

НОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ ТЕОРИИ АНДЕРСОНОВСКОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ

И. М. Сулов

Рассматривается модель неупорядоченной системы, в которой фурье-компоненты потенциала являются случайными величинами, подчиненными определенной иерархии: максимальные из них имеют порядок V , следующие по величине — порядок βV и т. д. При $\beta \rightarrow 1$ такая модель переходит в обычную модель Андерсона. Для малых β построено разложение (21) критического индекса радиуса локализации ν по параметру β для произвольной размерности пространства d , что при $\beta \sim 1$ находится в качественном согласии с результатами для $d=2+\varepsilon$ и $d=\infty$; при $\beta \rightarrow 0$ значение ν совпадает с таковым для несоизмеримых систем. Индекс проводимости s связан с ν обычным скейлинговым соотношением $s=\nu(d-2)$. Уравнения ренормгруппы содержат случайные параметры, поэтому точка перехода Андерсона определяется не неподвижной, а стационарной точкой преобразования ренормгруппы — этим обеспечивается согласование скейлинга с обсуждаемыми в последнее время большими флуктуациями проводимости.

Центральной проблемой теории локализации является выяснение критического поведения проводимости σ и радиуса локализации волновых функций ξ вблизи перехода Андерсона [1–3]. Для энергий E , близких к порогу подвижности E_c , зависимости $\sigma(E)$ и $\xi(E)$ принято описывать степенными законами:

$$\sigma \propto (E - E_c)^s, \quad \xi \propto (E_c - E)^{-\nu}, \quad (1)$$

допуская для индексов s и ν значение 0; $s=0$ имеет место в случае моттовской минимальной проводимости [4]. В настоящее время значения индексов s и ν известны в двух случаях: а) для пространства размерности $d=2+\varepsilon$ [5–7]:

$$\nu = 1/\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad s = 1 + O(\varepsilon^3), \quad (2)$$

б) для $d=\infty$ (решетка Бете) [8, 9]:

$$\nu = 1/2, \quad s = 0 \quad (3)$$

(обсуждение кажущегося противоречия между результатами [8, 9] см. в [10]). Результаты для $d=2+\varepsilon$ находятся в согласии с гипотезой однопараметрического скейлинга [11], в частности, между индексами s и ν справедливо соотношение

$$s = \nu(d-2). \quad (4)$$

При $d=\infty$ соотношение (4) не выполняется, поэтому результаты (2) и (3) не могут быть согласованы без введения разделяющей их особой размерности d_{c2} , которую будем условно называть верхней критической (нижняя критическая размерность $d_{c1}=2$). В качестве d_{c2} предлагались значения 4, 6, 8, ∞ [11–14]; ввиду трудностей, которые в последнее время испытывает теория $2+\varepsilon$ [15, 16], возможно и $d_{c2}=2$. В результате становится неясным, какого поведения σ и ξ следует ожидать в трехмерном случае.

В создавшейся ситуации становится актуальной разработка методов, позволяющих рассматривать пространства произвольной размерности d ; такой метод предлагается ниже. Мы определим модели, которые естественно называть иерархическими (по аналогии с иерархическими моде-

лями Дайсона [17]); они характеризуются некоторым параметром β и при $\beta \rightarrow 1$ переходят в обычные модели Андерсона. При $\beta \ll 1$ удается построить разложение критических индексов по параметру β , результаты которого можно пытаться экстраполировать к $\beta=1$.

С другой стороны, при $\beta \rightarrow 0$ рассматриваемые модели переходят в периодические, осуществляя тем самым плавную интерполяцию между предельно неупорядоченными и упорядоченными системами. Поэтому значения β , отличные от единицы, могут также представлять физический интерес. Это подтверждается тем, что при $\beta \rightarrow 0$ значения индексов совпадают с таковыми для несоизмеримых систем [18], скейлинговая теория локализации в которых построена автором ранее [19]; к настоящему времени она получила математическое обоснование [20, 21].

1. Идея метода и основные результаты

В рассматриваемых моделях переход Андерсона существует уже в одномерном случае. Поясним идею метода на примере одномерной цепочки, описываемой дискретным уравнением Шредингера:

$$J(a_{i+1} + a_{i-1}) + V_i a_i = E a_i. \quad (5)$$

Потенциал V_i будем задавать в импульсном представлении:

$$V_i = \sum_q V(q) e^{iqi}. \quad (6)$$

Для полного определения потенциала на цепочке из 2^N атомов достаточно задать его фурье-компоненты для значений q вида $2\pi l/2^N$. Сделаем это следующим образом:

$$V(0) = V(2\pi) = 0, \quad V(\pi) = V, \quad V(\pi/2) \sim V(3\pi/2) \sim \beta V, \\ V(\pi/4) \sim V(3\pi/4) \sim V(5\pi/4) \sim V(7\pi/4) \sim \beta^2 V$$

и т. д. Наиболее интересна модель, в которой все $V(q)$ имеют гауссовские распределения¹⁾, причем

$$\langle V(q) \rangle = 0, \quad \langle V^*(q) V(q') \rangle = 0, \quad q \neq q', \quad (7) \\ \langle |V(q)|^2 \rangle = (\beta^n V)^2 \text{ для } q = (2l-1)\pi/2^n, \quad l=1, 2, \dots, 2^n.$$

Очевидно, при $\beta \rightarrow 1$ такая модель переходит в обычную модель Андерсона с гауссовским распределением уровней. Экстраполяция $\beta \rightarrow 1$ должна проводиться до взятия термодинамического предела, так как в противном случае модель не определена. Поскольку критические индексы будут определяться из уравнений ренормгруппы, описывающих связь параметров для конечных систем, то правильный порядок пределов достигается автоматически.

Покажем, что случай малых β действительно прост для анализа, построив нулевое приближение для уравнения (5) с потенциалом

$$V_i = V \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \varphi(l/2^n), \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & -1/2 + 2\pi l \leq x < 1/2 + 2\pi l \\ -1, & 1/2 + 2\pi l \leq x < 3/2 + 2\pi l. \end{cases} \quad (8)$$

При полном пренебрежении потенциалом V_i спектр уравнения (5) имеет вид $\varepsilon(k) = 2J \cos k$ и представляет собой зону шириной $\sim J$. Выделим из

¹⁾ Точнее, нужно положить $V_q = V_q^{(1)} + iV_q^{(2)}$, $V_q = V_{-q}^*$ и считать независимыми $V_q^{(1)}$ и $V_q^{(2)}$. Формально при $\langle V_q^{(1)2} \rangle = \langle V_q^{(2)2} \rangle$ это то же, что и (7).

потенциала максимальную фурье-компоненту $V(\sigma)$:

$$V_i = V(-1)^i + V_i', \quad (9)$$

и для начала пренебрежем потенциалом V_i' . Тогда уравнение (5) описывает периодическую систему и его спектр состоит из двух зон:

$$\varepsilon_{1,2}(k) = \pm [V^2 + 2J^2(1 + \cos 2k)]^{1/2} \approx \pm [V + (J^2/V) \cos 2k + \dots]. \quad (10)$$

Мы провели разложение, предполагая, что $V \gg J$. Тем самым спектр каждой из зон с точностью до тривиального масштабного преобразования совпадает со спектром исходной зоны; расстояние между зонами $\sim V$, а их ширина $\sim J^2/V \ll V$. Теперь нужно учесть оставшуюся часть потенциала V_i' , амплитуда которой $\sim \beta V$ и мала по сравнению с расстоянием между зонами; поэтому в нулевом приближении зоны можно считать независимыми и написать для каждой из них свое уравнение Шредингера.

По аналогии с выводом уравнения (1) из непрерывного уравнения Шредингера введем функции Ваннье, описывающие распределение амплитуд вблизи пары узлов, а волновую функцию всей системы будем искать в виде их суперпозиции с коэффициентами разложения b_m (m — номер пары). Для величин b_m составим уравнение, аналогичное (5).

$$J'(b_{m+1} + b_{m-1}) + u_m b_m = E b_m. \quad (11)$$

При $V \gg J$ функции Ваннье первой зоны локализованы в основном на четных, второй — на нечетных узлах, поэтому u_m — среднее значение V_i' по соответствующей функции Ваннье — совпадает соответственно с V_{2m}' или V_{2m+1}' . Как ясно из (8), потенциал V_i' , взятый в четных или нечетных точках, совпадает с исходным потенциалом V_i , но с константой V , замененной на $V' = \beta V$. Связь J' с параметрами уравнения (5) устанавливается из условия, чтобы в отсутствие V_i' спектр (11) совпадал с (10). В результате (11) имеет вид уравнения (5), в которое вместо V и J входят другие параметры V' и J' :

$$J' = \pm J^2/2V, \quad V' = \beta V. \quad (12)$$

Величину b_m можно рассматривать как амплитуду нахождения электрона на m -й паре узлов. Таким образом, при переходе от (5) к (11) мы сократили описание: волновые функции огрублены на масштабах двух межатомных расстояний, а не одного, как в уравнении (5). Продолжая такое сокращение описания дальше, вместо (12) получим

$$J^{(n+1)} = \pm J^{(n)2}/2V^{(n)}, \quad V^{(n+1)} = \beta V^{(n)}, \quad (13)$$

где $J^{(n)}$ и $V^{(n)}$ — параметры уравнения (5) на n -м шаге такой процедуры. Тот факт, что огрубленные волновые функции удовлетворяют уравнению (5) с измененными коэффициентами, означает существование скейлинга: при изменении параметров уравнения (5) огибающая его волновых функций изменяется, оставаясь подобной самой себе.

Поскольку вид волновых функций уравнения (5) зависит лишь от отношения $^2 |J/V|$, то удобно ввести величину

$$g^{(n)} = |J^{(n)}/V^{(n)}|, \quad (14)$$

представляющую собой параметр Таулеса [11] для блока размером 2^n . Из (13) для $g^{(n)}$ легко получается уравнение ренормгруппы

$$g^{(n+1)} = g^{(n)2}/2\beta, \quad g^{(0)} = J/V, \quad (15)$$

имеющее ту же функциональную форму, что постулировалась в [11]. Уравнение (15) имеет неподвижную точку $g_c = 2\beta$; при $g_0 > g_c$ отношение

² Знак J изменяется заменой $a_r \rightarrow a_l(-1)^l$, не меняющей формы огибающей волновой функции.

$|J^{(n)}/V^{(n)}|$ возрастает, и при больших n рассеивающий потенциал $V_l^{(n)}$ становится несущественным; при $g_0 < g_c$ отношение $|J^{(n)}/V^{(n)}|$ убывает, и при $n \gg 1$ можно пренебречь интегралом перекрытия $J^{(n)}$. Первый случай соответствует делокализованным, второй — локализованным состояниям, т. е. точка

$$g^{(0)} = J/V = 2\beta \quad (16)$$

является точкой перехода Андерсона. При малых β вблизи перехода $J^{(n)} \ll V^{(n)}$, чем и обосновывается сделанное допущение.

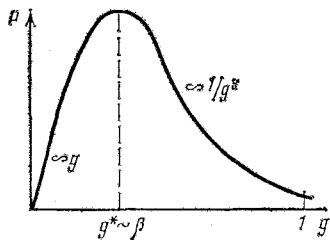


Рис. 1

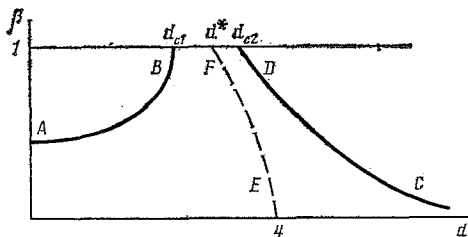


Рис. 2

Линеаризуя (15) вблизи g_c :

$$g^{(n+1)} - g_c = 2(g^{(n)} - g_c), \quad (17)$$

и учитывая, что единица длины с каждым шагом увеличивается вдвое, получим, что характерный масштаб, на котором отклонение $g^{(n)}$ от g_c становится порядка единицы, есть

$$\xi \propto |g^{(0)} - g_c|^{-1}. \quad (18)$$

В области локализованных состояний ξ совпадает с радиусом локализации и, следовательно, для индекса ν получим

$$\nu = 1, \quad \beta \rightarrow 0, \quad (19)$$

чем завершается построение нулевого приближения.

Для гауссовой модели (7) первое из уравнений (13) сохраняется, второе же справедливо лишь в статистическом смысле: $V^{(n+1)}$ имеет такое же распределение, как $aV^{(n)}$ с некоторым $a \sim 1$. Изменяя единицу измерения энергии на n -м шаге так, чтобы сделать все $V^{(n)}$ статистически эквивалентными, вместо (15) получим

$$g^{(n+1)} = \frac{1}{2a\beta} \left| \frac{V^{(n)}}{V^{(n+1)}} \right| g^{(n)2}. \quad (20)$$

Уравнение ренормгруппы приобретает важную качественную особенность: в нем появляется случайный параметр. Поэтому точка перехода Андерсона определяется не неподвижной, а стационарной точкой уравнения (20), т. е. условием, что последовательность $g^{(n)}$ представляет собой стационарный случайный процесс. Распределение $g^{(n)}$ в стационарной точке показано на рис. 1. По порядку величины $g^{(n)}$ совпадает с полной проводимостью блока размером 2^n [11] в единицах e^2/h . Следовательно, флуктуации проводимости на пороге подвижности оказываются порядка ее среднего значения в согласии с качественными выводами работы [22] (в [22], однако, изучалось среднеквадратичное отклонение $g^{(n)}$, которое, как ясно из рис. 1, может значительно превышать ширину распределения). Флуктуации $g^{(n)}$ не мешают существованию скейлинга, более того, они не изменяют результат (19).

Результат (19) оказывается справедливым для произвольной размерности пространства d . Стартуя с этого результата, можно построить разложение индекса ν по параметру иерархии β ; в настоящей работе вычис-

лена первая неисчезающая поправка:

$$\nu=1-(2/3 \ln 2)2^d(d-4)\beta^2 \ln(1/\beta)+O(\beta^2). \quad (21)$$

При вычислении с такой точностью преобразование ренормгруппы существенно усложняется: в уравнении (11) появляются интегралы перекрытия между следующими за ближайшими соседями, потенциал u_m становится нелокальным, кроме того, две зоны (10) становятся связанными (в d -мерном случае приходится учитывать связь между 2^d зонами). Несмотря на конструктивную многопараметричность получаемой таким образом ренормгруппы, окончательные результаты не противоречат гипотезе однопараметрического скейлинга, в частности сохраняется соотношение (4) между индексами s и ν : по-видимому, путем соответствующей замены переменных ренормгруппа может быть преобразована к явно однопараметрическому виду.

Экстраполяция $\beta \rightarrow 1$ является наиболее надежной в той области, где поправка к нулевому приближению мала, т. е. при $d \approx 4$. Поэтому основное предсказание, которое можно сделать для $\beta=1$:

$$\nu=1 \text{ для } d \approx 4. \quad (22)$$

Из теории $2+\epsilon$ ($\nu=1/\epsilon$) и численных расчетов [23] ($\nu=1,2 \pm 0,3$ для $d=3$) следует, что значение d , при котором $\nu=1$, ближе к 3. Ввиду логарифмической точности формулы (21) такое расхождение вряд ли можно считать существенным. Уменьшение ν с ростом d , предсказываемое формулой (21), также находится в качественном согласии с результатами (2) и (3).

Предполагаемая фазовая диаграмма в плоскости ($d\beta$) изображена на рис. 2. При малых d существует особая линия AB , выше которой все состояния локализованы: при больших d особая линия CD ограничивает область однопараметрического скейлинга — выше нее нарушается соотношение (4). Большой коэффициент при $\beta^2 \ln(1/\beta)$ в формуле (21) указывает на малый радиус сходимости разложения по β при больших d ; естественно думать, что он ограничивается линией CD , уравнение которой $\beta \sim 2^{-d/2}$ при $d \rightarrow \infty$. Вблизи линии EF , на которой $\nu=1$, радиус сходимости β -разложения максимален, и в окрестности $d^* \approx 3$ область однопараметрического скейлинга выходит на линию $\beta=1$. Кривые AB и CD пересекаются с прямой $\beta=1$ в точках d_{c1} и d_{c2} , которые следует отождествить с нижней и верхней критическими размерностями. На линии AB индекс ν обращается в бесконечность. Если предложенная картина правильна, то вычисление дальнейших членов разложения (21) позволит получить удовлетворительную теорию для трехмерного случая.

Можно определить иерархические модели, энергии узлов в которых имеют распределения с бесконечной дисперсией (разд. 3). В этом случае коэффициент при $\beta^2 \ln(1/\beta)$ в (21) изменяется, в частности значение d , при котором он обращается в нуль, оказывается меньше; возможно, это означает понижение d_{c1} и d_{c2} .

2. Определение модели

Мы будем рассматривать модели, описываемые дискретным уравнением Шредингера:

$$J \sum_{i=1}^d (a_{m+e_i} + a_{m-e_i}) + V_m a_m = E a_m, \quad (23)$$

где m нумерует узлы d -мерной кубической решетки, а e_i , $i=1, 2, \dots, d$ — ее базисные векторы; для дальнейшего удобно не фиксировать направление e_i , так как его выбор всегда будет ясен из контекста. Потенциал,

V_m будем задавать в импульсном представлении:

$$V_m = \sum_q V(q) e^{i q m}. \quad (24)$$

Удобно считать, что термодинамический предел берется по последовательности систем, имеющих форму d -мерного куба со стороной из 2^n атомов; тогда импульсное пространство можно считать дискретным, причем компоненты вектора q принимают лишь значения вида $\pi l / 2^{n-1}$, $l=0, 1, \dots, 2^n-1$.

Введем в импульсном пространстве множество точек Γ_p ($p=0, 1, 2, \dots$) как совокупность векторов вида

$$q = (\pi l_1 / 2^{p-1}, \pi l_2 / 2^{p-1}, \dots, \pi l_d / 2^{p-1}), \quad l_i = 0, 1, \dots, 2^{p-1}.$$

Множество точек, содержащихся в Γ_{p+1} , но не содержащихся в Γ_p , назовем Ω_p :

$$\Omega_p = \Gamma_{p+1} / \Gamma_p.$$

Множества Ω_p для двумерного случая показаны на рис. 3. Отметим два тождества, непосредственно следующих из данных определений:

$$\sum_{q \in \Gamma_n} \sum_{k \in \Gamma_p} f(q+k/2^n) = \sum_{q \in \Gamma_{p+n}} f(q), \quad (25)$$

$$\sum_{q \in \Omega_p} f(q) = \sum_{q \in \Omega_{p-n}} \sum_{a \in \Gamma_n} f(q/2^n + a). \quad (26)$$

Фурье-компоненту с $q=0$ в (24) можно считать равной нулю, так как она приводит лишь к сдвигу начала отсчета энергии. Остальные фурье-компоненты подчиним иерархии:

$$V(q) \sim \beta^p V \quad \text{для } q \in \Omega_p. \quad (27)$$

Рис. 3. Множества Ω_n для двумерного случая: ● — Ω_0 ; ○ — Ω_1 ; × — Ω_2

Для основной части изложения не требуется никаких предположений о свойствах $V(q)$, кроме условия $\beta \ll 1$. Конкретные количественные результаты будут получены для гауссовой модели, в которой все $V(q)$ имеют независимые гауссовские распределения, причем

$$\langle V(q) \rangle = 0, \quad \langle V^*(q) V(q') \rangle = 0, \quad q \neq q'; \quad \langle |V(q)|^2 \rangle = (\beta^n V)^2, \quad q \in \Omega_n. \quad (28)$$

При $\beta \rightarrow 1$ такая модель переходит в модель Андерсона с гауссовским распределением уровней. В разд. 8 мы определим модели, в которых распределение уровней имеет бесконечную дисперсию.

Аналоги множеств Γ_p и Ω_p в координатном пространстве обозначим γ_p и ω_p :

$$\gamma_p: m = (m_1, m_2, \dots, m_d), \quad m_i = 0, 1, \dots, 2^p - 1; \quad \omega_p = \gamma_{p+1} / \gamma_p.$$

Для дальнейшего удобно определить оператор π -периодизации Q_π^k , превращающий функцию $f(k)$, 2π -периодическую по всем компонентам, в π -периодическую функцию:

$$Q_\pi^k f(k) = \frac{1}{2^d} \sum_{a \in \Gamma_1} f(k+a).$$

Суммы по всем q нам часто будет удобно записывать в виде

$$\sum_q \dots \rightarrow \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q \in \Omega_p} \dots$$

3. Формальное построение ренормгруппы

1. Выясним общую структуру ренормгруппы для произвольных β . Вычисления удобно проводить в импульсном представлении, в котором уравнение (23) имеет вид

$$\left(\sum_{i=1}^d 2J \cos k_i \right) a(\mathbf{k}) + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q} \in \Omega_p} V(\mathbf{q}) a(\mathbf{k}+\mathbf{q}) = E a(\mathbf{k}). \quad (29)$$

На n -м шаге ренормгруппы сохраним в (29) фурье-компоненты с $p=0, 1, \dots, n-1$; ввиду $V(0)=0$ уравнение примет вид

$$\left(\sum_{i=1}^d 2J \cos k_i \right) a(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{q} \in \Gamma_n} V(\mathbf{q}) a(\mathbf{k}+\mathbf{q}) = E a(\mathbf{k}).$$

Сдвигая аргумент \mathbf{k} на всевозможные $\mathbf{k}_0 \in \Gamma_n$ и учитывая, что $\mathbf{q} + \mathbf{k}_0$ после приведения к интервалу $(0, 2\pi)$ принадлежит Γ_n , получим систему 2^{nd} уравнений относительно 2^{nd} величин $a(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)$, $\mathbf{k}_0 \in \Gamma_n$. Решив ее, найдем собственные значения $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ и собственные функции $a_s(\mathbf{k})$, $s=1, 2, \dots, 2^{nd}$. Будем искать решение (29) в виде

$$a(\mathbf{k}) = \sum_{s=1}^{2^{nd}} b_s(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}), \quad b_s(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) = b_s(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k}_0 \in \Gamma_n. \quad (30)$$

Подставляя в (29), пользуясь соотношениями ортогональности для $a_s(\mathbf{k})$, соотношением (26), $\pi/2^{n-1}$ -периодичностью спектров $\varepsilon_s(\mathbf{k})$:

$$\varepsilon_s(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) = \varepsilon_s(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k}_0 \in \Gamma_n, \quad (31)$$

вводя обозначение

$$V_{ss'}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{k}_0, \mathbf{q}_0 \in \Gamma_n} V\left(\frac{\mathbf{q}}{2^n} + \mathbf{q}_0\right) a_s^*\left(\frac{\mathbf{k}}{2^n} + \mathbf{k}_0\right) a_s'\left(\frac{\mathbf{k}+\mathbf{q}}{2^n} + \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}_0\right) \quad (32)$$

и проводя масштабное преобразование

$$b_s(\mathbf{k}) = \tilde{b}_s(2^n \mathbf{k}), \quad \varepsilon_s(\mathbf{k}) = \tilde{\varepsilon}_s(2^n \mathbf{k}), \quad 2^n \mathbf{k} = \tilde{\mathbf{k}}, \quad (33)$$

получим, опуская тильды,

$$b_s(\mathbf{k}) [\varepsilon_s(\mathbf{k}) - E] + \sum_{s'=1}^{2^{nd}} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q} \in \Omega_p} V_{ss'}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) b_{s'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = 0. \quad (34)$$

(ниже в этом разделе аналогичное преобразование проводится более подробно). Смысл проведенных преобразований объясняется в разд. 1 на более простом примере: мы исключили фурье-компоненты потенциала с периодом меньше, чем 2^n (в определении $V_{ss'}$ (32) входят лишь $V(\mathbf{q})$ с $\mathbf{q} \in \Omega_p$ для $p \geq n$), переходом к амплитудам $b_s(\mathbf{k})$ сократили описание, огрубив волновые функции на масштабах 2^n , и провели масштабное преобразование (33), в 2^n раз увеличив единицу измерения длины.

Уравнение (34) есть уравнение Шредингера на n -м шаге ренормгруппы. По виду оно аналогично исходному уравнению (29), отличаясь от него следующими особенностями: а) оно описывает не одну, а 2^{nd} связанных зон; б) каждая зона имеет спектр общего вида $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ вместо простого косинусоидального спектра уравнения (29); в) потенциал в координатном представлении является нелокальным, что проявляется в зависимости его фурье-образа $V_{ss'}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ от \mathbf{k} . Последние два обстоятельства легко учитываются расширением функциональной формы уравнения, первое же представляет более существенную трудность, так как число зон нарастает с каждым шагом ренормгруппы. Если бы взаимодействие между всеми этими зонами было существенно, то ренормгруп-

па не могла бы иметь неподвижных точек и ни о каком скейлинге не могло бы быть и речи. Однако интуитивно ясно, что существенным являются лишь несколько зон вблизи исследуемого уровня энергии. Поэтому естественный алгоритм состоит в следующем: ограничиваемся конечным числом зон N вблизи изучаемого значения энергии, отбрасывая все прочие, возникающие при преобразованиях ренормгруппы; находим неподвижную точку и критические индексы; если при увеличении N значения индексов сходятся к постоянному пределу, то принятая схема корректна, если же этого не происходит, то скейлинг в системе отсутствует.

В изучаемых ниже иерархических моделях ограничение числа зон проводится формально строго по малому параметру β : в нулевом и первом порядках по β достаточно ограничиться одной зоной, при вычислениях с точностью β^2 следует сохранять 2^2 ближайших по иерархии зон.

2. Выведем формулы, связывающие параметры n -го и $(n+1)$ -го шагов ренормгруппы, сохраняя в (34) N связанных зон. В соответствии со сказанным уравнение Шредингера на n -м шаге ренормгруппы имеет вид

$$a_s(\mathbf{k}) [\varepsilon_s^{(n)}(\mathbf{k}) - E] + \sum_{s'=1}^N \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q} \in \Omega_p} V_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) a_{s'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = 0, \quad (35)$$

где величины $V_{ss'}$ выражаются через фурье-компоненты исходного потенциала (ср. с (32)):

$$V_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}_0 \in \Gamma_n} A_{ss'}^{(n)}\left(\mathbf{k}, \frac{\mathbf{q}}{2^n} + \mathbf{q}_0\right) V\left(\frac{\mathbf{q}}{2^n} + \mathbf{q}_0\right). \quad (36)$$

Нужно найти алгоритм вычисления $\varepsilon_s^{(n+1)}(\mathbf{k})$, $A_{ss'}^{(n+1)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ по известным $\varepsilon_s^{(n)}(\mathbf{k})$, $A_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$. Сохраним в (35) старшие по иерархии члены:

$$a_s(\mathbf{k}) [\varepsilon_s^{(n)}(\mathbf{k}) - E] + \sum_{s'=1}^N \sum_{\mathbf{q} \in \Omega_0} V_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) a_{s'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = 0. \quad (37)$$

Сдвигая аргумент \mathbf{k} на все возможные $\mathbf{k}_0 \in \Gamma_1$, получим систему $2^d N$ уравнений относительно $2^d N$ величин $a_s(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)$, $s=1, 2, \dots, N$, $\mathbf{k}_0 \in \Gamma_1$. Пусть $\mu_\nu(\mathbf{k})$ и $\mathbf{l}_\nu(\mathbf{k})$ — собственные значения и собственные векторы (37), $\nu=1, 2, \dots, 2^d N$; $\mathbf{l}_\nu(\mathbf{k})$ представляют собой столбцы $\|c_{s\nu}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)\|$, компоненты которых нумеруются индексами $s=1, 2, \dots, N$ и $\mathbf{k}_0 \in \Gamma_1$. Будем искать решение (35) в виде

$$a_s(\mathbf{k}) = \sum_{\nu=1}^{2^d N} b_\nu(\mathbf{k}) c_{s\nu}(\mathbf{k}), \quad b_\nu(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) = b_\nu(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k}_0 \in \Gamma_1. \quad (38)$$

Подставляя в (35) и воспользовавшись соотношениями ортогональности

$$\sum_{s=1}^N \sum_{\mathbf{k}_0 \in \Gamma_1} c_{s\nu}^*(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) c_{s\nu'}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) = \delta_{\nu\nu'}, \quad (39)$$

получим

$$[\mu_\nu(\mathbf{k}) - E] b_\nu(\mathbf{k}) + \sum_{s, s'=1}^N \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q} \in \Omega_{p+1}} \sum_{\nu'=1}^{2^d N} \sum_{\mathbf{k}_0 \in \Gamma_1} b_{\nu'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) V_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{q}) c_{s\nu}^*(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) c_{s'\nu'}(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{k}_0) = 0$$

Применяя к суммированию по \mathbf{q} формулу (26) с $n=1$, проводя замену

$\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}/2$ и вводя обозначения

$$\varepsilon_v^{(n+1)}(\mathbf{k}) = \mu_v(\mathbf{k}/2), \quad (40)$$

$$V_{vv'}^{(n+1)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \sum_{s, s'=1}^N \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Gamma_1} V_{ss'}^{(n)} \left(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{a}, \frac{\mathbf{q}}{2} + \mathbf{b} \right) \cdot c_{sv}^* \left(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{a} \right) c_{s'v'} \left(\frac{\mathbf{k} + \mathbf{q}}{2} + \mathbf{a} + \mathbf{b} \right), \quad a_v(\mathbf{k}) = b_v(\mathbf{k}/2), \quad (41)$$

получим

$$[\varepsilon_v^{(n+1)}(\mathbf{k}) - E] a_v(\mathbf{k}) + \sum_{v'=1}^{2^d N} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q} \in \Omega_p} V_{vv'}^{(n+1)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) a_{v'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = 0.$$

Оставляя в сумме по v' N зон, ближайших к исследуемому уровню энергии получим уравнение Шредингера $(n+1)$ -го шага ренормгруппы.

Из (36) и (41) с использованием (25) получим связь между $A_{ss'}^{(n+1)}$ и $A_{ss'}^{(n)}$:

$$A_{vv'}^{(n+1)}(2\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \sum_{s, s'=1}^N \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma_1} A_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k} + \mathbf{a}, \mathbf{q}) c_{sv}^*(\mathbf{k} + \mathbf{a}) c_{s'v'}(\mathbf{k} + \mathbf{a} + 2\mathbf{q}). \quad (42)$$

Формулы (40), (42) решают задачу нахождения $A_{ss'}^{(n+1)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ и $\varepsilon_s^{(n)}(\mathbf{k})$.

3. Уравнение (37) удобно перевести в координатное представление. Положим

$$a_s(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{m} \in \Gamma_1} d_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{m}}, \quad d_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) = d_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k}_0 \in \Gamma_1.$$

Для $d_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{k})$ нетрудно получить уравнение на собственные значения:

$$\sum_{s'=1}^N \sum_{\mathbf{m}' \in \Gamma_1} H_{ss'}^{m\mathbf{m}'} d_{s'}^{m'}(\mathbf{k}) = E d_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{k}), \quad (43)$$

где введены обозначения

$$H_{ss'}^{m\mathbf{m}'} = [\delta_{ss'} \varepsilon_s^{m'-m}(\mathbf{k}) + W_{m'}^{ss'}(\mathbf{k}; m' - m)] \exp[i\mathbf{k}(m' - m)], \quad (44)$$

где

$$\varepsilon_s^{\mathbf{m}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2^d} \sum_{\mathbf{k}_0 \in \Gamma_1} \varepsilon_s^{(n)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{m}), \quad (45)$$

$$W_n^{ss'}(\mathbf{k}; \mathbf{m}) = \frac{1}{2^d} \sum_{\mathbf{q} \in \Omega_0} \sum_{\mathbf{k}_0 \in \Gamma_1} V_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{q}) \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{m} + i\mathbf{q}\mathbf{n}).$$

Если $d_{sv}^{\mathbf{m}}$ — нормированный собственный вектор (43), то нормированные $c_{sv}(\mathbf{k})$ определяются формулой

$$c_{sv}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2^{d/2}} \sum_{\mathbf{m} \in \Gamma_1} d_{sv}^{\mathbf{m}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{m}}.$$

Удобство уравнения (43) по сравнению с (37) состоит в том, что в иерархических моделях с $\beta \ll 1$ недиагональные матричные элементы гамильтониана \hat{H} в (43) малы по сравнению с расстояниями между его уровнями, что позволяет использовать обычную теорию возмущений (в форме Бриллюэна — Вигнера) для вычисления его собственных значений E_v .

и ненормированных собственных функций φ_ν ($\nu = (\mathbf{m}, s)$):

$$E_{\nu_0} = H_{\nu_0\nu_0} + \sum_{\nu' \neq \nu_0} \frac{H_{\nu_0\nu'} H_{\nu'\nu_0}}{E_{\nu_0} - H_{\nu'\nu'}} + \sum_{\nu', \nu'' \neq \nu_0} \frac{H_{\nu_0\nu'} H_{\nu'\nu''} H_{\nu''\nu_0}}{(E_{\nu_0} - H_{\nu'\nu'}) (E_{\nu_0} - H_{\nu''\nu''})} + \dots, \quad (46)$$

$$(\varphi_\nu)_{\nu_0} = \delta_{\nu\nu_0} + \sum_{\nu' \neq \nu_0} \frac{H_{\nu'\nu_0}}{E_{\nu_0} - H_{\nu'\nu'}} \delta_{\nu\nu'} + \sum_{\nu', \nu'' \neq \nu_0} \frac{H_{\nu'\nu''} H_{\nu''\nu_0}}{(E_{\nu_0} - H_{\nu'\nu'}) (E_{\nu_0} - H_{\nu''\nu''})} \delta_{\nu\nu''} + \dots$$

Сформулируем окончательный алгоритм перехода с n -го на $(n+1)$ -й шаг ренормгруппы, проводя по ходу дела некоторые преобразования и переобозначения.

1) На n -м шаге известны величины $\varepsilon_s^{(n)}(\mathbf{k})$ и $A_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$, $s, s' = 1, 2, \dots, N$.

2) Вычисляем по формуле (36) $V_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ и по формуле (45) $\varepsilon_s^m(\mathbf{k})$ и $W_\infty^{s'}(\mathbf{k}; \mathbf{m})$, $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \gamma_1$, после чего составляем гамильтониан \hat{H} по его матричным элементам:

$$\bar{H}_{ss'}^{mm'} = \delta_{ss'} \varepsilon_s^{m'-m}(\mathbf{k}) + W_m^{ss'}(\mathbf{k}; \mathbf{m}' - \mathbf{m}). \quad (47)$$

3) Величины $E_\nu(\mathbf{k})$ и $T_{\nu\nu'}(\mathbf{k})$ даются формальными рядами ($\nu = (\mathbf{m}, s)$, $\nu' = (\mathbf{m}', s')$ и т. д., где $\mathbf{m}, \mathbf{m}', \dots \in \gamma_1$, $s, s', \dots = 1, 2, \dots, N$):

$$T_{\nu'\nu} = \frac{\bar{H}_{\nu'\nu}}{E_\nu - \bar{H}_{\nu'\nu'}} + \sum_{\nu'' \neq \nu} \frac{\bar{H}_{\nu'\nu''} \bar{H}_{\nu''\nu}}{(E_\nu - \bar{H}_{\nu'\nu'}) (E_\nu - \bar{H}_{\nu''\nu''})} + \dots, \quad (48)$$

$$E_\nu = \bar{H}_{\nu\nu} + \sum_{\nu' \neq \nu} \frac{\bar{H}_{\nu\nu'} \bar{H}_{\nu'\nu}}{E_\nu - \bar{H}_{\nu'\nu'}} + \sum_{\nu', \nu'' \neq \nu} \frac{\bar{H}_{\nu\nu'} \bar{H}_{\nu'\nu''} \bar{H}_{\nu''\nu}}{(E_\nu - \bar{H}_{\nu'\nu'}) (E_\nu - \bar{H}_{\nu''\nu''})} + \dots$$

4) Вычисляем величину

$$\bar{c}_{s\nu_0}(\mathbf{k}) = \left[\delta_{ss_0} + \sum_{\nu' \neq \nu_0} T_{\nu'\nu_0} \delta_{ss'} \right] \left(1 + \sum_{\nu' \neq \nu_0} |T_{\nu'\nu_0}|^2 \right)^{-1/2}. \quad (49)$$

5) Параметры $(n+1)$ -го шага определяются формулами

$$\varepsilon_\nu^{(n+1)}(\mathbf{k}) = E_\nu(\mathbf{k}/2), \quad (50)$$

$$A_{\nu\nu'}^{(n+1)}(2\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \exp(2^n i \mathbf{q} \mathbf{m}') \bar{Q}_\pi^{\mathbf{k}} \sum_{ss'=1}^N \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{m}' - \mathbf{m})] \cdot$$

$$\cdot A_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \bar{c}_{s\nu}^*(\mathbf{k}) \bar{c}_{s'\nu'}(\mathbf{k} + 2^n \mathbf{q}). \quad (51)$$

6) Из $2^d N$ значений индекса ν сохраняем N , соответствующих зонам, ближайшим к интересующему нас значению энергии.

4. Усеченная ренормгруппа

Чтобы сделать происхождение поправки к индексу ν более прозрачным, мы определим в этом разделе усеченную ренормгруппу, отложив построение полной ренормгруппы до разд. 6. Как ясно из разд. 3, преобразование ренормгруппы приводит к появлению в уравнении Шредингера n -го шага членов, не содержащихся в исходном уравнении (23); в рамках определяемой здесь усеченной ренормгруппы такие члены будут просто отбрасываться. Такая процедура позволяет получить точные значения индексов по крайней мере с исследуемой точностью β^2 ; дело в том, что появляющиеся в уравнениях полной ренормгруппы дополнительные члены приводят лишь к перенормировке точки перехода (разд. 6). К сожалению, мы не видим возможности доказать это иначе, чем построением полной ренормгруппы.

Сформулируем алгоритм усеченной ренормгруппы.

1) В уравнении (35) сохраняем одну зону и во всех выражениях опускаем индекс s .

2) На n -м шаге ренормгруппы $\varepsilon^{(n)}(\mathbf{k})$ и $A^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ имеют вид

$$\varepsilon^{(n)}(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^d 2J_i^{(n)} \cos k_i, \quad A^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = R^{(n)}(\mathbf{q}). \quad (52)$$

3) Гамильтониан \hat{H} определяется матричными элементами ($\mathbf{m} \in \gamma_i$):

$$\bar{H}_{\mathbf{m}\mathbf{m}} = W_{\mathbf{m}}^{(n)} = \sum_{\mathbf{q} \in \Omega_n} R^{(n)}(\mathbf{q}) V(\mathbf{q}) \exp(2^n i \mathbf{q} \mathbf{m}), \quad (53)$$

$$\bar{H}_{\mathbf{m}'\mathbf{m}} = \sum_{i=1}^d 2J_i^{(n)} \delta_{\mathbf{m}', \mathbf{m} + \mathbf{e}_i} \cos k_i, \quad \mathbf{m}' \neq \mathbf{m}.$$

4) Функции $E_{\mathbf{m}}(\mathbf{k})$ и $T_{\mathbf{m}'\mathbf{m}}(\mathbf{k})$ получаются из (48) заменой $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{m}$, $\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{m}'$ и т. д. Из 2^d возникающих зон для определенности будем выбирать зону, соответствующую узлу $\mathbf{m} = 0$. Функция $c(\mathbf{k})$ определяется выражением

$$c(\mathbf{k}) = \left[1 + \sum_{\mathbf{m}' \neq 0} T_{\mathbf{m}'0} \right] \left(1 + \sum_{\mathbf{m}' \neq 0} |T_{\mathbf{m}'0}|^2 \right)^{-1/2}. \quad (54)$$

5) Разложив функции $A^{(n+1)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ и $\varepsilon^{(n+1)}(\mathbf{k})$ в ряд Фурье по \mathbf{k} , сохраняем в первом случае нулевую, во втором — первые гармоники, получая параметры $(n+1)$ -го шага:

$$J_i^{(n+1)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int E_0(\mathbf{k}/2) \cos k_i d\mathbf{k}, \quad (55)$$

$$R^{(n+1)}(\mathbf{q}) = R^{(n)}(\mathbf{q}) \frac{1}{(2\pi)^d} \int c^*(\mathbf{k}) c(\mathbf{k} + 2^n \mathbf{q}) d\mathbf{k}$$

(интегрирование по зоне Бриллюэна, $0 \leq k_i \leq 2\pi$).

Выпишем первые четыре члена ряда теории возмущений для $E_0(\mathbf{k})$:

$$\begin{aligned} E_0 = & W_0 + \sum_{ij} \frac{2J_i \cos k_i 2J_j \cos k_j}{E_0 - W_{\mathbf{e}_i}} \delta_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j, 0} + \\ & + \sum_{ijl} \frac{2J_i \cos k_i 2J_j \cos k_j 2J_l \cos k_l}{(E_0 - W_{\mathbf{e}_i})(E_0 - W_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j})} \delta_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_l, 0} + \\ & + \sum_{ijlm} \frac{2J_i \cos k_i 2J_j \cos k_j 2J_l \cos k_l 2J_m \cos k_m}{(E_0 - W_{\mathbf{e}_i})(E_0 - W_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j})(E_0 - W_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_l})} \delta_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_m, 0}, \quad (56) \end{aligned}$$

где $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_l \in \omega_i$, суммирование проводится от 1 до d ; индекс n , указывающий номер шага ренормгруппы, в промежуточных выражениях будем опускать. Каждому неисчезающему члену ряда (56) соответствует траектория по сторонам d -мерного куба, выходящая из некоторой его вершины и возвращающаяся в нее в конце пути (но не ранее). Отбирая неисчезающие члены

$$\begin{aligned} E_0 = & W_0 + \sum_i \frac{4J_i^2 \cos^2 k_i}{E_0 - W_{\mathbf{e}_i}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{4J_i^2 \cos^2 k_i 4J_j^2 \cos^2 k_j}{(E_0 - W_{\mathbf{e}_i})(E_0 - W_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j})(E_0 - W_{\mathbf{e}_j})} + \\ & + \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{4J_i^2 \cos^2 k_i 4J_j^2 \cos^2 k_j}{(E_0 - W_{\mathbf{e}_i})^2 (E_0 - W_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j})} \end{aligned}$$

и исключая итерационным путем E_0 из правой части, получим

$$E_0(\mathbf{k}) = W_0 + \sum_i \frac{4J_i^2 \cos^2 k_i}{W_0 - W_{e_i}} - \sum_i \frac{16J_i^4 \cos^4 k_i}{(W_0 - W_{e_i})^3} + \\ + \sum_i \sum_{j \neq i} 8J_i^2 J_j^2 \cos^2 k_i \cos^2 k_j \times \\ \times \frac{(2W_0 - W_{e_i} - W_{e_j})(W_0 + W_{e_i+e_j} - W_{e_i} - W_{e_j})}{(W_0 - W_{e_i})^2 (W_0 - W_{e_j})^2 (W_0 - W_{e_i+e_j})} \quad (57)$$

Входящие в (54) суммы нам потребуются во втором порядке:

$$\sum_{m \neq 0} T_{m0} = \sum_i \frac{2J_i \cos k_i}{W_0 - W_{e_i}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{2J_i \cos k_i 2J_j \cos k_j}{(W_0 - W_{e_i})(W_0 - W_{e_i+e_j})}, \\ \sum_{m \neq 0} |T_{m0}|^2 = \sum_i \frac{4J_i^2 \cos^2 k_i}{(W_0 - W_{e_i})^2}. \quad (58)$$

Подставляя (58) в (54), а (54), (57) в (55) и вводя обозначение

$$g_i^{(n)} = |J_i^{(n)} / (W_0^{(n)} - W_{e_i}^{(n)})|, \quad (59)$$

получим систему уравнений ренормгруппы в виде

$$g_i^{(n+1)} = \left| \frac{W_0^{(n)} - W_{e_i}^{(n)}}{W_0^{(n+1)} - W_{e_i}^{(n+1)}} \right| \left(g_i^{(n)2} - 4g_i^{(n)4} + \sum_{j \neq i} 2Q_{ij}^{(n)} g_i^{(n)2} g_j^{(n)2} \right), \quad (60a)$$

$$R^{(n+1)}(\mathbf{q}) = R^{(n)}(\mathbf{q}) \left[1 - \sum_i 2g_i^{(n)2} (1 - \cos 2^n q_i) \right], \quad (60b)$$

$$W_m^{(n)} = \sum_{\mathbf{q} \in \Omega_n} R^{(n)}(\mathbf{q}) V(\mathbf{q}) \exp(2^n i \mathbf{q} \mathbf{m}), \quad (60b)$$

где введено обозначение

$$Q_{ij}^{(n)} = (2W_0^{(n)} - W_{e_i}^{(n)} - W_{e_j}^{(n)})(W_0^{(n)} + W_{e_i+e_j}^{(n)} - W_{e_i}^{(n)} - \\ - W_{e_j}^{(n)}) [(W_0^{(n)} - W_{e_i}^{(n)})(W_0^{(n)} - W_{e_i+e_j}^{(n)})]^{-1}.$$

5. Исследование уравнений ренормгруппы

1. В нулевом приближении уравнения (60) принимают вид

$$g_i^{(n+1)} = \left| \frac{Z_{e_i}^{(n)}}{Z_{e_i}^{(n+1)}} \right| g_i^{(n)2}, \quad Z_{e_i}^{(n)} = \sum_{\mathbf{q} \in \Omega_n} V(\mathbf{q}) [1 - \exp(2^n i \mathbf{q} \mathbf{e}_i)] \quad (61)$$

($R^{(n)}(\mathbf{q})=1$ ввиду начального условия $R^{(0)}(\mathbf{q})=1$). Анализ этих уравнений можно провести без каких-либо предположений о свойствах потенциала V_1 , кроме предположения о сильной иерархичности (27). Строгий смысл последнего следующий: существует такое число $\tilde{\beta} \ll 1$ ($\tilde{\beta} \sim \beta$), что после проведения масштабного преобразования

$$Z_{e_i}^{(n)} \rightarrow Z_{e_i}^{(n)} \tilde{\beta}^n, \quad J_i^{(n)} \rightarrow J_i^{(n)} \tilde{\beta}^n \quad (62)$$

все величины $Z_{e_i}^{(n)}$ оказываются одного порядка с типичным значением W . В результате преобразования (62) первое из уравнений (61) принимает вид

$$g_i^{(n+1)} = \tilde{\beta}^{-1} |Z_{e_i}^{(n)} / Z_{e_i}^{(n+1)}| g_i^{(n)2}. \quad (63)$$

Его решение

$$g_i^{(n)} = \tilde{\beta} \left[\frac{|Z_{e_i}^{(0)}|^{1/2}}{|Z_{e_i}^{(1)}|^{1/4} |Z_{e_i}^{(2)}|^{1/8} \dots |Z_{e_i}^{(n-1)}|^{1/2^{n-1}} |Z_{e_i}^{(n)}|^{1/2^n}} \frac{g_i^{(0)}}{\tilde{\beta}} \right]^{2^n} = \\ = \left(\frac{J_i^{(0)}}{\tilde{\beta} W_i} \right)^{2^n} \tilde{\beta} \frac{|Z_{e_i}^{(n+1)}|^{1/4} |Z_{e_i}^{(n+2)}|^{1/8} \dots}{|Z_{e_i}^{(n)}|^{1/2}}, \quad (64)$$

где введено обозначение

$$W_i = \prod_{n=0}^{\infty} |Z_{e_i}^{(n)}|^{1/2^{n+1}}. \quad (65)$$

Поскольку все $Z_{e_i}^{(n)} \sim W$, то $W_i \sim W$. Условие

$$J_i^{(0)} = \tilde{\beta} W_i \quad (66)$$

определяет точку перехода, при его выполнении каждый член последовательности

$$g_i^{c(n)} = \tilde{\beta} \frac{X_i^{(n)1/2}}{|Z_{e_i}^{(n)}|^{1/2}}, \quad X_i^{(n)} = |Z_{e_i}^{(n+1)}|^{1/2} |Z_{e_i}^{(n+2)}|^{1/4} \dots \quad (67)$$

является величиной порядка $\tilde{\beta}$. Линеаризуя (53) вблизи $g_i^{c(n)}$:

$$\delta g_i^{(n+1)} = 2\tilde{\beta}^{-1} |Z_{e_i}^{(n)}| / |Z_{e_i}^{(n+1)}| |g_i^{c(n)} \delta g_i^{(n)},$$

и делая подстановку $\delta g_i^{(n)} = g_i^{c(n)} x_i^{(n)}$, получаем

$$x_i^{(n+1)} = 2x_i^{(n)}. \quad (68)$$

Поскольку все $g_i^{c(n)}$ одного порядка, то скорость роста $x_i^{(n)}$ совпадает со скоростью роста $\delta g_i^{(n)}$; тем самым (68) является обобщением (17). Из (68) очевидным образом следует результат (19) для индекса v .

В случайных иерархических моделях величины W_i не имеют детерминированных значений, каждая из них имеет примерно такое же распределение, как $W_m^{(n)}$, поэтому пороги локализации по константам $J_i^{(0)}$ являются случайными. В частности, они различны для двух близких значений энергии. Поэтому при фиксированной реализации потенциала V_m и фиксированных $J_i^{(0)}$ локализованные и делокализованные состояния перемешаны в спектре уравнения (23) случайным образом (аналогичная ситуация имеет место в несоизмеримых системах [19]). Такая ситуация неустойчива относительно включения сколь угодно малого возмущения общего вида [4], так как оно приведет к смешиванию локализованных состояний с делокализованными и разрушению локализации. Это связано с тем тривиальным обстоятельством, что возмущение общего вида разрушает предполагаемую иерархию.

Пороги подвижности определяются d условиями вида (66). В физической постановке задачи на параметры модели накладываются дополнительные условия, обеспечивающие одновременное выполнение условий (66) для всех i при изменении некоторого внешнего параметра (такого, как концентрация примесей или уровень Ферми). При $\beta \sim 1$ аналоги величин W_i должны иметь детерминированные значения и указанные дополнительные условия обеспечиваются кубической симметрией: $J_1^{(0)} = J_2^{(0)} = \dots = J_d^{(0)}$, $W_1 = W_2 = \dots = W_d$. При $\beta \ll 1$ эти условия должны носить более сложный и искусственный характер.

2. Вычислим поправку к нулевому значению индекса ν для гауссовой модели (28). Введем величину

$$D_n(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma_n} \left| R^{(n)} \left(\frac{\mathbf{q}}{2^n} + \mathbf{a} \right) \right|^2. \quad (69)$$

С помощью (60б) и (25) для нее легко получить рекуррентное соотношение

$$D_{n+1}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{b} \in \Gamma_1} D_n \left(\frac{\mathbf{q}}{2} + \mathbf{b} \right) \left\{ 1 - 4 \sum_i g_i^{(n)2} \left[1 - \cos \left(\frac{\mathbf{q}_i}{2} + \mathbf{b}_i \right) \right] \right\}. \quad (69a)$$

Ввиду начального условия $D_0(\mathbf{q})=1$ величина $D_n(\mathbf{q})$ оказывается не зависящей от \mathbf{q} и удовлетворяющей рекуррентии

$$D_{n+1} = D_n 2^d \left(1 - 4 \sum_i g_i^{(n)2} \right). \quad (70)$$

Через величину D_n выражаются дисперсии величин $W_{\mathbf{m}}^{(n)}$, входящих в (60): $\langle |W_{\mathbf{m}}^{(n)}|^2 \rangle = (2^d - 1) (\beta^n V)^2 D_n$ (при выводе используется (25)).

Введем величину

$$U_{\mathbf{m}}^{(n)}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma_n} R^{(n)} \left(\frac{\mathbf{q}}{2^n} + \mathbf{a} \right) V \left(\frac{\mathbf{q}}{2^n} + \mathbf{a} \right) \exp[i\mathbf{m}(\mathbf{q} + 2^n \mathbf{a})], \quad (71)$$

где \mathbf{m} — произвольный вектор. При $\mathbf{m}=0$ величина $U_{\mathbf{m}}^{(n)}(\mathbf{q})$ совпадает с потенциалом $V^{(n)}(\mathbf{q})$, входящим в уравнение Шредингера (35) n -го шага усеченной ренормгруппы; величины $U_{\mathbf{m}}^{(n)}(\mathbf{q})$ с $\mathbf{m} \neq 0$ потребуются в разд. 6. Дисперсии $U_{\mathbf{m}}^{(n)}(\mathbf{q})$ также выражаются через D_n :

$$\langle |U_{\mathbf{m}}^{(n)}(\mathbf{q})|^2 \rangle = (\beta^{n+p} V)^2 D_n, \quad \mathbf{q} \in \Omega_p.$$

Проведя масштабное преобразование энергии, выравнивающее дисперсии величин $W_{\mathbf{m}}^{(n)}$, $U_{\mathbf{m}}^{(n)}(\mathbf{q})$ с разными n :

$$W_{\mathbf{m}}^{(n)} \rightarrow W_{\mathbf{m}}^{(n)} \beta^n D_n^{1/2}, \quad J_i^{(n)} \rightarrow J_i^{(n)} \beta^n D_n^{1/2}, \quad U_{\mathbf{m}}^{(n)}(\mathbf{q}) \rightarrow U_{\mathbf{m}}^{(n)}(\mathbf{q}) \beta^n D_n^{1/2}, \quad (72)$$

получим (60а) в виде

$$g_i^{(n+1)} = \frac{1}{\beta} \left| \frac{Z_{e_i}^{(n)}}{Z_{e_i}^{(n+1)}} \right| \left(g_i^{(n)2} - 2g_i^{(n)4} + 2g_i^{(n)2} \sum_{j \neq i} \kappa_{ij}^{(n)} g_j^{(n)2} \right), \quad (73)$$

где

$$\kappa_{ij}^{(n)} = 1 + \frac{(Z_{e_i}^{(n)} + Z_{e_j}^{(n)})(Z_{e_i}^{(n)} + Z_{e_j}^{(n)} - Z_{e_i+e_j}^{(n)})}{Z_{e_i}^{(n)} Z_{e_i+e_j}^{(n)}},$$

$$Z_{\mathbf{m}}^{(n)} = W_0^{(n)} - W_{\mathbf{m}}^{(n)}, \quad \bar{\beta} = 2^{d/2} \beta. \quad (74)$$

Линеаризуя уравнение (73) вблизи точки перехода, $g_i^{(n)} = g_i^{c(n)} + \delta g_i^{(n)}$,

и делая подстановку $\delta g_i^{(n)} = g_i^{c(n)} x_i^{(n)}$, получим уравнение, уточняющее (68):

$$x_i^{(n+1)} = (2 - 4g_i^{c(n)2}) x_i^{(n)} + \sum_{j \neq i} 4g_j^{c(n)2} \kappa_{ij}^{(n)} x_j^{(n)}. \quad (75)$$

(После проведения масштабного преобразования (72) величины $Z_{e_i}^{(n)}$ с нужной точностью можно считать не зависящими от $g^{(n)}$). Последовательность g достаточно знать в нулевом приближении (67); ввиду неза-

зависимости $Z_{e_i}^{(n)}$ с разными n распределение $g_i^{c(n)}$ является стационарным. Оно вычисляется из (67) по правилам теории вероятностей:

$$P(g) = \int_{-\infty}^{\infty} dZ_{e_i} \int_0^{\infty} dX_i P_Z(Z_{e_i}) P_X(X_i) \delta\left(g - \beta \frac{X_i^{1/2}}{|Z_{e_i}|^{1/2}}\right) = \\ = \frac{4\beta^2}{g^3} \int_0^{\infty} dX_i X_i P_X(X_i) P_Z\left(\frac{\beta^2 X_i}{g^2}\right).$$

Отсюда легко найти асимптотики (см. рис. 3):

$$P(g) = \begin{cases} (4\beta^2/g^3) P_Z(0) \bar{X} \sim \beta^2/g^3, & g \gg \beta, \\ (2g/\beta^2) P_X(0) |Z| \sim g/\beta^2, & g \ll \beta. \end{cases} \quad (76)$$

3. Анализ уравнения (75) осложняется взаимной зависимостью $g_i^{c(n)}$ с разными n и расходимостью средних $(g_i^c)^2$ и $\kappa_{ij}(g_i^c)^2$. Сделаем подстановку $x_i^{(n)} = 2^n y_i^{(n)}$ и запишем (75) в векторном виде:

$$\mathbf{y}^{(n+1)} = (1 + \hat{A}_n) \mathbf{y}^{(n)}, \quad (77)$$

где \hat{A}_n — случайная матрица. Уравнения такого вида изучаются в теории одномерной локализации [24, 25]; они характеризуются показателем экспоненциального роста, с которым происходит нарастание $\mathbf{y}^{(n)}$ для начальных условий общего вида. Именно этот показатель представляет для нас интерес, так как он характеризует скорость ухода системы из стационарной точки.

Для исключения взаимной зависимости матриц \hat{A}_n проитерируем уравнение (77) N раз ($1 \ll N \ll 1/\beta^2$):

$$\mathbf{y}^{(n+N)} = (1 + \hat{B}_n) \mathbf{y}^{(n)}, \quad \hat{B}_n \equiv \sum_{m=0}^{N-1} \hat{A}_{n+m}.$$

Корреляции между $X_i^{(n)}$ и $Z_{e_i}^{(n)}$ с разными n экспоненциально убывают:

$$\overline{X_i^{(n)} X_j^{(n+l)}} - \overline{X_i^{(n)}} \overline{X_j^{(n+l)}} \sim 1/2^l, \quad \overline{X_i^{(n)} Z_{e_j}^{(n+l)}} - \overline{X_i^{(n)}} \overline{Z_{e_j}^{(n+l)}} \sim 1/2^l,$$

и при больших N матрицы \hat{B}_n становятся независимыми. Вводя функции распределения $P_n\{y_i\}$ компонент $\mathbf{y}^{(n)}$ и $P_B\{B_{ij}\}$ элементов матриц \hat{B}_n , получим из (75)

$$P_{n+N}\{y_i\} = \int \dots \int \left[\prod_{i=1}^d \delta(y_i - \tilde{y}_i - B_{ij} \tilde{y}_j) \right] P_B\{B_{ij}\} P_n\{\tilde{y}_i\} \cdot \\ \cdot \left[\prod_{i=1}^d d\tilde{y}_i \right] \left[\prod_{ij=1}^d dB_{ij} \right]. \quad (78)$$

Ввиду расходимости средних \bar{B}_{ij} вместо $P_B\{B_{ij}\}$ удобно пользоваться характеристической функцией

$$\chi_B\{\theta_{ij}\} = \int \dots \int P_B\{B_{ij}\} \exp(iB_{ij}\theta_{ij}) \prod_{ij} dB_{ij}. \quad (79)$$

В низшем порядке по β характеристическая функция имеет вид (см. ниже)

$$\chi_B\{\theta_{ij}\} = 1 + 2iNg^2 \left[- \sum_i \theta_{ii} + \kappa \sum_i \sum_{j \neq i} \theta_{ij} \right] + O(\beta^2), \quad (80)$$

где

$$g^2 = \beta^2 \ln(1/\beta), \quad \kappa = 1/3, \quad (81)$$

что можно переписать в виде

$$\chi_B\{\theta_{ij}\} = \exp\{i\bar{B}_{ij}\theta_{ij}\} + O(\beta^2), \quad \bar{B}_{ii} = -2Ng^2, \quad \bar{B}_{ij} = 2N\kappa g^2, \quad i \neq j.$$

Подставляя в (78), (79), получим

$$P_{n+N}\{y_i\} = P_n\{y_i - \bar{B}_{ij}y_j\}.$$

Такой же результат получится, если заменить в (75) на постоянные значения:

$$g_i^{c(n)2} \quad \text{и} \quad \kappa_{ij}^{(n)}$$

$$x_i^{(n+1)} = 2(1-2g^2)x_i^{(n)} + \sum_{j \neq i} 4\kappa g^2 x_j^{(n)}. \quad (82)$$

Полагая $x_i^{(n)} = x_i \lambda^n$, получим уравнение на собственные значения, которое решается фурье-преобразованием по переменной i . Максимальное собственное значение

$$\lambda_{max} = 2 - 4g^2 + 4\kappa g^2(d-1)$$

определяет искомый показатель роста уравнения (75). Критический индекс ν выражается через λ_{max} следующим образом:

$$\nu = \frac{\ln 2}{\ln \lambda_{max}} \approx 1 - \frac{2\kappa g^2}{\ln 2} \left(d-1 - \frac{1}{\kappa} \right). \quad (83)$$

Подставляя (81), получим окончательное выражение (21). Заметим, что для уточнения формулы (21), т. е. для вычисления члена $O(\beta^2)$, разложения (75) уже недостаточно.

4. Осталось получить выражение для характеристической функции (80). По правилам теории вероятностей

$$\chi_B\{\theta_{ij}\} = \int \dots \int \exp\left\{ 2i\tilde{\beta}^2 \sum_i \sum_{m=1}^N \frac{X_i^{(m)}}{|Z_{e_i}^{(m)}|} \cdot \left(-\theta_{ii} + \sum_{j \neq i} \kappa_{ji}^{(m)} \theta_{ji} \right) \right\} P\{W_1^{(m)}\} \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{l \in \gamma_1} dW_1^{(n)}.$$

Раскладывая экспоненту в ряд, получим сумму интегралов, часть из которых сходится, давая вклад порядка $\tilde{\beta}^2$, остальные логарифмически расходятся. Последние можно вычислить с логарифмической точностью, обрезая расходимости на границе применимости разложения. Более строго вычисления можно провести, преобразуя экспоненту по схеме

$$e^{ix+iy} = 1 + (e^{ix} - 1) + (e^{iy} - 1) + (e^{ix} - 1)(e^{iy} - 1)$$

и оценивая получающиеся интегралы. В результате получим

$$\chi_B\{\theta_{ij}\} = 1 + 4i\tilde{\beta}^2 \ln(1/\tilde{\beta}) \sum_{n=1}^N \sum_i \int \dots \int X_i^{(n)} \left(-2\theta_{ii} + \sum_{j \neq i} 2\theta_{ji} \frac{Z_{e_j}^{(n)}}{Z_{e_i+e_j}^{(n)}} \right) \delta(Z_{e_i}^{(n)}) P\{W_0^{(n)}; Z_m^{(n)}\} \prod_{n=1}^{\infty} \left(dW_0^{(n)} \prod_{m \in \omega_1} dZ_m^{(n)} \right) + O(\tilde{\beta}^2).$$

Интегрируя по всем переменным, кроме $Z_{e_i}, Z_{e_j}, Z_{e_i+e_j}$ получаем

$$\chi_B\{\theta_{ij}\} = 1 + 4i\tilde{\beta}^2 \ln(1/\tilde{\beta}) N \bar{X} \sum_i \sum_{j \neq i} \int dZ_{e_i} dZ_{e_j} dZ_{e_i+e_j} P(Z_{e_i}, Z_{e_j}, Z_{e_i+e_j}) \times \left(-2\theta_{ii} + 2\theta_{ji} \frac{Z_{e_j}}{Z_{e_i+e_j}} \right) \delta(Z_{e_i}) + O(\tilde{\beta}^2). \quad (84)$$

Совместное распределение $Z_{e_i}, Z_{e_j}, Z_{e_i+e_j}$ является гауссовым и пол-

ностью определяется вторыми моментами:

$$\overline{Z_{e_i}^2} = \overline{Z_{e_j}^2} = \overline{Z_{e_i+e_j}^2} = 2^{d+1}V^2, \quad \overline{Z_{e_i}Z_{e_j}} = \overline{Z_{e_i}Z_{e_i+e_j}} = \overline{Z_{e_j}Z_{e_i+e_j}} = 2^dV^2.$$

Они вычисляются по определению $W_m^{(n)}$ (60в) с учетом проведенного масштабного преобразования (72). Отсюда

$$P(Z_{e_i}, Z_{e_j}, Z_{e_i+e_j}) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{8} [3(Z_{e_i}^2 + Z_{e_j}^2 + Z_{e_i+e_j}^2) - 2(Z_{e_i}Z_{e_j} + Z_{e_i}Z_{e_i+e_j} + Z_{e_j}Z_{e_i+e_j})] \right\}.$$

Выбор масштаба не имеет значения, если \bar{X} вычисляется с помощью того же распределения. В результате получим

$$\chi_B\{\theta_{ij}\} = 1 + 4i\bar{\beta}^2 \ln \left(\frac{1}{\bar{\beta}} \right) \frac{N\bar{X}}{2\pi^{1/2}} \sum_i \left(-2\theta_{ii} + \frac{2}{3} \sum_{j \neq i} \theta_{ij} \right) + O(\bar{\beta}^2).$$

Вычисляя \bar{X} :

$$\bar{X} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} |Z|^{1/2^n} e^{-Z^2/4} dZ = 2\sqrt{\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2 + 1/2^n)}{\Gamma(1/2)} = \frac{\pi^{1/2}}{2}$$

(используются свойства гамма-функции, см. [26]), получим (80).

6. Полная ренормгруппа

Единственная цель этого раздела — обоснование использованной в разд. 4 усеченной ренормгруппы, поэтому он может быть опущен без ущерба для понимания основного текста.

1. Мы должны реализовать сформулированный в разд. 3 алгоритм в его полном виде. Для вывода уравнений ренормгруппы с точностью β^2 достаточно ограничиться 2^d -зонным приближением, поэтому полагаем в формулах разд. 3 $N=2^d$.

Поясним схему манипуляций с индексом зоны s . На n -м шаге ренормгруппы индекс s нумерует 2^d зон; в результате учета дальнейших фурье-компонент потенциала каждая зона расщепляется на 2^d подзон, нумеруемых индексом \mathbf{m} ; полная нумерация осуществляется индексом $\mathbf{v}=(\mathbf{m}, s)$. После этого выбираем одну из исходных зон (для определенности зону с $s=0$), а ее подзоны объявляем зонами $(n+1)$ -го шага ренормгруппы. Таким образом, индекс s совпадает с индексом \mathbf{m} предыдущего шага и для дальнейшего удобно считать его векторным.

Рассмотрим выражение вида

$$a \exp(im_1k_1 + im_2k_2 + \dots + im_dk_d), \quad a \sim \beta^n, \quad m = \sum_i |m_i| \quad (85)$$

и назовем его экстремальным при $n=m$, неэкстремальным при $n>m$ и сверхэкстремальным при $n<m$. Введя энергетический масштаб $W^{(n)} \sim W^{(n)}(0;0)$, рассмотрим величины

$$[\epsilon_s^{(n)}(\mathbf{k}) - \langle \epsilon_s^{(n)} \rangle_0] / W^{(n)}, \quad A_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) / R^{(n)}(\mathbf{q}), \quad (86)$$

где $R^{(n)}(\mathbf{q}) = \langle A_{00}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \rangle_0$, а значок $\langle \dots \rangle_0$ означает нулевую фурье-компоненту по \mathbf{k} . Докажем лемму: в ряду Фурье величин (86) нет сверхэкстремальных членов. Доказательство проводится индукцией по n . При $n=0$

$$A_{ss'}^{(0)} = \delta_{s0}\delta_{s'0}, \quad \epsilon^{(0)}(\mathbf{k}) = \sum_i 2J_i \cos k_i, \quad W^{(0)} \sim V$$

и утверждение очевидно. Предполагая его справедливость для некоторого n , докажем его для $n+1$. Из предположения индукции и формул

(45), (36), (47) следует отсутствие сверхэкстремальных членов в ряду Фурье величин

$$\bar{H}_{\nu\nu'}(\mathbf{k})/W^{(n)} \quad (\nu \neq \nu'), \quad [\bar{H}_{\nu\nu}(\mathbf{k}) - \langle \bar{H}_{\nu\nu} \rangle_0]/W^{(n)}.$$

Ряд для $T_{\nu\nu'}$ (48) после итерационного исключения E_ν из правой части состоит из членов вида

$$\frac{\bar{H}_{\nu\nu'}(\mathbf{k})}{\bar{H}_{\nu\nu}(\mathbf{k}) - \bar{H}_{\nu'\nu'}(\mathbf{k})} \frac{\bar{H}_{\nu'\nu'}(\mathbf{k})}{\bar{H}_{\nu\nu}(\mathbf{k}) - \bar{H}_{\nu'\nu'}(\mathbf{k})} \dots$$

Преобразуя знаменатели по схеме

$$\bar{H}_{\nu\nu}(\mathbf{k}) - \bar{H}_{\nu'\nu'}(\mathbf{k}) = [\langle \bar{H}_{\nu\nu} \rangle_0 - \langle \bar{H}_{\nu'\nu'} \rangle_0] \left\{ 1 + \frac{W^{(n)}}{\langle \bar{H}_{\nu\nu} \rangle_0 - \langle \bar{H}_{\nu'\nu'} \rangle_0} \cdot \frac{[\bar{H}_{\nu\nu}(\mathbf{k}) - \langle \bar{H}_{\nu\nu} \rangle_0] - [\bar{H}_{\nu'\nu'}(\mathbf{k}) - \langle \bar{H}_{\nu'\nu'} \rangle_0]}{W^{(n)}} \right\},$$

получим отсутствие сверхэкстремальных членов в $T_{\nu\nu'}(\mathbf{k})$, а следовательно, и в $\bar{c}_{s\nu}(\mathbf{k})$. Разделив (51) на $R^{(n)}(\mathbf{q})$, получим, что под оператором $\bar{Q}_\pi^{\mathbf{k}}$ стоит сумма членов вида

$$a \exp [i(m_1 + \alpha_1)k_1 + i(m_2 + \alpha_2)k_2 + \dots + i(m_d + \alpha_d)k_d], \quad m_i \leq n, \quad \alpha_i = 0, \pm 1,$$

так как \mathbf{m}' , $\mathbf{m} \in \gamma_i$. Оператор $\bar{Q}_\pi^{\mathbf{k}}$ устраняет нечетные $m_i + \alpha_i$, а масштабное преобразование по \mathbf{k} делит их пополам. В результате $A_{ss'}^{(n+1)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})/R^{(n)}(\mathbf{q})$

состоит из членов вида (85) с m_i' вместо m_i , где

$$m_i' = (m_i + \alpha_i)/2, \quad \alpha_i = 0, \pm 1, \quad m_i + \alpha_i - \text{четное} \quad (87)$$

Очевидно, $|m_i'| \leq |m_i|$, поэтому $m' \leq m$. Учитывая, что $R^{(n+1)}(\mathbf{q}) \sim R^{(n)}(\mathbf{q})$, получаем отсутствие сверхэкстремальных членов в $A(\mathbf{k}, \mathbf{q})/R^{(n+1)}(\mathbf{q})$.

Аналогично величина $(E_\nu(\mathbf{k}) - \langle \bar{H}_{\nu\nu} \rangle_0)/W^{(n)}$ состоит из членов типа (85) с $m_i \leq n$, причем все m_i — четные ввиду (31). В силу (50) $\varepsilon_\nu^{(n+1)}(\mathbf{k})$ есть сумма членов вида (85) с m_i' вместо m_i , где $m_i' = m_i/2$, и некоторого постоянного члена. Если $m \neq 0$, то $m' \leq m - 1$ и величина $(\varepsilon_\nu^{(n+1)}(\mathbf{k}) - \langle \varepsilon_\nu \rangle_0^{(n+1)})/W^{(n+1)}$, где $W^{(n+1)} \sim \beta W^{(n)}$, не содержит сверхэкстремальных членов. Лемма доказана.

Лемма показывает, что $\varepsilon_s^{(n)}(\mathbf{k})$ и $A_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ раскладываются в ряды Фурье по \mathbf{k} с коэффициентами, убывающими по параметру β . Для наших целей будет достаточно нескольких первых членов:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^{(n)}(\mathbf{k}) &= \text{const} + \sum_i 2J_i^{(n)} \cos k_i + \sum_i 2J_{ii}^{(n)} \cos 2k_i + \\ &+ \sum_i \sum_{j \neq i} 2J_{ij}^{(n)} \cos k_i \cos k_j + O(\beta^5), \\ A_{ss}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) &= aR^{(n)}(\mathbf{q}) \left[1 + \sum_i \alpha_i \cos k_i + \sum_i \rho_i \sin k_i + \right. \\ &+ \sum_i \gamma_i \cos 2k_i + \sum_i \xi_i \sin 2k_i + \sum_{i, j \neq i} \varphi_{ij} \cos k_i \sin k_j + \\ &+ \left. \sum_{i, j \neq i} \delta_{ij} \cos k_i \cos k_j + \sum_{i, j \neq i} \sigma_{ij} \sin k_i \sin k_j + O(\beta^6) \right], \end{aligned} \quad (88)$$

$$A_{s+s, e, i, s}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = R^{(n)}(\mathbf{q}) [\xi_i + \eta_i \exp(ik_e) + O(\beta^3)],$$

$$A_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \sim \beta^2 R^{(n)}(\mathbf{q}), \quad s' - s \neq 0, \mathbf{e}_i,$$

$$J_i^{(n)} / W^{(n)} \sim \beta, \quad J_{ii}^{(n)} / W^{(n)} \sim J_{ij}^{(n)} / W^{(n)} \sim \beta^3, \quad a \sim 1, \\ \alpha_i \sim \rho_i \sim \beta^2, \quad \gamma_i \sim \xi_i \sim \delta_{ij} \sim \Phi_{ij} \sim \sigma_{ij} \sim \beta^4, \quad \xi_i \sim \eta_i \sim \beta.$$

Вид разложений (88) является следствием вида правых частей (50), (51), установленных при доказательстве леммы. Из (88) следуют оценки для матричных элементов \bar{H} :

$$W_m^{ss}(\mathbf{k}; 0) - W_{m'}^{ss}(\mathbf{k}; 0) \sim W, \quad m \neq m', \quad W_m^{ss}(\mathbf{k}; 0) - W_m^{ss}(0; 0) \sim \beta^4 W \\ W_m^{ss}(\mathbf{k}; 1) \sim \begin{cases} \beta^2 W, & \mathbf{l} = \mathbf{e}_i \\ \beta^4 W, & \mathbf{l} = 0, \mathbf{e}_i \end{cases}, \quad W_m^{ss'}(\mathbf{k}; 1) \sim \begin{cases} \beta W, & \mathbf{l} = 0, \mathbf{e}_i, \quad s' - s = \mathbf{e}_i \\ \beta^3 W, & \mathbf{l} \neq 0, \mathbf{e}_i, \quad s' - s = \mathbf{e}_i, \\ \beta^2 W, & s' - s \neq 0, \mathbf{e}_i \end{cases} \quad (89)$$

$$\varepsilon_s^0(\mathbf{k}) - \varepsilon_{s'}^0(\mathbf{k}) \sim W/\beta, \quad s \neq s', \quad \varepsilon_s^m(\mathbf{k}) \sim \begin{cases} \beta W, & \mathbf{m} = \mathbf{e}_i \\ \beta^3 W, & \mathbf{m} \neq 0, \mathbf{e}_i \end{cases} \\ \varepsilon_s^0(\mathbf{k}) - \varepsilon_s^0(0) \sim \beta^3 W,$$

2. Нам потребуются выражения для $A_{00}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ и $A_{s+\mathbf{e}_i, s}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$, в которых α_i, ρ_i вычислены с точностью $\sim \beta^3$, γ_i, ξ_i — с точностью $\sim \beta^4$, ξ_i, η_i — с точностью $\sim \beta$; коэффициенты Φ_{ij}, δ_{ij} и σ_{ij} не требуются совсем. Эти выражения получаются путем итерационного решения уравнения (51)³⁾:

$$A_{00}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = R^{(n)}(\mathbf{q}) \left\{ 1 - \sum_i g_i^{(n-1)2} [\cos k_i + \cos(k_i + 2^n q_i) - \right. \\ \left. - 2 \cos(k_i + 2^{n-1} q_i)] - \sum_i g_i^{(n-1)} g_i^{(n-2)2} [\cos k_i (1 - 2 \cos(2^{n-2} q_i) + \right. \\ \left. + 2 \cos(2^{n-1} q_i) - 2 \cos(3 \cdot 2^{n-2} q_i) + \cos(2^n q_i)) + \sin k_i (2 \sin(2^{n-2} q_i) - \right. \\ \left. - 2 \sin(2^{n-1} q_i) + 2 \sin(3 \cdot 2^{n-2} q_i) - \sin(2^n q_i)) - S_i^{(n)} [\cos k_i + \cos(k_i + 2^n q_i) - \right. \\ \left. - 2 \cos(k_i + 2^{n-1} q_i)] \right\} + \sum_i 2g_i^{(n-1)4} \left[\frac{11}{8} \cos 2k_i - \frac{3}{2} \cos(2k_i + 2^{n-1} q_i) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \cos(2k_i + 2^n q_i) - \frac{3}{2} \cos(2k_i + 3 \cdot 2^{n-1} q_i) + \frac{11}{8} \cos(2k_i + 2^{n+1} q_i) \right] \Bigg\}, \quad (90)$$

$$A_{s, s+\mathbf{e}_i}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = R^{(n)}(\mathbf{q}) \frac{J_i^{(n-1)}}{W_s^{(n-1)} - W_{s+\mathbf{e}_i}^{(n-1)}} \exp[2^{n-1} i \mathbf{q} (s + \mathbf{e}_i)] \cdot \\ \cdot \{ \exp(i k e_i) [1 - \exp(2^{n-1} i \mathbf{q} \mathbf{e}_i)] + [1 - \exp(-2^{n-1} i \mathbf{q} \mathbf{e}_i)] \};$$

где

$$S_i^{(n)} = [W_0^{(n-1)} + W_{\mathbf{e}_i/2}^{(n-1)} - W_{\mathbf{e}_i/4}^{(n-1)} - W_{-\mathbf{e}_i/4}^{(n-1)}] [W_0^{(n-1)} - W_{\mathbf{e}_i/2}^{(n-1)}]^{-1}.$$

Опишем процедуру вычислений. Решение (51) ищется в виде

$$A_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = R_s^{(n)}(\mathbf{q}) \exp(2^{n-1} i \mathbf{q} s) [\delta_{ss'} + \Phi_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})], \quad (91)$$

где $\langle \Phi_{ss'} \rangle_0 = 0$, $\Phi_{ss} \sim \beta^2$, $\Phi_{ss'} \sim \beta$, $s \neq s'$. Для вычисления $\Phi_{ss'}$ в низшем порядке по β не требуется знания матричных элементов $\bar{H}_{ss'}^{mm'}$ с $s \neq s'$, а для $\bar{H}_{ss}^{mm'}$ достаточно приближения (53). Уравнение (51) для $v = v' = 0$ приво-

³⁾ В этом разделе через $g_i^{(n)}$ обозначено отношение (59) без модуля.

дится к виду

$$\left[\frac{R^{(n+1)}(\mathbf{q})}{R^{(n)}(\mathbf{q})} - 1 \right] + \Phi_{00}^{(n+1)}(2\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \bar{Q}_\pi^k \Phi_{00}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - \sum_i 2g_i^{(n)2} [\cos k_i - \cos(k_i + 2^n q_i)]$$

и решается подстановкой

$$\Phi_{00}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = - \sum_i g_i^{(n-1)2} [\cos k_i (1 - 2 \cos 2^{n-1} q_i + \cos 2^n q_i) + \sin k_i (2 \sin 2^{n-1} q_i - \sin 2^n q_i)],$$

что дает $A_{00}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ с точностью β^2 ; для $R^{(n)}(\mathbf{q})$ получается рекуррентное соотношение (60б). При $v=v'$ (51) дает

$$\Phi_{ss'}^{(n+1)}(2\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \exp[2^n i \mathbf{q} (s' - s)] \bar{Q}_\pi^k \exp[ik(s' - s)] \cdot \left[\sum_{s'' \neq s} \frac{[\varepsilon_0^{s''-s}(\mathbf{k})]^{(n)}}{W_s^{(n)} - W_{s''}^{(n)}} + \sum_{s'' \neq s'} \frac{[\varepsilon_0^{s'-s''}(\mathbf{k} + 2^n \mathbf{q})]^{(n)}}{W_{s'}^{(n)} - W_{s''}^{(n)}} \right]$$

откуда следует выражение для $A_{s,s+e_i}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$.

Для вычислений $A_{00}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ с точностью β^3 требуются следующие выражения для матричных элементов:

$$[W_0^{00}(\mathbf{k}; \mathbf{e}_i)]^{(n)} = -g_i^{(n-1)2} [\cos \mathbf{k} \mathbf{e}_i (W_0^{(n)} + W_{e_i}^{(n)} - W_{e_i/2}^{(n)} - W_{-e_i/2}^{(n)}) - i \sin \mathbf{k} \mathbf{e}_i (W_{e_i/2}^{(n)} - W_{-e_i/2}^{(n)})], \quad (92)$$

$$[W_{e_i 0}^{e_i 0}(\mathbf{k}; 0)]^{(n)} = g_i^{(n-1)} (W_{e_i/2}^{(n)} - W_0^{(n)}),$$

$$W_0^{e_i 0(n)}(\mathbf{k}; \mathbf{e}_i) = g_i^{(n-1)} (W_{-e_i/2}^{(n)} - W_0^{(n)}) e^{-i \mathbf{k} \mathbf{e}_i},$$

получаемые подстановкой ранее найденных приближений для $A_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ в формулу

$$[W_n^{ss'}(\mathbf{k}; \mathbf{m})]^{(n)} = \frac{1}{2^d} \sum_{\mathbf{k}_0 \in \Gamma_1} \exp(i \mathbf{k}_0 \mathbf{m}) \sum_{\mathbf{q} \in \Omega_n} A_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{q}) V(\mathbf{q}) \exp(2^n i \mathbf{q} \mathbf{n}), \quad (93)$$

которая следует из (36), (45) с использованием (26).

Вычисление членов $\sim \beta^4$ в (90) значительно упрощается, если заметить, что они могут происходить только из экстремальных членов в правой части (51). Поэтому в рядах (48) можно опустить все члены, содержащие межзонные переходы, так как при этом хотя бы одна из энергетических разностей в знаменателях имеет порядок $W^{(n)}/\beta$, приводя к неэкстремальности соответствующего члена. По той же причине можно опустить в (91) неэкстремальные Φ_{ss} и ограничиться для H_{ss}^{mm} приближением (53). Далее, в рядах типа (56) следует учитывать только члены с $i=j=l=m$, так как только они могут привести к появлению в правой части (51) интересующих нас членов $\cos(4k_i + \varphi)$. Поэтому для нужных нам величин получим

$$\sum_{m \neq 0} T_{m0} = \sum_i \frac{2J_i \cos k_i}{E_0 - W_{e_i}}, \quad \sum_{m \neq 0} |T_{m0}|^2 = \sum_i \frac{4J_i^2 \cos^2 k_i}{(E_0 - W_{e_i})^2}$$

$$E_0 = W_0 + \sum_i \frac{4J_i^2 \cos^2 k_i}{E_0 - W_{e_i}},$$

откуда

$$\bar{c}_{00}(\mathbf{k}) = 1 + \sum_i (z_i^{-1/2} z_i^2 - 3/2 z_i^3 + 11/8 z_i^4),$$

$$z_i = 2J_i \cos k_i / (W_0 - W_{e_i}).$$

Осталось подставить в (51) и отобрать соответствующие члены.

Подставляя (90) в формулу (93), получим нужные нам матричные элементы в виде

$$\begin{aligned} [W_0^{00}(\mathbf{k}; \mathbf{e}_i)]^{(n)} &= \cos k_i [H_i^{(n)} g_i^{(n-1)2} + G_i^{(n)} g_i^{(n-1)} g_i^{(n-2)2}] + \\ &+ i \sin k_i [P_i^{(n)} g_i^{(n-1)2} + T_i^{(n)} g_i^{(n-1)} g_i^{(n-2)2}] + O(\beta^4), \\ [W_0^{00}(\mathbf{k}; 0)]^{(n)} &= W_0^{(n)} + \sum_i 2F_i^{(n)} g_i^{(n-1)4} \cos 2k_i, \end{aligned}$$

(94)

$$[W_0^{0e_i}(\mathbf{k}; \mathbf{e}_i)]^{(n)} = g_i^{(n-1)} e^{ik_i} [W_{e_i/2}^{(n)} - W_{e_i}^{(n)}],$$

$$W_{e_i}^{0e_i}(\mathbf{k}; 0) = g_i^{(n-1)} [W_{-e_i/2}^{(n)} - W_{e_i}^{(n)}]$$

(остальные выписаны в (92)), где введены обозначения

$$H_i^{(n)} = -(W_0^{(n)} + W_{e_i}^{(n)} - W_{e_i/2}^{(n)} - W_{-e_i/2}^{(n)}),$$

$$P_i^{(n)} = W_{e_i/2}^{(n)} - W_{-e_i/2}^{(n)},$$

$$\begin{aligned} G_i^{(n)} &= -S_i^{(n)} H_i^{(n)} - (W_0^{(n)} + W_{e_i}^{(n)} - W_{e_i/4}^{(n)} - W_{-e_i/4}^{(n)} + \\ &+ W_{e_i/2}^{(n)} + W_{-e_i/2}^{(n)} - W_{3e_i/4}^{(n)} - W_{-3e_i/4}^{(n)}), \end{aligned}$$

(95)

$$\begin{aligned} T_i^{(n)} &= -S_i^{(n)} P_i^{(n)} + (W_{e_i/4}^{(n)} - W_{-e_i/4}^{(n)} - W_{e_i/2}^{(n)} + W_{-e_i/2}^{(n)} + \\ &+ W_{3e_i/4}^{(n)} - W_{-3e_i/4}^{(n)}), \end{aligned}$$

$$F_i^{(n)} = 11/4 W_0^{(n)} + 1/4 W_{e_i}^{(n)} - 3/2 W_{e_i/2}^{(n)} - 3/2 W_{-e_i/2}^{(n)}.$$

3. Выпишем выражение для $E_0(\mathbf{k})$ с точностью β^4 ; для этого нужно учесть процессы, показанные на рис. 4. Их отбор проводится с помощью оценок (89)

$$\begin{aligned} E_0(\mathbf{k}) &= \varepsilon_0^0(\mathbf{k}) + W_0^{00}(\mathbf{k}; 0) + \sum_i \frac{|\varepsilon_0^0(\mathbf{k}) + W_0^{00}(\mathbf{k}; \mathbf{e}_i)|^2}{W_0 - W_{e_i}} - \\ &- \sum_{ij} \frac{[\varepsilon_0^{e_i}(\mathbf{k}) \varepsilon_0^{e_j}(\mathbf{k})]^2}{(W_0 - W_{e_i})^2 (W_0 - W_{e_j})} + \\ &+ \sum_i \frac{\varepsilon_0^{e_i}(\mathbf{k}) [W_0^{e_i 0}(\mathbf{k}; 0) W_0^{0e_i}(\mathbf{k}; \mathbf{e}_i) + W_{e_i}^{0e_i}(\mathbf{k}; 0) W_0^{e_i 0}(\mathbf{k}; \mathbf{e}_i) + \text{r.c.}]}{(W_0 - W_{e_i})(\varepsilon_0^0 - \varepsilon_{e_i}^0)} + \end{aligned}$$

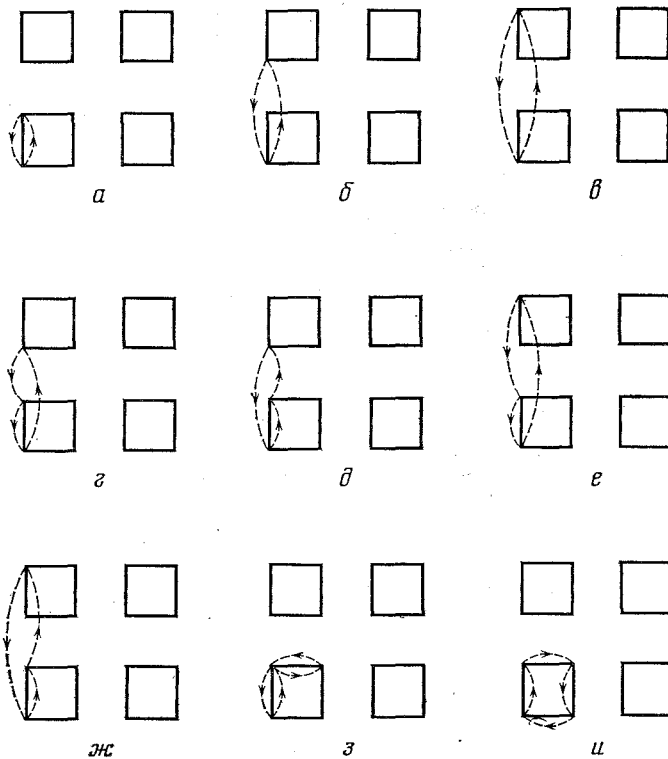


Рис. 4. Процессы, дающие вклад в $E_0(\mathbf{k})$ с точностью β^4 (для $d=2$). Малые квадраты, расположенные в вершинах больших квадратов, соответствуют зонам n -го шага ренормгруппы и нумеруются индексом s ; их вершины соответствуют возникающим на n -м шаге подзонам, нумеруемым индексом \mathbf{m} . Учитываются переходы $(s, \mathbf{m}) \rightarrow (s', \mathbf{m}')$ вида: $a - \mathbf{m}' - \mathbf{m} = \mathbf{e}_i$, $s' - s = 0$; $б - \mathbf{m}' - \mathbf{m} = 0$, $s' - s = \mathbf{e}_i$; $в - \mathbf{m}' - \mathbf{m} = \mathbf{e}_i$, $s' - s = -\mathbf{e}_i$. В d -мерном случае малые и большие квадраты заменяются d -мерными кубами

$$+ \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{[\varepsilon_0^{\mathbf{e}_i}(\mathbf{k}) \varepsilon_0^{\mathbf{e}_j}(\mathbf{k})]}{(W_0 - W_{\mathbf{e}_i})(W_0 - W_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j})} \left[\frac{1}{W_0 - W_{\mathbf{e}_i}} + \frac{1}{W_0 - W_{\mathbf{e}_j}} \right].$$

Мы опустили вклады диаграмм $б$, $в$, так как ввиду соотношения

$$|W_n^{ss'}(\mathbf{k}; \mathbf{m})|^2 = \text{const}(\mathbf{k}) + O(\beta^4), \quad s \neq s',$$

следующего из (88), они оказываются не зависящими от \mathbf{k} . Подставляя $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ в виде (88) и матричные элементы в виде (92), (94), получим закон преобразования спектра

$$\begin{aligned} J_i^{(n+1)} &= J_{ii}^{(n)} + (W_0^{(n)} - W_{\mathbf{e}_i}^{(n)}) [g_i^{(n)2} - 4g_i^{(n)4} + \\ &+ \sum_{j \neq i} 2Q_{ij}^{(n)} g_i^{(n)2} g_j^{(n)2}] + [H_i^{(n)} + C_i^{(n)}] g_i^{(n)} g_i^{(n-1)2} + \\ &+ \left[F_i^{(n)} + \frac{H_i^{(n)2} - P_i^{(n)2}}{4(W_0^{(n)} - W_{\mathbf{e}_i}^{(n)})} \right] g_i^{(n-1)4} + G_i^{(n)} g_i^{(n)} g_i^{(n-1)} g_i^{(n-2)2}, \end{aligned}$$

$$J_{ii}^{(n+1)} = -(W_0^{(n)} - W_{\mathbf{e}_i}^{(n)}) g_i^{(n)4}, \quad J_{ij}^{(n+1)} = (W_0^{(n)} - W_{\mathbf{e}_i}^{(n)}) Q_{ij}^{(n)} g_i^{(n)} g_j^{(n)2} g_j^{(n)2}, \quad (96)$$

где введено обозначение

$$C_i^{(n)} = [(W_{e_i/2}^{(n)} - W_0^{(n)}) (W_{e_i/2}^{(n)} - W_{e_i}^{(n)}) + (W_{-e_i/2}^{(n)} - W_0^{(n)}) \cdot (W_{-e_i/2}^{(n)} - W_{e_i}^{(n)})] (W_0^{(n-1)} - W_{e_i}^{(n-1)})^{-1}.$$

Исключая из первого уравнения $J_{ii}^{(n)}$ и преобразуя итерационным путем члены четвертого порядка, получим основное уравнение ренормгруппы:

$$g_i^{(n+1)} = \frac{W_0^{(n)} - W_{e_i}^{(n)}}{W_0^{(n+1)} - W_{e_i}^{(n+1)}} u^{(n)} \left[g_i^{(n)2} - 4g_i^{(n)4} + \sum_{j \neq i} 2Q_{ij}^{(n)} g_i^{(n)2} g_j^{(n)2} \right], \quad (97)$$

где

$$u^{(n)} = 1 + \frac{H_i^{(n)} + C_i^{(n)} - W_0^{(n)} + W_{e_i}^{(n)}}{W_0^{(n-1)} - W_{e_i}^{(n-1)}} + \frac{G_i^{(n)}}{W_0^{(n-2)} - W_{e_i}^{(n-2)}} + \frac{4F_i^{(n)} (W_0^{(n)} - W_{e_i}^{(n)}) + H_i^{(n)2} - P_i^{(n)2}}{4(W_0^{(n-1)} - W_{e_i}^{(n-1)})^2}.$$

Переходя к модулю $g_i^{(n)}$ и обозначая его той же буквой, получим уравнение, отличающееся от уравнения (60а) усеченной ренормгруппы наличием коэффициента $u^{(n)}$. Легко видеть, что $u^{(n)} = 1 + O(\beta)$, а его производные по $g_i^{(m)}$ порядка β^2 и при варьировании по $g_i^{(m)}$ его можно считать постоянным. В результате коэффициент $u^{(n)}$ не входит в линеаризованные уравнения (75), а в уравнении для $g_i^{c(n)}$ его можно заменить на единицу.

Полная система уравнений ренормгруппы состоит из уравнения (97), уравнения эволюции $R^{(n)}(\mathbf{q})$ (60б), определений $W_m^{(n)}$ и $V_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ (60в) и (36) и выражений для величин $A_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ (90). Нетрудно проверить, что все величины, входящие в уравнение Шредингера n -го шага (35), могут быть выражены через $g_i^{(n)}$, $W_m^{(n)}$, $U_m^{(n)}(\mathbf{q})$ с $m=0, e_i, \pm e_i/2$ и т. д. Величины $W_m^{(n)}$ и $U_m^{(n)}(\mathbf{q})$ имеют гауссовские распределения, их дисперсии в результате масштабного преобразования (72) не зависят от n , а попарные коэффициенты корреляции являются функциями только $g_i^{(n)}$. Следовательно, при условии стационарности $g_i^{(n)}$ стационарными являются все параметры уравнения (35), а их отклонение от стационарной точки определяется отклонением $g_i^{(n)}$ от $g_i^{c(n)}$. Тем самым с точностью β^2 обособляется роль таулесовского параметра $g_i^{(n)}$ для скейлинговой теории локализации [41].

Скорость ухода $g_i^{(n)}$ из стационарной точки описывается линеаризованным уравнением (75), которое в полной ренормгруппе имеет такой же вид, как и в усеченной, что доказывает правомерность использования усеченной ренормгруппы для вычисления индекса ν .

7. Характер скейлинга и проводимость

Основное уравнение ренормгруппы (97) имеет вид

$$g^{(n+1)} = F(g^{(n)}, \{V(\mathbf{q})\}) \quad (98)$$

и отличается от уравнения, постулированного в [41], векторным характером таулесовского параметра $g^{(n)}$ и наличием случайного элемента $\{V(\mathbf{q})\}$. В нулевом приближении эти различия являются несущественными. Действительно, $g_i^{(n)}$ можно записать в виде (см. разд. 5)

$$g_i^{(n)} = (J_i^{(0)} / \beta W_i)^{2^n} g_i^{c(n)},$$

где $g_i^{(n)}$ имеет стационарное распределение (76). Если g^* — точка максимума $P(g)$ (см. рис. 1), то для наиболее вероятного значения $g_i^{(n)}$ имеем

$$g_i^{(n)} = g^*(J_i/\beta W_i)^{2^n} \quad \text{или} \quad g_i(bL_n) = (g^*)^{1-b} g_i(L_n)^b,$$

где $L_n = 2^n$ — масштаб длины на n -м шаге ренормгруппы. Отсюда при $b \rightarrow 1$ получаем уравнение Гелл-Мана — Лоу [11]

$$\partial \ln g / \partial \ln L = \beta_{\text{гЛ}}(g), \quad \beta_{\text{гЛ}}(g) = \ln(g/g^*) \quad (g^* \sim \beta) \quad (99)$$

(индекс i можно опустить, так как это уравнение одинаково для всех i). По-видимому, аналогичным преобразованием можно привести к явно однопараметрическому виду и общее уравнение (98).

Основным выводом гипотезы однопараметрического скейлинга является соотношение (4) между индексами s и ν . Фактически нетривиальным является утверждение $\nu = \nu'$ (ν и ν' — индексы корреляционной длины соответственно в диэлектрической и металлической фазах), поскольку соотношение $s = \nu'(d-2)$ имеет общий характер (см. например [10]). В излагаемой теории равенство $\nu = \nu'$ имеет место, следовательно, справедливо и соотношение (4). Таким образом, наши результаты не противоречат гипотезе однопараметрического скейлинга.

Относительно соотношения (4) следует сделать одно замечание. Из аналогии с несоизмеримыми системами [19] следует ожидать, что при достаточно малых β проводимость в металлической фазе бесконечна и индекс s неопределен; конечная проводимость возникает при некотором β_c . Если область существования конечной проводимости и область однопараметрического скейлинга перекрываются, то индекс ν не имеет особенности в точке β_c и индекс s может вычисляться по соотношению (4) в рамках предлагаемого разложения. Действительно, проводимость конечной системы аналитически зависит от β ввиду отсутствия фазовых переходов в конечных системах; функция Гелл-Мана — Лоу описывает связь проводимостей двух конечных систем и потому при конечных g аналитически зависит от β , что подтверждается выражением (99), справедливым при $g \ll 1$ для любых β (заметим, однако, что предел $\lim_{g \rightarrow \infty} \beta_{\text{гЛ}}(g)$ имеет особенность в точке β_c). Индекс ν определяется поведением $\beta_{\text{гЛ}}(g)$ при $g \sim 1$ и не имеет особенности в точке β_c . Из проведенных рассуждений следует также, что в области однопараметрического скейлинга на плоскости βd (см. рис. 2) никакие особенности по β невозможны: любые особые линии типа AB и CD одновременно являются границами однопараметрического скейлинга.

8. Характер универсальности

Как обычно в теории фазовых переходов, построенная ренормгруппа позволяет исследовать природу универсальности критического поведения физических величин.

1. Как ясно из вывода в разд. 5, результат $\nu=1$ при $\beta \rightarrow 0$ имеет полную универсальность и не зависит от статистической природы потенциала, например от существования или отсутствия дисперсии, дальнего действия корреляций и т. д. Он одинаково справедлив для случайных и детерминированных моделей. Такая универсальность подобна универсальности теории среднего поля.

2. Первая поправка к значению $\nu=1$ зависит от статистических свойств потенциала, хотя и оказывается одинаковой для больших классов аналогичных моделей. Класс универсальности гауссовой модели (28), для которой получена формула (21), оказывается очень широким.

Пусть, например, фурье-компоненты потенциала имеют произвольные независимые распределения с конечной дисперсией, удовлетворяющие (28). Ввиду (36) каждая фурье-компонента $V_{ss'}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ потенциала n -го

шага ренормгруппы представляет собой линейную комбинацию 2^{nd} фурье-компонент исходного потенциала с весами порядка единицы. В силу центральной предельной теоремы статистические свойства $V_{ss}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ при больших n будут неотличимы от таковых для гауссовой модели с теми же значениями дисперсии. Поэтому критическое поведение, определяемое большими n , будет таким же, как в гауссовой модели (28).

Можно также ослабить требование одинаковости дисперсий для всех $\mathbf{q} \in \Omega_n$, заменив последнее условие (28) следующим:

$$\langle |V(\mathbf{q})|^2 \rangle = (\beta^n V)^2 B(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in \Omega_n, \quad (100)$$

где $B(\mathbf{q})$ — неотрицательная 2π -периодическая функция. При $\beta \rightarrow 1$ такая модель переходит в модель Андерсона, в которой энергии узлов V_m являются скоррелированными:

$$\langle V_n V_{n+m} \rangle = V^2 B_m, \quad B_m = \sum_{\mathbf{q}} B(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}m} \quad (101)$$

Определяя величину $D_n(\mathbf{q})$ вместо (89) как

$$D_n(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma_n} \left| R_n \left(\frac{\mathbf{q}}{2^n} + \mathbf{a} \right) \right|^2 B \left(\frac{\mathbf{q}}{2^n} + \mathbf{a} \right),$$

получим для нее то же функциональное уравнение (69a), которое теперь надо решать с начальным условием $D_0(\mathbf{q}) = B(\mathbf{q})$. Делая фурье-преобразование:

$$D_n(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{m}} D_n(\mathbf{m}) e^{i\mathbf{q}m},$$

приведем (69a) к виду

$$D_{n+1}(\mathbf{m}) = 2^d \left\{ D_n(2\mathbf{m}) + \sum_i 2g_i^{(n)2} [D_n(2\mathbf{m} + \mathbf{e}_i) - 2D_n(2\mathbf{m}) + D_n(2\mathbf{m} - \mathbf{e}_i)] \right\}. \quad (102)$$

С помощью неравенства

$$|D_{n+1}(\mathbf{m})| \leq 2^d \max \{ |D_n(2\mathbf{m})|, |D_n(2\mathbf{m} + \mathbf{e}_i)|, |D_n(2\mathbf{m} - \mathbf{e}_i)| \}$$

нетрудно показать, что, если $|D_0(\mathbf{m})| \leq |\mathbf{m}|^{-\alpha}$, то $|D_n(\mathbf{m})| \leq 2^{(d-\alpha)n} |\mathbf{m}|^{-\alpha}$ для $|\mathbf{m}| > 1$. Считая величины $D_n(\mathbf{m})$ с $|\mathbf{m}| > 1$ известными, получим для $D_n(\mathbf{m})$ с $\mathbf{m} = 0, \pm \mathbf{e}_i$ неоднородную систему разностных уравнений, исследуя которую, получим, что при условии

$$\alpha > (4d/\ln 2) \beta^2 \ln(1/\beta) \quad (103)$$

имеем $D_n(\mathbf{m}) \rightarrow D_n \delta_{\mathbf{m}0}$, т. е. $D_n(\mathbf{q}) \rightarrow \text{const}(\mathbf{q})$, как и в модели (28). Таким образом, модель (100) принадлежит к классу универсальности модели (28), если корреляции уровней в соответствующей модели Андерсона ($\beta \rightarrow 1$) спадают по степенному закону с показателем α , удовлетворяющим (103).

3. Чтобы продемонстрировать существование других классов универсальности, рассмотрим модели, в которых энергии узлов V_m имеют распределения с бесконечной дисперсией. Ввиду действия закона больших чисел достаточно рассмотреть так называемые устойчивые распределения, которые подобно нормальному закону сохраняют свой вид при суммировании одинаково распределенных слагаемых. Такие распределения имеют характеристическую функцию вида [27]

$$\chi_{V_m}(\theta) = \exp(-1/2 |V\theta|^\gamma), \quad (104)$$

где γ — параметр, меняющийся от 0 до 2: нормальному закону соответствует $\gamma = 2$, распределению Коши — $\gamma = 1$ (мы ограничиваемся симметрич-

ными распределениями). Величину V в (104), характеризующую ширину распределения, будем называть модулем V_m и обозначать $\|V_m\|$.

Определим иерархическую модель следующим образом: фурье-компоненты V_q и $V_{q'}$ независимы при $q \neq \pm q'$, $V_q = V_q^{(1)} + iV_q^{(2)}$, $V_{-q} = V_q^*$, а величины $V_q^{(1)}$ и $V_q^{(2)}$ имеют совместное распределение с характеристической функцией

$$\chi_{V_q^{(1)}, V_q^{(2)}}(\theta_1, \theta_2) = \exp[-2\gamma \|V_q\|^\gamma (\theta_1^2 + \theta_2^2)^{1/2}]. \quad (105)$$

Для модулей действительных сумм величин V_q справедлива формула

$$S = S^* = \sum_q A_q V_q, \quad \|S\|^\gamma = \sum_q |A_q|^\gamma \|V_q\|^\gamma, \quad (106)$$

аналогичная закону сложения дисперсий в гауссовском случае.

Отметим модификации, которые нужно внести в теорию применительно к рассматриваемому случаю. Величина $D_n(q)$ вместо (69) определяется следующим образом:

$$D_n(q) = \sum_{a \in \Gamma_n} \left| R_n \left(\frac{q}{2^n} + a \right) \right|^\gamma.$$

Она также оказывается независимой от q , удовлетворяя рекуррентии

$$D_{n+1} = D_n 2^d \left(1 - 2\gamma \sum_i g_i^{(n,2)} \right).$$

Через D_n выражаются модули $W_m^{(n)}$ и $U_m^{(n)}(q)$:

$$\|U_m^{(n)}(q)\| = \beta^{p+n} V D_n^{1/\gamma}, \quad q \in \Omega_p,$$

$$\|W_m^{(n)}\| = \beta^n V D_n^{1/\gamma} (2^d - 1)^{1/\gamma}.$$

Проводя масштабное преобразование

$$U_m^{(n)}(q) \rightarrow U_m^{(n)}(q) \beta^n D_n^{1/\gamma},$$

$$W_m^{(n)} \rightarrow W_m^{(n)} \beta^n D_n^{1/\gamma}, \quad J_i^{(n)} \rightarrow J_i^{(n)} \beta^n D_n^{1/\gamma},$$

приходим к уравнению (73) с $\tilde{\beta} = \beta 2^{d/\gamma}$. Характеристическая функция $\chi_B\{\theta_{ij}\}$ вычисляется аналогично гауссовскому случаю вплоть до формулы (84). Совместная функция распределения Z_{e_i}, Z_{e_j} и $Z_{e_i+e_j}$ имеет вид

$$P(Z_{e_i}, Z_{e_j}, Z_{e_i+e_j}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \cdot$$

$$\exp(-i\theta_1 Z_{e_i} - i\theta_2 Z_{e_j} - i\theta_3 Z_{e_i+e_j}) \exp(-|\theta_1 + \theta_2|^\gamma - |\theta_1 + \theta_3|^\gamma - |\theta_2 + \theta_3|^\gamma).$$

Подставляя в (84), получим

$$\chi_B\{\theta_{ij}\} = 1 + i4\tilde{\beta}^2 \ln(1/\tilde{\beta}) N\bar{X} \frac{\Gamma(1+1/\gamma)}{2^{1/\gamma}\pi} \left(-2 \sum_i \theta_{ii} + 2I_\gamma \sum_i \sum_{j \neq i} \theta_{ij} \right),$$

где через I_γ обозначен интеграл

$$I_\gamma = 2^{1/\gamma} \int_0^\infty \frac{dx}{[(1+x)^\gamma + 1+x^\gamma]^{1+1/\gamma}} = \begin{cases} 1/3, & \gamma=2 \\ 1/2, & \gamma=1. \\ 1, & \gamma \rightarrow 0 \end{cases}$$

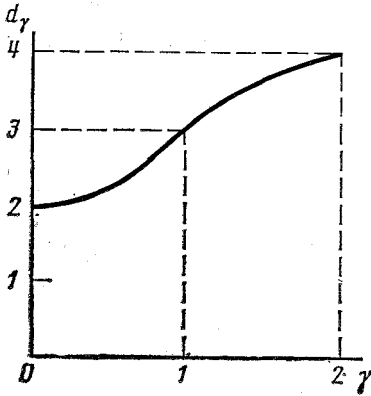


Рис. 5

В результате приходим к следующему выражению для индекса ν :

$$\nu = 1 - C_\gamma 2^{2d/\gamma} (d - d_\gamma) \beta^2 \ln(1/\beta) + O(\beta^2), \quad (107)$$

где

$$d_\gamma = 1 + \frac{1}{I_\gamma}, \quad C_\gamma = \frac{4I_\gamma}{\ln 2} \frac{\Gamma(1+1/\gamma)}{\Gamma(1/2)} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1-1/\gamma 2^m)}{\Gamma(1-1/2^{m+1})}.$$

Зависимость d_γ от γ показана на рис. 5; существование такой зависимости может означать зависимость от γ верхней и нижней критических размерностей (см. разд. 2).

4. Результат $\nu=1$, полученный в пределе $\beta \rightarrow 0$, является точным для несоизмеримых систем, потенциал которых представляет собой сумму двух периодических потенциалов с иррациональным отношением периодов $\beta_{\text{несоизм}}$ [18–21] (этот результат был получен для одномерного случая, но он справедлив для любых d , см. Приложение). Результаты этого раздела позволяют понять причину такого совпадения.

В несоизмеримых системах предел сильной иерархии может быть создан специальным подбором иррационального числа $\beta_{\text{несоизм}}$, именно, в его разложении в цепную дробь

$$\beta_{\text{несоизм}} = \frac{1}{n_1 + \beta_1} = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \beta_2}} = \dots, \quad (108)$$

все n_1, n_2, \dots должны быть большими [19]. Естественно, что в пределе

$$\beta = \max(\beta_{\text{несоизм}}, \beta_1, \beta_2, \dots) \rightarrow 0$$

имеет место результат (19). Поправка же к нему зависит от класса универсальности, поэтому не удивительно, что в классе универсальности, к которому принадлежат несоизмеримые системы, она равна нулю во всех порядках по β .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Замечание о многомерных несоизмеримых системах

Основные результаты теории локализации в несоизмеримых системах (в частности, $\nu=1$) получены для уравнения

$$a_{i+1} + a_{i-1} + V \cos(2\pi\beta_{\text{несоизм}}l) a_i = E a_i, \quad (109)$$

которое имеет переход Андерсона при $V=2$. Его естественным многомерным обобщением является уравнение

$$\sum_{i=1}^d (a_{i+e_i} + a_{i-e_i}) + V \sum_{i=1}^d \cos(2\pi\beta_{\text{несоизм}}l_i) a_i = E a_i, \quad (110)$$

которое допускает разделение переменных, тем самым результат $\nu=1$ справедлив и для него.

Как показано в [19], описание несоизмеримых систем общего вида вблизи порога локализации сводится к уравнению (109); если в разложении (108) найдется подпоследовательность достаточно малых β_k (что верно для почти всех $\beta_{\text{несоизм}}$), т. е. гамильтониан (109) с $V=2$ является предельным, к которому преобразование ренормгруппы приводит произвольную систему, находящуюся в критической точке. По той же причине гамильтониан (110) с $V=2$ является предельным для d -мерных несоизмеримых систем, обладающих кубической симметрией. Тем самым значение индекса $\nu=1$ оказывается универсальным.

Автор признателен А. Ф. Андрееву и Д. Е. Хмельницкому за обсуждение.

Литература

1. *Anderson P. W.* // Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 1492.
2. *Thouless D. J.* // Phys. Rep. 1974. V. 13C. P. 94.
3. *Садовский М. В.* // УФН. 1981. Т. 133. С. 223.
4. *Мотт Н., Дэвис Э.* // Электронные процессы в некристаллических веществах. М.: Мир, 1974. С. 49.
5. *Wegner F.* // Z. Phys. B. 1979. V. 35. P. 207. *Shäfer L., Wegner F.* // Z. Phys. B. 1980. V. 38. P. 113.
6. *Ефетов К. Б., Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.* // ЖЭТФ, 1980. Т. 79. С. 1120.
7. *Ефетов К. Б.* // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 872.
8. *Ефетов К. Б.* // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. С. 1032.
9. *Kanz H., Soillard R.* // J. de Phys. Lett. 1983. V. 44. P. L411.
10. *Суслов И. М.* // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43. С. 544.
11. *Abrahams E., Anderson P. W., Licciardello D. C., Ramakrishnan T. V.* // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. P. 673.
12. *Kanz H., Souillard R.* // J. de Phys. Lett. 1983. V. 44. P. L506.
13. *Harris A. B., Lubensky T. C.* // Phys. Rev. B. 1981. V. 23. P. 2540.
14. *Straley J. P.* // Phys. Rev. B. 1983. V. 28. P. 5393.
15. *Кравцов В. Е., Лернер И. В.* // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. С. 1281.
16. *Ефетов К. Б.* // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 1050.
17. *Dyson F. J.* // Comm. Math. Phys. 1969. V. 12. P. 91.
18. *Aubry S.* // Annals of the Israel Physical Society. V. 3/Ed. by C. G. Kuper. Bristol: Adam Hilger, 1979. P. 133.
19. *Суслов И. М.* // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 1079; 1983. Т. 84. С. 1792.
20. *Wilkinson M.* // Preprint, Calif. Inst. of Techn. 1985.
21. *Ostlund S., Pandit R.* // Phys. Rev. B. 1984. V. 29. P. 1394.
22. *Альгиулер Б. Л.* // Письма в ЖЭТФ. 1985. V. 41. P. 520.
23. *MacKinnon A., Kramer B.* // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 1546.
24. *Ishii K.* // Progr. Theor. Phys. Suppl. 1973. V. 53. P. 77.
25. *Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А.* // Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982. § 10.
26. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* // Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений. М.: Физматгиз, 1963. С. 950.
27. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* // Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: Гостехиздат, 1949. § 34.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
17.VII.1986

NEW EXPANSION FOR CRITICAL INDICES OF THE ANDERSON LOCALIZATION THEORY

I. M. Suslov

A model of a disordered system is considered in which the Fourier components of the potential are random quantities obeying a certain hierarchy: the greatest of them are of the order of magnitude of V , the next in magnitude — of the order of βV etc. For $\beta \rightarrow 1$ the model goes over to the usual Anderson model. For small values of β an expansion (21) of the critical index for the localization radius ν is developed in parameter β for an arbitrary space dimension d . For $\beta \sim 1$ it is in qualitative agreement with the results for $d=2+\epsilon$ and $d=\infty$; for $\beta \rightarrow 0$ the value of ν is the same as that for incommensurate systems. The conductivity index s is related to ν by the usual scalling relationship $s=\nu(d-2)$. The renormalization group equations contain random parameters, and hence the Anderson transition point is not determined by a fixed but by a stationary point of the renormalization group transformation. In this way scaling can be made to agree with the large conductivity fluctuations discussed lately.