуда осцилляций  $\epsilon_s^A(p, \beta, x)$  при изменении  $x$ , тогда как порядок интеграла перекрытия  $J_1$  определяется амплитудой осцилляций по  $p$ . Из установленной симметрии  $\epsilon_s^A(p, \varphi)$  ясно, что  $V_1 \sim J_1$ . Аналогично  $V_n \sim J_n$  на произвольной  $n$ -й ступени, в частности, при  $n \rightarrow \infty$ . Такое положение может иметь место только в точке перехода — в противном случае отношение  $V_n/J_n$  должно стремиться при  $n \rightarrow \infty$  либо к нулю, либо к бесконечности (мы предполагаем, конечно, что ренорм-групповое преобразование (6) обладает качественно теми же свойствами, что и в условиях применимости приближения сильной связи). Таким образом,  $V=2$  является точкой перехода Андерсона для всех состояний.

### § 3. Некоторые обобщения

Ввиду указанной в конце предыдущего параграфа  $x, p$ -симметрии уравнения (1) не вызывает сомнений, что для модели, описываемой этим уравнением,  $V=2$  является точкой перехода Андерсона при произвольных (а не только малых)  $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots$ . Существование единого порога для всех состояний является специфическим свойством этой модели.



В общем случае несоизмеримая система описывается разностным уравнением с периодическими коэффициентами более общего вида, чем (1), — нужно учитывать интегралы перекрытия с большим числом ближайших соседей, а также их модуляцию, которая, так же как модуляция уровней, может быть произвольной периодической функцией. Однако при  $\beta \ll 1$  этот случай сводится к рассмотренному, так как к зонам первого порядка будет применимо приближение сильной связи и они будут описываться уравнением (1). Следовательно, локализация каждой из зон первого порядка будет происходить при определенном значении параметра  $V$ , однако для разных зон эти значения будут различными. Поэтому для исходной зоны

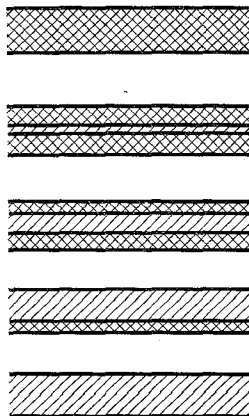


Рис. 4. Структура порога подвижности в несоизмеримых системах общего вида. Показано несколько зон первого порядка, штриховка — локализованные, двойная штриховка — делокализованные состояния. Пороги подвижности в зонах первого порядка устроены таким же образом

будут существовать два критических значения  $V_{c1}$  и  $V_{c2}$  таких, что при  $V > V_{c2}$  все состояния локализованы, при  $V < V_{c1}$  все делокализованы, а в интервале  $V_{c1} < V < V_{c2}$  имеются пороги подвижности по энергии.

Для несоизмеримых систем общего вида и не малых  $\beta$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2, \dots$  ситуация резко усложняется. Теперь локализация каждой из зон первого порядка будет происходить также в конечном интервале значений  $V$ ; то же справедливо для зон второго и т. д. порядков. Поэтому структура порога подвижности будет иметь вид, показанный на рис. 4. Так же устроены пороги подвижности в зонах более высокого порядка. Таким образом, происходит все более и более мелкое перемешивание локализованных и делокализованных состояний; оно прекращается на ступени, где впервые появляется малое  $\beta_k^2$ .

В последнем случае ( $\beta, \beta_1, \dots, \beta_{k-1} \sim 1, \beta_k \ll 1$ ) при вычислении порогов подвижности целесообразно «перепрыгнуть» через все ступени с немалыми  $\beta_n$ , т. е. представить  $\beta$  в виде

$$\beta = p_k / (q_k + \gamma), \quad \gamma \sim \beta_k / p_k \ll 1$$

( $p_k, q_k$  — целые), затем, решив секулярное уравнение  $q_k$ -го порядка, записать уравнения (19) с  $\phi = \gamma x$ . К этим уравнениям будет уже применимо квазиклассическое приближение.

Таким образом, во всех существенных случаях описание несоизмеримых систем сводится к уравнению (1). С другой стороны, единственное качественное отличие системы общего вида от модели § 1 состоит в зависимости критического значения  $V$  от энергии.

Автор признателен А. Ф. Андрееву, Ю. К. Джикаеву, И. М. Лифшицу, Л. П. Питаевскому и Я. Г. Синаю за обсуждение результатов работы.

<sup>2)</sup> Или продолжается до бесконечности, если ни одно из  $\beta_k$  не мало. Это, однако, маловероятно, так как множество иррациональных чисел со всеми  $\beta_k \sim 1$  (т. е. ограниченными  $n_k$ ) имеет меру нуль [9].

## Литература

1. *Покровский В. Л., Таланов А. Л.* ЖЭТФ, 1980, 78, 269.
2. *Anderson P. W.* Phys. Rev., 1958, 109, 1492.
3. *Садовский М. В.* УФН, 1981, 133, 223.
4. *Azbel M. Ya.* Phys. Rev. Lett., 1979, 43, 1954.
5. *Aubry S.* In: Proc. Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, March, 1979. Lectures in Physics. Berlin: Springer, 1979.
6. *Sokoloff J. B., Sacco J. E., Weisz J. F.* Phys. Rev. Lett., 1978, 41, 1561.
7. *Sokoloff J. B.* Phys. Rev., 1980, B22, 5823.
8. *Bulka B. R. J.* Phys. C, 1984, 14, L725.
9. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М., 1961, § 6.
10. *MacKinnon A., Kramer B.* Phys. Rev. Lett., 1981, 47, 1546.
11. *Abrahams E., Anderson P. W., Licciardello D. C., Ramakrishnan T. V.* Phys. Rev. Lett., 1979, 42, 673.
12. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Статистическая физика, ч. 2. М.: Наука, 1978.

Институт физических проблем  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
16.II.1982

---

## LOCALIZATION IN ONE-DIMENSIONAL INCOMMENSURABLE SYSTEMS

*I. M. Suslov*

The motion of electrons in the field of two one-dimensional periodic potentials with incommensurable periods is considered. The existence of an Anderson transition in such systems is demonstrated. The critical index of the wave function localization radius is calculated and found to be unity.

---