

© 1992 г. И. М. Сулов

## ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРНОСТИ $d > 4$

Рассматривается модель Андерсона на  $d$ -мерной кубической решетке с гауссовским распределением энергий узлов. Показано, что при  $d > 4$  среднюю плотность состояний  $N(E)$  можно вычислить при всех энергиях; она является гладкой функцией и не имеет особенностей вблизи перехода Андерсона.

### 1. Введение

Центральной проблемой теории локализации [1–4] является выяснение поведения физических величин вблизи перехода Андерсона. По аналогии с современной теорией критических явлений [5, 6] естественно ожидать, что для перехода Андерсона существует верхняя критическая размерность пространства  $d_{c2}$ , выше которой теория существенно упрощается; соответственно можно надеяться на построение  $\varepsilon$ -разложения для пространства размерности  $d_{c2} - \varepsilon$ .

Ниже мы будем иметь в виду модель Андерсона, описываемую дискретным уравнением Шредингера

$$\sum_m J_{n-m} \Psi_m + V_n \Psi_n = E \Psi_n, \quad (1)$$

где индексы  $m$  и  $n$  нумеруют узлы  $d$ -мерной кубической решетки (с постоянной решетки  $a_0$ ), интегралы перекрытия  $J_{m-n}$  имеют порядок  $J$  и быстро спадают с ростом  $|m-n|$ , энергии узлов  $V_n$  — независимые случайные величины с гауссовским распределением

$$P\{V\} \propto \exp\left\{-\sum_n V_n^2/2W^2\right\}. \quad (2)$$

Беспорядок считаем слабым и интересуемся областью малых энергий

$$W \ll J, \quad |E| \ll J, \quad (3)$$

где  $E$  отсчитывается от нижнего края исходной зоны.

Существует довольно много фактов, свидетельствующих о выделенности для гауссовской модели (1) размерности пространства  $d=4$ . Перечислим основные из них.

1. Условие отсутствия локализации дается известным принципом Иоффе — Регеля [2]

$$kl \gg 1, \quad \text{или} \quad E\tau \gg 1, \quad (4)$$

где  $E$  и  $k$  — энергия и импульс электрона,  $l$  и  $\tau$  — длина и время свободного пробега. В борновском приближении

$$\tau^{-1}(E) \sim a_0^2 W^2 N_0(E),$$

где

$$N_0(E) \sim (a_0^d J)^{-1} (E/J)^{(d-2)/2}$$

— плотность состояний идеальной решетки, и при  $d < 4$  условие (4) сводится к

$$E \geq J \left( \frac{W}{J} \right)^{4/(4-d)}, \quad (5)$$

тогда как при  $d > 4$  оно в указанных предположениях выполняется при всех  $E$ .

2. При больших отрицательных  $E$  плотность состояний неупорядоченной системы можно оценить методом оптимальной флуктуации [7, 8]. В силу (2) вероятность флуктуационного возникновения потенциальной ямы глубиной  $V$  и радиусом  $R$  имеет порядок

$$\exp \{-\text{const } V^2 R^d / W^2 a_0^d\}. \quad (6)$$

При наличии в яме уровня  $E = -|E|$  параметры  $V$  и  $R$  связаны соотношением

$$E = -V + \alpha J (a_0/R)^2$$

и (6) приводится к виду

$$\exp \left\{ -\text{const} \frac{1}{W^2 a_0^d} \left[ |E| + \alpha J \left( \frac{a_0}{R} \right)^2 \right]^2 R^d \right\}, \quad \alpha \sim 1. \quad (7)$$

При  $d < 4$  плотность состояний  $N(E)$  определяется перевальной точкой (7),  $R_c \propto |E|^{-1/2}$ , что приводит к известному закону Лифшица

$$N(E) \propto \exp \{-\text{const } |E|^{(4-d)/2}\} \quad (d < 4). \quad (8)$$

При  $d > 4$  экстремум (7) достигается при минимальном возможном  $R$ , т. е.  $R \sim a_0$ , откуда

$$N(E) \propto \exp \left\{ -\frac{(\alpha_1 |E| + \alpha_2 J)^2}{W^2} \right\} \quad (d > 4). \quad (9)$$

Поскольку экстремум достигается на краю области определения, то производная по  $R$  от величины в экспоненте (7) не обращается в нуль; в теоретико-полевой формулировке этому соответствует отсутствие классических решений (инстантонов) в континуальном пределе при  $d > 4$ .

3. Перенормируемость теории на больших импульсах может быть исследована путем подсчета степени импульсов в выражении для произвольной диаграммы [9]. В диаграмме  $2n$ -го порядка для средней функции Грина модели (1) эта степень равна

$$r = (d-4)n + 2 \quad (10)$$

в теории перенормируема при  $d < 4$ ; при  $d > 4$  расходимости на больших импульсах неустранимы и требуется введение обрезания.

4. В теоретико-полевой формулировке вычисление средней функции Грина модели (1) сводится к вычислению функционального интеграла с лагранжианом в форме Гинзбурга — Ландау, но с «неправильным» знаком при члене четвертой степени [6, 10]. Из уравнений вильсоновской репернорм-группы [5, 6], справедливых при любых знаках коэффициентов, следует устойчивость при  $d > 4$  гауссовской неподвижной точки, что свидетельствует об относительной простоте теории.

Перечисленные факты естественным образом приводят к гипотезе (см., например, [11, 12]), что  $d=4$  является верхней критической размерностью. Эта гипотеза была подвергнута критике в работе Таулеса [13]. По мнению Таулеса, выделенность размерности  $d=4$  связана с тем, что в пределе гауссовского белого шума (т. е. при стремлении радиуса корреля-

ций потенциала к нулю) при  $d > 4$  отсутствуют локализованные состояния. Поскольку такие состояния появляются в любой модели, в которой имеется минимальный масштаб длины (например в модели Андерсона), то в общем случае условие  $d > 4$  не приводит к упрощениям. Аргументы Таулеса косвенно подтверждаются результатом для модели Ллойда [14], в которой плотность состояний вычисляется точно и для которой размерность  $d=4$  ничем не выделена; с другой стороны, очевидна их слабость, поскольку все перечисленные факты имеют место еще до предельного перехода к белому шуму. После работы Таулеса [13] высказывались соображения о том, что  $d_{c2}=6$  [15],  $d_{c2}=8$  [16], о различных значениях  $d_{c2}$  для сильного и слабого беспорядков [17, 18], о возможном отсутствии особой размерности в интервале  $2 < d < \infty$  [19].

Из сказанного ясно, что проблема верхней критической размерности для перехода Андерсона не может считаться решенной: с одной стороны, нет единства относительно величины  $d_{c2}$ , с другой стороны, ни в одной из имеющихся публикаций не показано, каким образом условие  $d > d_{c2}$  может приводить к упрощению проблемы<sup>1)</sup>. В настоящей работе показано, что при  $d > 4$  возможно вычисление плотности состояний неупорядоченной системы  $N(E)$  во всей области энергий, включая окрестность перехода Андерсона.

## 2. Идея метода

Для нахождения плотности состояний  $N(E)$  требуется вычислить среднюю функцию Грина  $G_k(E)$  модели (1), которая определяется диаграммным рядом (рис. 1, а) [24, 25]: вершины соответствуют рассеянию на отдельных узлах решетки, пунктиры соединяют одинаковые узлы; диаграммы с более чем двумя одинаковыми узлами в гауссовской модели отсутствуют (без предположения о борновском рассеянии на одном узле) [6]. Стандартным способом можно представить  $G_k(E)$  в виде

$$G_k(E) = \frac{1}{E - \varepsilon_0(k) - \sigma_k(E)} \quad (11)$$

и перейти к вычислению собственной энергии  $\sigma_k(E)$ , которая содержит лишь неприводимые диаграммы (рис. 1, б). При  $d > 4$  собственная энергия  $\sigma_k(E)$  зависит от  $k$  и  $E$  в меру параметров  $ka_0$  и  $E/J$ ; действительную часть  $\sigma$  при  $E \approx 0$  можно включить в перенормировку спектра, что не меняет его квадратичного характера при малых  $k$  (разд. 8). Ограничивая интегрирование по  $k$  параметром обрезания

$$\Lambda \sim a_0^{-1},$$

перенормированный спектр  $\varepsilon(k)$  можно взять в квадратичном приближении, а величину

$$\Gamma = -\text{Im } \sigma$$

считать независимой от  $k$ ; отсчитывая энергию  $E$  от границы перенормированного спектра и рассматривая для определенности запаздывающую

<sup>1)</sup> Такая попытка делалась в работе [18], однако полученный в ней результат для плотности состояний при  $d > 4$  (обращение в нуль в изолированной точке) носит явно нефизический характер; фактически он связан с неправильной конструкцией решеточного инстантона (разд. 9). В самосогласованной теории локализации [20, 21] получены критические индексы, испытывающие излом при  $d=4$ ; однако эта теория основана на неконтролируемых приближениях, законность которых сомнительна для пространства любой размерности: в частности, структура теории полностью разрушается при учете пространственной дисперсии коэффициента диффузии; отметим также, что индекс проводимости не согласуется с результатами для  $d=\infty$  [22, 23].

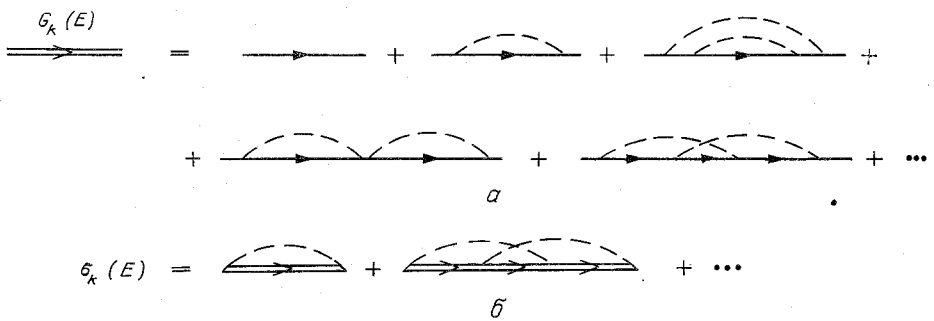


Рис. 1. Диаграммы для средней функции Грина (а) и собственной энергии (б) до четвертого порядка теории возмущений

функцию Грина, имеем

$$G_k(E) = \frac{1}{E - k^2/2m + i\Gamma(E)}, \quad k < \Lambda. \quad (12)$$

В силу сказанного

$$\Gamma = -\text{Im} \{ \sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_6 + \dots \} \quad (13)$$

( $\sigma_{2n}$  — вклад в собственную энергию  $2n$ -го порядка теории возмущений); поскольку  $\sigma_{2n}$  является функционалом от  $G_k(E)$ , то зависимость  $\Gamma(E)$  определяется уравнением вида

$$\Gamma = f(E, \Gamma). \quad (14)$$

В низшем (втором) порядке теории возмущений уравнение (14) имеет вид

$$\Gamma = f^{(0)}(E, \Gamma) = W^2 a_0^d \int_0^J N_0(\varepsilon) d\varepsilon \frac{\Gamma}{(E - \varepsilon)^2 + \Gamma^2}, \quad J = \frac{\Lambda^2}{2m}. \quad (15)$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} f^{(0)}(E, \Gamma) = \pi W^2 a_0^d N_0(E), \quad \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \frac{\partial f^{(0)}(E, \Gamma)}{\partial \Gamma} \sim \frac{W^2}{J^2}, \quad (16)$$

откуда ясно, что при  $E < 0$  имеется лишь тривиальное решение  $\Gamma = 0$  (рис. 2) и в силу формулы

$$N(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{N} \sum_k G_k(E) = \int_0^J N_0(\varepsilon) d\varepsilon \frac{\Gamma}{(E - \varepsilon)^2 + \Gamma^2} \quad (17)$$

( $N$  — полное число узлов решетки) плотность состояний обращается в нуль при  $E < 0$ ; следовательно, в этом приближении флуктуационный хвост плотности состояний отсутствует.

Такая ситуация сохраняется в любом конечном порядке теории возмущений. Действительно, при  $E < 0$  действительная часть знаменателя  $G$ -функции (12) не обращается в нуль, так что

$$\text{Im} G_k(E) \propto \Gamma \quad \text{при} \quad \Gamma \rightarrow 0.$$

Следовательно, при  $\Gamma \rightarrow 0$  бесконечно малую мнимую часть имеют как любая диаграмма на рис. 1, б, так и сумма их конечного числа, поэтому

$$f(E, \Gamma) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Gamma \rightarrow 0$$

и уравнение (14) имеет корень  $\Gamma = 0$ ; он единственный, так как оценка для  $\partial f / \partial \Gamma$  в (16) сохраняется в общем случае. Тот же вывод следует из

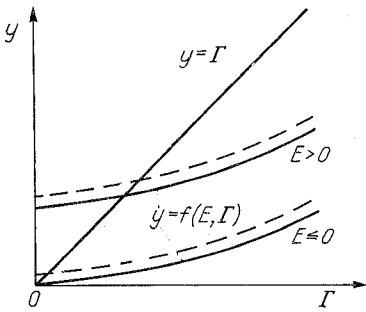


Рис. 2

Рис. 2. Графическое решение уравнения (14)

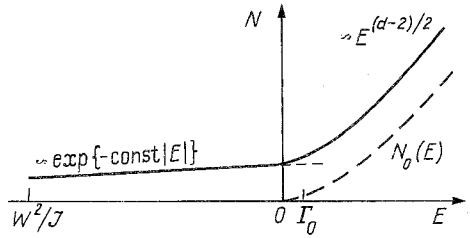


Рис. 3

Рис. 3. Поведение плотности состояний вблизи края исходной зоны в пространстве размерности  $d > 4$

оценки (9): поскольку плотность состояний во флуктуационной области экспоненциально мала по параметру  $1/W^2$ , то она может быть получена лишь суммированием бесконечного ряда по степеням  $W^2$ , причем сумма не может пониматься в обычном смысле.

Здесь мы подходим к существу проблемы. Нетрудно показать, что при  $E \approx 0$  все диаграммы  $2n$ -го порядка для  $\sigma$  имеют один и тот же порядок величины; ввиду невозможности ограничиться конечным порядком теории возмущений это означает невозможность какого-либо отбора диаграмм и необходимость суммирования всего ряда. Существует, однако, принципиальная разница между случаями  $d < 4$  и  $d > 4$ . В первом из них один и тот же порядок величины имеют не только различные диаграммы одного порядка, но и диаграммы разных порядков; во втором случае диаграмма  $(2n+2)$ -го порядка содержит лишний малый параметр  $W^2/J^2$  по сравнению с диаграммой  $2n$ -го порядка<sup>21</sup>. Последнее обстоятельство имеет решающее значение: оно позволяет ограничиться в правой части (13) первым членом  $\sigma_2$  и суммой далеких членов ряда; последняя хотя и мала, но имеет качественное значение, так как не исчезает в пределе  $\Gamma \rightarrow 0$ . Вместо (15) получается уравнение

$$\Gamma = W^2 a_0^d \int_0^{\Gamma} N_0(\varepsilon) d\varepsilon \frac{\Gamma}{(E - \varepsilon)^2 + \Gamma^2} + \Gamma_0 \quad (18)$$

с экспоненциально малой величиной  $\Gamma_0$ :

$$\Gamma_0 = cJ \left( \frac{J^2}{W^2} \right)^b \exp(-J^2/aW^2), \quad (19)$$

что приводит к сдвигу кривых для  $f(E, \Gamma)$  на рис. 2 (пунктир) и появлению флуктуационного хвоста при  $E < 0$ . Уравнение (18) описывает плавный переход между асимптотиками

$$\Gamma(E) = \begin{cases} \Gamma_0 + \pi W^2 a_0^d N_0(E), & E \gg \Gamma_0, \\ \Gamma_0, & -E \ll \Gamma_0, \end{cases} \quad (20a)$$

$$(20b)$$

<sup>21</sup> Это связано с тем, что при  $d < 4$  интегралы определяются областью малых импульсов и функцию Грина  $G_k(E)$  следует считать величиной порядка  $\Gamma^{-1}$ , тогда как при  $d > 4$  существенны импульсы порядка  $\Lambda$  и  $G_k(E) \sim J^{-1}$ .

и соответственно для плотности состояний

$$N(E) = \begin{cases} N_0(E) + \Gamma_0 \int_0^J \frac{N_0(\varepsilon)}{\varepsilon^2} d\varepsilon, & E \gg \Gamma_0, \\ \frac{\text{const}}{J a_0^d} \left( \frac{J^2}{W^2} \right)^b \exp(-J^2/aW^2), & -E \gg \Gamma_0. \end{cases} \quad (21a)$$

$$N(E) = \begin{cases} N_0(E) + \Gamma_0 \int_0^J \frac{N_0(\varepsilon)}{\varepsilon^2} d\varepsilon, & E \gg \Gamma_0, \\ \frac{\text{const}}{J a_0^d} \left( \frac{J^2}{W^2} \right)^b \exp(-J^2/aW^2), & -E \gg \Gamma_0. \end{cases} \quad (21b)$$

Убывание  $N(E)$  при больших отрицательных  $E$  определяется медленным изменением величины  $a$ :

$$a(E/J) = a(0) + a'(0)E/J \quad (22)$$

(ср. с (9)) и происходит на масштабе  $W^2/J$ . Фактически формула (20a) с относительной точностью

$$\frac{W^2}{J^2} \left( \frac{\Gamma_0}{J} \right)^{(d-1)/2} \quad (23)$$

верна для всех  $E$  — точный результат отличается от нее лишь сглаживанием особенности  $N_0(E)$  при  $E=0$  на масштабе  $\Gamma_0$ . В области  $|E| \leq \Gamma_0$  второй член в (20a) мал по параметру (23) и  $N(E)$  дается формулой (17) с  $\Gamma = \Gamma_0$ . Таким образом (рис. 3), плотность состояний неупорядоченной системы при  $d > 4$  в экспоненциально малом интервале энергий переходит от величины  $N_0(E)$  для идеального кристалла к экспоненциальному убыванию на масштабе  $W^2/J$ , не имея особенностей в окрестности перехода Андерсона  $E \sim \Gamma_0$ <sup>3)</sup>.

Поясним механизм возникновения последнего члена в (18). Рассмотрим цепочку равенств

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^n = \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x}}{1-xz} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y(y-z)} e^{-1/y}, \quad (24)$$

описывающую суммирование по Борелю расходящегося факториального ряда [27]. Положив  $z = g + i0$  ( $g > 0$ ) и взяв мнимую часть, получим равенство

$$\text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} n! (g + i0)^n = \frac{\pi}{g} e^{-1/g}, \quad (25)$$

показывающее, как в результате суммирования расходящегося ряда бесконечно малая мнимая добавка  $+i0$  превращается в экспоненциально малую (при  $g \ll 1$ ), но конечную величину.

Применимость этих соображений к ряду теории возмущений интуитивно ясна из того, что число диаграмм  $2n$ -го порядка для  $\sigma$  растет с  $n$  по факториальному закону, а все диаграммы имеют один порядок величины; при  $g \sim W^2/J^2$  (параметр разложения в (13)) получается результат типа (19)<sup>4)</sup>. Обоснование того, что мнимая добавка  $+i0$  входит в каждый член ряда в нужной комбинации, требует более подробного рассмотрения, что может быть сделано путем статистического анализа далеких членов ряда теории возмущений; возможность ограничения далекими членами

<sup>3)</sup> Последний результат обычно предполагается справедливым на основании точного решения для модели Ллойда [14]; однако, результаты для иерархических моделей [26] показывают, что потенциалы с бесконечной дисперсией лежат в другом классе универсальности и перенесение результатов для модели Ллойда на гауссовскую модель (1) в общем случае некорректно.

<sup>4)</sup> В другом контексте связь флуктуационного хвоста с факториальной расходимостью ряда теории возмущений обсуждалась в [28].

ясна из того, что результат (25) сохраняется, если суммирование начинается не с  $n=0$ , а с произвольного конечного  $n_0$ .

В рамках статистического анализа величины  $a$ ,  $b$ ,  $c$  возникают как феноменологические параметры, однако их можно определить, воспользовавшись тем, что область применимости предлагаемого подхода перекрывается с областью применимости метода оптимальной флуктуации или более изощренного инстантонного метода [28–30]. Действительно, в силу (9) показатель экспоненты при  $d > 4$  остается большим вплоть до  $E=0$  и применимость последних двух методов ограничена не условием применимости метода перевала, а лишь возможностью пренебрежения взаимодействием глубоких флуктуаций между собой за счет хвоста волновых функций  $\exp(-\chi r)$  ( $\chi = (2m|E|)^{1/2}$ ), который неограниченно удлиняется при  $|E| \rightarrow 0$ . Поскольку концентрация глубоких флуктуаций экспоненциально мала, то их взаимодействие является слабым при  $E < 0$  вне экспоненциально малой окрестности точки  $E=0$ ; ввиду того что величину  $\Gamma_0$  можно считать не зависящей от энергии в интервале

$$\Delta E \leq W^2/J,$$

параметры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  можно определить путем сшивки с результатами инстантонного метода.

### 3. Связь диаграмм $(2n+2)$ -го и $2n$ -го порядков

Диаграмма  $2n$ -го порядка содержит  $n$  интегрирований по импульсам примесных пунктов  $q_1, q_2, \dots, q_n$  и  $(2n-1)$ -функций Грина, импульсы которых определяются линейными комбинациями  $q_i$  и внешнего импульса  $k$ ; импульс  $q_i$  входит лишь в аргументы  $G$ -функций, покрываемых  $i$ -м пунктиром. Обезразмеривая интегралы заменой

$$q_i \rightarrow q_i \Lambda,$$

вклад диаграммы  $2n$ -го порядка можно представить в виде

$$\sigma^{(2n)} = J \frac{W^{2n}}{J^{2n}} f\left(\frac{E}{J}, \frac{\Gamma}{J}, \frac{k^2}{2mJ}\right). \quad (26)$$

При  $d > 4$  функция  $f$  конечна в точке  $E = \Gamma = k^2/2m = 0$  и имеет в ней конечные первые производные по всем аргументам. Это следует из характера сходимости на малых импульсах при

$$E = \Gamma = k^2/2m = 0.$$

Пусть  $l$  пунктиров имеют малый импульс  $\sim q$ , а остальные  $l' = n - l$  пунктиров — большой импульс  $\sim \Lambda$ , который входит в аргументы не менее чем  $2l'$ -функций Грина (минимально  $l'$  пунктиров покрывают  $(2l' - 1)$   $G$ -функций, но в этом случае соответствующая часть диаграммы оказывается собственно энергетической вставкой). Тогда вклад малых импульсов определяется интегралом

$$\int_0^{q_0} \frac{q^{d1-1} dq}{q^{2(2l-1)}} \sim q^{2+(d-4)l/l} \Big|_0^{q_0} \quad (27)$$

и сходится на нижнем пределе при всех  $l \geq 1$ . При дифференцировании функции  $f$  по одному из аргументов степень  $q$  уменьшается на 2, но сходимость на нижнем пределе сохраняется. Из (27) следует, что главный вклад в диаграмму происходит от области  $q_i \sim \Lambda$ . Из сказанного ясно, что зависимость  $\sigma^{(2n)}$  от  $E$ ,  $\Gamma$ ,  $k$  является медленной, что позволяет положить

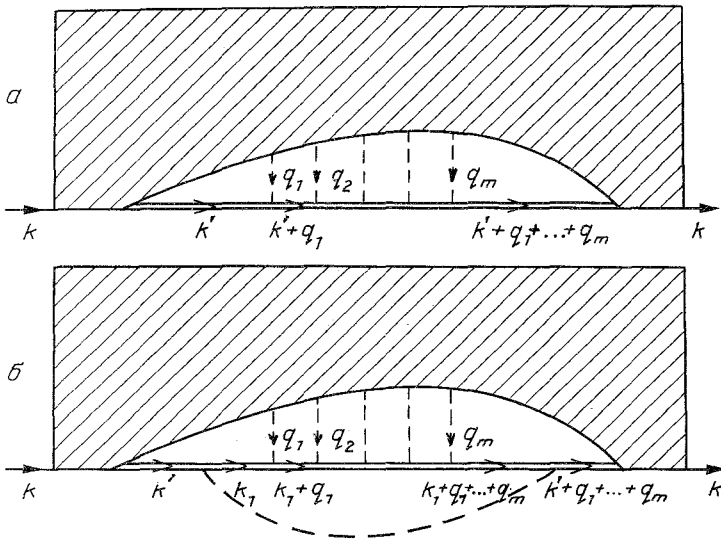


Рис. 4. Диаграмма  $(2n+2)$ -го порядка (б) получается из некоторой диаграммы  $2n$ -го порядка (а) путем «навешивания» примесного пункта

$E=0, k=0$ ; параметр  $\Gamma/J$  будем считать конечным, так как он является единственным источником возникновения мнимой части  $\sigma^{(2n)}$ .

Диаграмма  $(2n+2)$ -го порядка может быть получена из диаграммы  $2n$ -го порядка путем «навешивания» примесного пункта (рис. 4); вклады диаграмм на рис. 4, а, б имеют вид

$$\sigma^{(2n)} = \sum_{k'} \sum_{q_1 \dots q_m} F(k', q_1 \dots q_m) G_{k'} G_{k'+q_1} \dots G_{k'+q_1+\dots+q_m}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(2n+2)} &= \sum_{k'} \sum_{q_1 \dots q_m} F(k', q_1 \dots q_m) \frac{W^2}{N} \cdot \\ &\cdot \sum_{k_1} G_{k_1} G_{k_1+q_1} \dots G_{k_1+q_1+\dots+q_m} G_{k'+q_1+\dots+q_m}, \end{aligned} \quad (29)$$

или в более компактных обозначениях

$$\sigma^{(2n)} = \sum_Q H(Q), \quad \sigma^{(2n+2)} = \sum_Q H(Q) h(Q), \quad Q = (k', q_1, \dots, q_m), \quad (30)$$

где

$$h(Q) = h(k', q_1 \dots q_m) = \frac{W^2}{N} \frac{\sum_{k_1} G_{k_1} G_{k_1+q_1} \dots G_{k_1+q_1+\dots+q_m}}{G_{k'+q_1+\dots+q_m} G_{k'+q_1+\dots+q_{m-1}}}. \quad (31)$$

Одна и та же диаграмма  $(2n+2)$ -го порядка может быть получена из различных диаграмм  $2n$ -го порядка. Устраним эту неоднозначность, потребовав, чтобы навешиваемый пункт имел минимальную длину. Тогда с подавляющей вероятностью он будет охватывать число вершин  $\sim 1$  (см. Приложение 1). Считая в (31)  $k', q_i \sim \Lambda, m \sim 1$ , получим оценки

$$h' \sim \frac{W^2}{J^2}, \quad h'' \sim \frac{W^2}{J^2} \frac{\Gamma}{J}, \quad (32)$$



где штрихом и двумя штрихами обозначены действительная и мнимая части. Выделяя в (30) действительные и мнимые части

$$\begin{aligned}\sigma'^{(2n+2)} &= \sum_q h'(Q)H'(Q) - \sum_q h''(Q)H''(Q), \\ \sigma''^{(2n+2)} &= \sum_q h''(Q)H'(Q) + \sum_q h'(Q)H''(Q)\end{aligned}\quad (33)$$

и производя с помощью (32) размерные оценки, получим связь диаграмм  $(2n+2)$ -го и  $2n$ -го порядков

$$\left| \begin{array}{l} \sigma'^{(2n+2)} \\ \sigma''^{(2n+2)} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \sim W^2/J^2 & \sim (-W^2\Gamma/J^3) \\ \sim W^2\Gamma/J^3 & \sim W^2/J^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \sigma'^{(2n)} \\ \sigma''^{(2n)} \end{array} \right|.\quad (34)$$

Запишем (34) в виде точного соотношения, введя произвольные константы

$$\left| \begin{array}{l} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{array} \right| = g \left| \begin{array}{cc} A_n & -\mu D_n \\ \mu B_n & C_n \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x_n \\ y_n \end{array} \right|,\quad (35)$$

где мы положили для краткости

$$x_n = \sigma'^{(2n)}, \quad y_n = \sigma''^{(2n)}, \quad g = W^2/J^2, \quad \mu = \Gamma/J.\quad (36)$$

Разобьем навешиваемые пунктиры на «классы», так что каждый класс характеризуется значениями коэффициентов  $A_n, B_n, C_n, D_n$ , лежащими в некотором малом интервале. Диаграммы, получаемые из первой диаграммы на рис. 1, б путем последовательного навешивания пунктиров одного и того же класса, составляют при  $n \rightarrow \infty$  бесконечно малую долю от их общего числа. В типичной диаграмме  $2n$ -го порядка класс пунктира на каждом шаге выбирается случайным образом. Это позволяет перейти к статистическому описанию и рассматривать  $A_n, B_n, C_n, D_n$  как случайные величины.

#### 4. Анализ уравнения (35)

Уравнения типа (35) изучаются в теории одномерных неупорядоченных систем [8, 31] и в принципе допускают полное исследование. Для наших целей достаточно исследовать эволюцию первых и вторых моментов величины  $x_n, y_n$ , которая определяется уравнениями

$$\left| \begin{array}{l} \overline{x_{n+1}} \\ \overline{y_{n+1}} \end{array} \right| = g \left| \begin{array}{cc} \overline{A} & -\mu \overline{D} \\ \mu \overline{B} & \overline{C} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \overline{x_n} \\ \overline{y_n} \end{array} \right|,\quad (37)$$

$$\left| \begin{array}{l} \overline{x_{n+1}^2} \\ \overline{x_{n+1}y_{n+1}} \\ \overline{y_{n+1}^2} \end{array} \right| = g^2 \left| \begin{array}{ccc} \overline{A^2} & -2\mu \overline{AD} & \mu^2 \overline{D^2} \\ \mu \overline{AB} & \overline{AC} - \mu^2 \overline{BD} & -\mu \overline{CD} \\ \mu^2 \overline{B^2} & 2\mu \overline{BC} & \overline{C^2} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \overline{x_n^2} \\ \overline{x_n y_n} \\ \overline{y_n^2} \end{array} \right|.\quad (38)$$

Решения (37) имеют вид

$$\overline{x_n}, \overline{y_n} \propto (g\chi)^n,$$

где

$$\chi^2 = 1/2 [(\overline{A} + \overline{C}) \pm [(\overline{A} - \overline{C})^2 - \mu^2 \overline{BD}]^{1/2}].\quad (39)$$

В рамках феноменологического анализа возможны два случая:

$$(a) (\overline{A} - \overline{C})^2 > \mu^2 \overline{BD} \quad \text{и} \quad (b) (\overline{A} - \overline{C})^2 < \mu^2 \overline{BD},\quad (40)$$

однако фактически случай (а) realizоваться не может. Действительно, придадим энергии  $E$  достаточно большую мнимую часть  $\text{Im } E > 0$ , так что  $|E| \gg J$ ; тогда величина  $h$  не зависит от импульсов и равна

$$h = \frac{W^2}{E^2} = \frac{W^2}{|E|^2} e^{-2i\varphi}, \quad (41)$$

откуда

$$\chi^\pm = |h| e^{\mp 2i\varphi}, \quad \text{Im } \chi^\pm \neq 0,$$

и, следовательно, реализуется случай (б). Предположение о реализации случая (а) при  $\text{Im } E \rightarrow +0$  означает, что при конечном  $\text{Im } E$  происходит переход от случая (б) к случаю (а), который сопровождается особенностью (скачком) функции Грина, что противоречит ее аналитичности в верхней полуплоскости. Для случая (б) общее решение (37) имеет вид

$$\overline{x_n} = CJ \left( \frac{a}{2} \frac{W^2}{J^2} \right)^n \left( \frac{4\overline{D}}{\overline{B}} \right)^{1/2} \cos(\bar{\mu}n + \varphi_0), \quad (42)$$

$$\overline{y_n} = CJ \left( \frac{a}{2} \frac{W^2}{J^2} \right)^n \cos(\bar{\mu}n + \varphi_0 + \varphi_1),$$

где

$$a = \overline{A} + \overline{C}, \quad \bar{\mu} = a^{-1} (\mu^2 \overline{B}\overline{D} - (\overline{A} - \overline{C})^2)^{1/2}, \quad (43)$$

$$\varphi_0 = \arccos [(\overline{C} - \overline{A}) / \mu (\overline{B}\overline{D})^{1/2}],$$

а  $C$  и  $\varphi$ , определяются из начальных условий. Их точное определение по значению  $\sigma^{(2)}$  не имеет смысла ввиду заведомой нестационарности распределения величин  $A_n, B_n, \dots$  при малых  $n$ . Заметив, что при  $\Gamma \rightarrow 0$

$$\text{Re } \sigma^{(2n)} \rightarrow \text{const}, \quad \text{Im } \sigma^{(2n)} \propto \Gamma, \quad \text{Im } \sigma^{(2n)} < 0,$$

получим, что  $C \sim 1$ , а

$$\varphi_0 + \varphi_1 = \pi/2 + O(\mu).$$

Пренебрегая величиной  $O(\mu)$ , получим

$$\overline{y_n} = -CJ \left( \frac{a}{2} \frac{W^2}{J^2} \right)^n \sin \bar{\mu}n \quad (C > 0). \quad (44)$$

Решение (38) имеет вид

$$\overline{x_n^2}, \overline{x_n y_n}, \overline{y_n^2} \propto (\chi_1 g)^{2n}, \quad (45)$$

где

$$\chi_1^2 = \max\{\overline{A^2}, \overline{AC}, \overline{C^2}\} + O(\mu^2). \quad (46)$$

Нетрудно видеть, что

$$\chi_1 > |\chi^\pm|,$$

т. е. дисперсии величин  $x_n, y_n$  растут быстрее, чем их средние. Следовательно, вклад отдельной диаграммы  $2n$ -го порядка является сильно флуктуирующей величиной.

## 5. Полный вклад $2n$ -го порядка

Полный вклад  $2n$ -го порядка теории возмущений  $\sigma_{2n}$  является суммой вкладов отдельных диаграмм  $\sigma_i^{(2n)}$  и по смыслу статистического описания определяется средним  $\langle \dots \rangle_{M_n}$  по конечной выборке из  $M_n$  элементов:

$$\sigma_{2n} = \sum_{i=1}^{N_{2n}} \sigma_i^{(2n)} \approx N_{2n} \langle \sigma_i^{(2n)} \rangle_{M_n}, \quad (47)$$

где  $N_{2n}$  — число диаграмм  $2n$ -го порядка для собственной энергии; нетрудно показать (см. Приложение 2), что

$$(2n-1)!! > N_{2n} > (2n-3)!! \quad (48)$$

Для определения  $\sigma_{2n}$  с относительной точностью  $\xi_n$  объем выборки  $M_n$  должен иметь порядок

$$M_n \sim \frac{1}{\xi_n^2} \left( \frac{2\chi_1}{a} \right)^{2n} \quad (49)$$

Здесь мы использовали результаты (42), (45) и предположили, что величины  $\sigma_i^{(2n)}$  статистически независимы. Пусть  $\sigma_i^{(2n)}$  и  $\sigma_j^{(2n)}$  — два элемента, входящих в выборку. Обозначая  $\bar{S}_n$  матрицу, входящую в (35), имеем

$$\sigma_i^{(2n)} = \bar{S}_{n-1} \bar{S}_{n-2} \dots \bar{S}_2 \bar{S}_1 \sigma^{(2)}, \quad \sigma_j^{(2n)} = \bar{S}'_{n-1} \bar{S}'_{n-2} \dots \bar{S}'_2 \bar{S}'_1 \sigma^{(2)} \quad (50)$$

Среди матриц  $\bar{S}_k$  и  $\bar{S}'_k$  есть совпадающие: такое совпадение происходит с заметной вероятностью лишь при  $k \leq k_0$ , где  $k_0$  определяется условием

$$N_{2k_0} \sim M_n \quad (51)$$

Коэффициент корреляции между  $\sigma_i^{(2n)}$  и  $\sigma_j^{(2n)}$  имеет порядок

$$(a/2\chi_1)^{2(n-k_0)}$$

В силу факториального роста  $N_{2n}$  величины  $M_n$  можно выбрать так, что  $\xi_n \rightarrow 0$ ,  $k_0/n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , что обеспечивает сколь угодно высокую точность определения  $\sigma_{2n}$  при неограниченном ослаблении корреляций между элементами, входящими в выборку.

Заметив, что для верхней и нижней оценок  $N_{2n}$  (см. (48)) справедливы рекурренции

$$N_{2n+2}^{\text{верх}} = (2n+1)N_{2n}^{\text{верх}}, \quad N_{2n+2}^{\text{ниж}} = (2n-1)N_{2n}^{\text{ниж}}, \quad (52)$$

предположим существование аналогичной рекурренции для  $N_{2n}$ :

$$N_{2n+2} = (2n+2\beta)N_{2n}, \quad 1 \geq 2\beta \geq -1 \quad (53)$$

Тогда

$$N_{2n} = \text{const } 2^n \gamma(n+\beta), \quad (54)$$

где  $\gamma(x)$  — гамма-функция, и с учетом (44), (47) получим

$$\text{Im } \sigma_{2n} = -\text{const } J \gamma(n+\beta) \left( a \frac{W^2}{J^2} \right)^n \sin \bar{\mu} n, \quad \text{const} > 0 \quad (55)$$

## 6. Уравнение для $\Gamma$

Пусть статистическое описание применимо с достаточной точностью при  $n > n_0$ ; тогда из (13) и (55) имеем

$$\Gamma = \text{Im} \left\{ -\sigma_2 - \sigma_4 - \dots - \sigma_{2n_0} + \text{const} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \gamma(n+\beta) (ag)^n (1+i\bar{\mu})^n \right\} \quad (56)$$

Вклады конечных порядков  $\sigma_2, \sigma_4, \dots$  имеют мнимую часть, исчезающую при  $\Gamma \rightarrow 0$ :

$$\text{Im } \sigma_{2n} \sim \Gamma \frac{W^{2n}}{J^{2n}}, \quad (57)$$

и из них можно сохранить только первый. Сумма по  $n$  в (56) вычисляется

аналогично (24) и имеет конечную мнимую часть при  $\Gamma \rightarrow 0$ . Учитывая, что  $\mu \sim \mu \ll 1$ , приходим к результатам (18), (19) с параметрами

$$a = \bar{A} + \bar{C}, \quad b = \beta.$$

Последнему результату не следует, однако, придавать большого значения (см. разд. 7).

## 7. Роль нестационарности распределения

Выше использовались определенные предположения о статических свойствах коэффициентов  $A_n, B_n, C_n, D_n$  (о существовании средних, стационарности распределения по  $n$  и т. д.), которые трудно обосновать математически. Проблему обоснования можно, однако, обойти, воспользовавшись тем, что область применимости излагаемого подхода перекрывается с областью применимости инстантонного метода (разд. 2).

В рамках феноменологического анализа можно модифицировать изложенные выше вычисления, проведя их на основе других статистических гипотез. При этом возможны следующие изменения результатов.

а) Функциональная структура  $\Gamma_0$  (19) не меняется, хотя, вообще говоря, изменяется смысл параметров  $a, b, c$ ; такая модификация несущественна для дальнейшего.

б) Происходит изменение функциональной структуры  $\Gamma_0$ ; такая модификация должна быть отвергнута, так как вступает в противоречие с результатами инстантонного метода (разд. 9).

Проиллюстрируем эти соображения на примере анализа возможной нестационарности распределения коэффициентов матрицы (35). Пусть  $\bar{A}_n, \bar{B}_n, \dots$  зависят от  $n$ . Считая эти изменения медленными и используя аналог квазиклассического приближения, получим вместо (55)

$$\text{Im } \sigma_{2n} = -\text{Im } CJ(2g)^n \gamma(n+\beta) \exp \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k + i\mu \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k \right\}, \quad (58)$$

где  $\lambda_n, \eta_n$  выражаются через средние  $\bar{A}_n, \bar{B}_n, \dots$ . Если при  $n \rightarrow \infty$   $\lambda_n \rightarrow \lambda_\infty$ ,  $\eta_n \rightarrow \eta_\infty$ , то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k = \lambda_\infty n + o(n), \quad \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k = \eta_\infty n + o(n). \quad (59)$$

Фактически рост сумм по более быстрому закону, чем линейный, оказывается невозможным. Это доказывается так же, как невозможность случая  $(\bar{A}-\bar{C})^2 > \mu^2 \bar{B}\bar{D}$  (см. разд. 4).

Скорость сходимости  $\lambda_n, \eta_n$  к стационарным значениям имеет, вообще говоря, существенное значение. Пусть, например,

$$\lambda_n = \lambda_\infty + \frac{\lambda_1}{n}, \quad \eta_n = \eta_\infty + \frac{\eta_1}{n} \quad (n \rightarrow \infty), \quad (60)$$

что соответствует регулярному разложению по  $1/n$ . Тогда в силу (58)

$$\begin{aligned} \text{Im } \sigma_{2n} &= -\text{Im } CJ(2g)^n \gamma(n+\beta) \exp \{ \lambda_\infty n + \lambda_1 \ln n + \\ &\quad + i(\eta_\infty n + \eta_1 \ln n) + \text{const} \} = \\ &= -CJ \text{Im} (2g \exp(\lambda_\infty + i\eta_\infty))^n \gamma(n+\beta + \lambda_1 + i\mu\eta_1) \end{aligned} \quad (61)$$

(использована формула Стирлинга), что после вычисления суммы в (56) приводит к (19) с показателем

$$b = \beta + \lambda_1. \quad (62)$$

Следовательно, отождествлять показатель  $b$  с комбинаторной константой  $\beta$ , вообще говоря, нет оснований.

Если  $\lambda_n, \eta_n$  сходятся к  $\lambda_\infty, \eta_\infty$  быстрее, чем  $1/n$ , то роль нестационарности распределения сводится к перераспределению константы  $c$  в (19). Если же сходимость более медленная, чем  $1/n$ , то предэкспоненциальный фактор в (19) не может определяться никакой конечной степенью  $J^2/W^2$ ; следовательно, его функциональная форма существенно изменяется, что противоречит результатам инстантонного метода.

### 8. Зависимость $\sigma$ от $k$ и $E$

Сравнивая (26) с (55) или (61) и учитывая, что величина  $\Gamma_0$  в (18) определяется пределом  $\Gamma \rightarrow 0$ , получим

$$a = a\left(\frac{E}{J}, \frac{k^2}{2mJ}\right), \quad b = b\left(\frac{E}{J}, \frac{k^2}{2mJ}\right), \quad c = c\left(\frac{E}{J}, \frac{k^2}{2mJ}\right), \quad (63)$$

где все функции конечны и однократно дифференцируемы в точке

$$E = k^2/2m = 0.$$

Согласно результатам инстантонного метода (разд. 9), справедливым при  $E \gg \Gamma$ , параметры  $a, b$  не зависят от  $k$ , а параметр  $c$  не зависит от  $E$ :

$$a = a(E/J), \quad b = \text{const}, \quad c = c(E/J, k^2/2mJ). \quad (64)$$

В силу дифференцируемости по  $E$  эти свойства сохраняются и в области  $|E| \ll J$ . Таким образом, величина  $\Gamma_0$  зависит от  $k$  лишь через коэффициент  $c$ , и эта зависимость является медленной. Для конкретного выбора интегралов перекрытия  $J_{m-n}$  в (1) ее можно определить инстантонным методом (с помощью фурье-преобразования формулы (77) разд. 9). Для модели с обрезанием (12) учет зависимости  $c(k)$  является превышением точности. Энергетическая зависимость  $\Gamma_0$  определяется главным образом зависимостью от энергии параметра  $a$ , которая в силу дифференцируемости имеет вид (22).

Действительная часть  $\sigma$ , связанная с вкладом далеких членов ряда теории возмущений, аналитически зависит от  $a, b, c$  (ср. с (24)), чем обуславливаются ее медленная зависимость от энергии и дифференцируемость по  $k^2$  (разд. 2).

В принятых приближениях плотность состояний  $N(E)$  определяется выражениями (17)–(19) и оказывается гладкой функцией  $E$ . Этот результат сохраняется и для точной  $N(E)$ . Действительно, при конечных  $\Gamma$  вклад отдельной диаграммы (26) аналитичен по  $E$  и  $\Gamma$ . Сопоставление с (55), (64) даст аналитичность по  $E$  и  $\Gamma$  параметров  $a, b, c, \mu$  и, следовательно, аналитичность суммы далеких членов ряда теории возмущений, которая является аналитической функцией этих параметров (ср. с (24)). В результате функция  $f(E, \Gamma)$  в (14) аналитична при конечных  $\Gamma$ . Учтя, что корень уравнения (14) отличен от нуля при всех  $E$ , получим, что  $N(E)$  является гладкой функцией  $E$ .

### 9. Вычисление $N(E)$ при $E < 0$ инстантонным методом

Поскольку инстантонный метод обычно применяется к случаю  $d < 4$  [28–30], а результат работы [18] явно ошибочен, приведем вычисления для  $d > 4$ . Будем следовать обзору [30] и, опуская детали, отмечать лишь специфику случая  $d > 4$ .

Применение метода реплик к дискретной гауссовской модели (1) дает

$$G_{n_1, n_2} = \lim_{n \rightarrow 0} \int D\Phi^\alpha \Phi_{n_1}^{(1)} \Phi_{n_2}^{(1)} \exp\{-S[\Phi]\}, \quad (65)$$

$$S[\Phi] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{nn'} (J_{nn'} - E\delta_{nn'}) \Phi_n^\alpha \Phi_{n'}^{\alpha-1} W^2 \sum_n \left( \sum_{\alpha=1}^n (\Phi_n^\alpha)^2 \right)^2. \quad (66)$$

Классическое решение (инстантон) имеет вид

$$(\Phi_n^\alpha)_{cl} = \Phi_n^{cl} u^\alpha, \quad (67)$$

где  $u^\alpha$  — компонента единичного вектора в репличном пространстве, а  $\Phi_n^{cl}$  является решением уравнения

$$\sum_m J_{n-m} \Phi_m^{cl} - E \Phi_n^{cl} - \frac{W^2}{2} (\Phi_n^{cl})^3 = 0. \quad (68)$$

Из оценки методом оптимальной флуктуации (разд. 1) ясно, что при  $d > 4$  инстантон локализован на атомном расстоянии  $|n| \sim 1$ . При этом членом  $E\Phi$  в (68) можно пренебречь по сравнению с первым членом  $\sim J\Phi$ . При  $|n| \gg 1$  функция  $\Phi_n^{cl}$  является малой и медленно меняющейся, что позволяет пренебречь членом  $\sim \Phi^3$  и разложить по градиентам первый член  $\left( \sum_m J_{n-m} \Phi_m \right)$ . Тогда

$$\Phi_n^{cl} = C |n|^{-\nu} K_\nu(\chi |n|), \quad \nu = (d-2)/2, \quad \chi = (|E|/J)^{1/2}, \quad (69)$$

где  $K_\nu(x)$  — функция Мак-Дональда, а константа  $C$  определяется из сшивки с областью  $|n| \sim 1$  и имеет порядок

$$C \sim \chi^\nu J^{1/2} / W.$$

Нетрудно проверить, что вклад области  $|n| \gg 1$  в действие оказывается пренебрежимо малым. Противоположный вывод работы [18] связан с использованием при  $|n| \gg 1$  параметризации решения, аналогичной случаю  $d < 4$ , что приводило к константе  $C \sim \chi^{-1}$  и сильному завышению вклада инстантонного хвоста. В пренебрежении энергетической зависимостью можно положить  $E=0$  и провести обезразмеривание:

$$\Phi_n^{cl} = \left( \frac{2J}{W^2} \right)^{1/2} \chi_n, \quad J_{n-m} = J I_{n-m}, \quad (70)$$

где  $I_{n-m} \sim 1$ , а  $\chi_n$  — решение уравнения

$$\sum_m I_{n-m} \chi_m - \chi_n^3 = 0. \quad (71)$$

Тогда классическое действие имеет вид

$$S[\Phi^{cl}] = \frac{J^2}{aW^2}, \quad a^{-1} = \frac{1}{2} \sum_n \chi_n^4. \quad (72)$$

Для малых отклонений от классического решения

$$\Phi_n^\alpha = \Phi_n^{cl} u^\alpha + \varphi_n^\alpha \quad (73)$$

действие записывается в виде

$$S[\Phi] = S[\Phi^{cl}] + \frac{1}{2} \sum_n \sum_{\alpha\beta} \varphi_n^\alpha \hat{M}_{\alpha\beta} \varphi_n^\beta, \quad (74)$$

где

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = \bar{M}_L u^\alpha u^\beta + \bar{M}_T (\delta_{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta), \quad (75)$$

$$\bar{M}_L f_n = J \left[ \sum_m I_{n-m} f_m - 3\chi_n^2 f_n \right], \quad \bar{M}_T f_n = J \left[ \sum_m I_{n-m} f_m - \chi_n^2 f_n \right].$$

Ввиду локализации инстантона на атомном масштабе дискретность модели имеет при  $d > 4$  принципиальное значение (в континуальном пределе инстантоны не существуют), что приводит к отсутствию нулевых трансляционных мод. Выделяя нулевые вращательные моды, безразмерная собственные значения операторов  $\bar{M}_L$  и  $\bar{M}_T$

$$\lambda_s^L = J\mu_s^L, \quad \lambda_s^T = J\mu_s^T \quad (76)$$

и переходя к пределу  $n \rightarrow 0$ , получим

$$\text{Im } G_{nn} = \text{const} \frac{1}{J} \left( \frac{J}{W} \right) \exp(-J^2/aW^2) \sum_{n_0} \chi_{n+n_0} \chi_{n'+n_0}, \quad (77)$$

что дает для плотности состояний результат (21б) с показателем  $b=1/2$ .

Энергетическая зависимость параметра  $a$  получается путем итерации уравнения (68) по  $E/J$  в области инстантонного «кора»:

$$a^{-1}(E) = \frac{1}{2} \sum_n \chi_n^4 + \frac{2E}{J} \sum_n \chi_n^3 \zeta_n, \quad \zeta_n = J \bar{M}_L^{-1} \chi_n, \quad (79)$$

что определяет  $a'(0)$  в формуле (22).

Автор признателен А. Ф. Андрееву за обсуждение результатов работы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ I

### Оценка длины навешиваемого пунктира

Назовем длиной пунктира число узлов, которые он охватывает.

1. Докажем, что в диаграмме  $2n$ -го порядка минимальный пунктир имеет длину  $\sim 1$  при сколь угодно большом  $n$ .

Найдем вероятность того, что в диаграмме отсутствуют пунктиры длиной меньше  $x$ . Будем строить диаграмму, последовательно соединяя пунктирами произвольно выбранную пару узлов. Вероятность того, что первый пунктир не окончится на расстоянии  $x$  от его начала, в пренебрежении краевыми эффектами равна

$$1 - \frac{2x}{2n-1}.$$

Такая же вероятность сохраняется для остальных пунктиров, так как узлы, занятые на предыдущих этапах, расположены случайным образом. Вероятность того, что ни один из пунктиров не имеет длины меньше  $x$ , равна

$$p(x) = \left( 1 - \frac{2x}{2n-1} \right)^n \approx e^{-x},$$

откуда ясно, что с подавляющей вероятностью пунктир длиной  $\sim 1$  существует.

2. В неприводимой диаграмме  $(2n+2)$ -го порядка найдем пунктир минимальной длины, которая в силу п. 1 оказывается  $\sim 1$ . Покажем,

что устранение этого пунктира с подавляющей при больших  $n$  вероятностью оставляет диаграмму неприводимой.

Пусть устранение пунктира делает диаграмму приводимой, т. е. она распадается на два не связанных пунктирами блока из  $2n'$  и  $2n''$  вершин, так что

$$n' + n'' = n$$

(один из блоков может быть собственно энергетической вставкой внутри второго). Вероятность распада на два блока с фиксированными границами в силу (54) есть

$$\frac{N_{2n'} N_{2n''}}{N_{2n}} = \frac{2^{n'} \gamma(n' + \beta) 2^{n''} \gamma(n'' + \beta)}{2^{n'+n''} \gamma(n' + n'' + \beta)}$$

и имеет порядок  $1/n^{n''}$  для малых  $n''$ . Наиболее вероятно отделение минимального блока из двух узлов, происходящее с вероятностью  $\sim 1/n$ . С учетом того что такой блок может иметь  $\sim n$  возможных положений, вероятность отделения становится  $\sim 1$ , обеспечивая существенное отличие числа неприводимых диаграмм от их полного числа. Вероятность же распада на блоки с границей в месте нахождения устраиваемого пунктира имеет порядок  $1/n$  и исчезающе мала при  $n \rightarrow \infty$ .

Из п. 1 и 2 ясно, что диаграмма  $(2n+2)$ -го порядка может быть получена из некоторой диаграммы  $2n$ -го порядка путем навешивания примесного пунктира длиной  $\sim 1$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Оценка числа диаграмм для собственной энергии

Верхняя оценка  $N_{2n}$  дается полным числом диаграмм  $2n$ -го порядка для  $G$ -функции, которое равно  $(2n-1)!!$ . Первая вершина соединяется пунктиром с любой из  $(2n-1)$  оставшихся, затем первая свободная вершина соединяется с одной из  $(2n-3)$  оставшихся и т. д.

Нижняя оценка получается из следующего построения: первая вершина соединяется с любой, кроме второй и последней ( $(2n-3)$  варианта), затем первая свободная вершина соединяется с любой из свободных, кроме второй и последней ( $(2n-5)$  вариантов) и т. п., а две последние вершины соединяются между собой. Докажем, что все полученные  $(2n-3)!!$  диаграмм являются диаграммами для собственной энергии.

(а). Все построенные диаграммы компактны, т. е. не могут быть рассечены вертикальной линией без пересечения примесных пунктиров. Пусть при указанном построении очередной пунктир оканчивается на  $k$ -й вершине; между первой и  $k$ -й вершинами имеются свободные, так как по построению каждый пунктир оставляет под собой хотя бы одну свободную вершину. По той же причине эти свободные вершины не могут замкнуться между собой: из последней из них обязательно выйдет пунктир, проходящий над  $k$ -й вершиной; следовательно, компактность диаграммы не может нарушиться на  $k$ -й вершине. Повторяя эти рассуждения для следующего пунктира и т. д., получим, что компактность не может нарушиться вообще.

(б). Построенные диаграммы не содержат собственно-энергетических вставок. Первый пунктир не оканчивается на последней вершине, и оставшаяся часть диаграммы не является его собственно энергетической вставкой. Пусть непосредственно под ним имеется вставка, содержащая часть оставшихся узлов. Тогда устранение пунктира делает диаграмму некомпактной, но это невозможно в силу (а), так как  $(2n-2)$  вершин,



оставшихся после удаления первого пунктира, заполнялись по такому же алгоритму, как исходные  $2l$  вершин. Аналогично доказывается отсутствие собственно энергетических вставок под вторым пунктиром и т. д.

#### Список литературы

1. Anderson P. W. // Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 1492.
2. Morr H., Дэвис Э. Электронные процессы в некристаллических веществах. М.: Мир, 1974. Гл. 1.
3. Thouless D. J. // Phys. Rept. 1974. V. 13. P. 92.
4. Эфрос А. Л. // УФН. 1978. Т. 126. С. 41; Садовский М. В. // УФН. 1981. Т. 133. С. 223.
5. Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение. М.: Мир, 1975.
6. Ма Ш. Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980.
7. Лифищц И. М. // УФН. 1964. Т. 83. С. 617.
8. Лифищц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.
9. Берестецкий В. Б., Лифищц Е. М., Пугаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980. С. 112.
10. Nitzan A., Freed K. F., Cohen M. N. // Phys. Rev. B. 1977. V. 15. P. 4476.
11. Edwards S. F., Green M. B., Srinivassan G. // Phil. Mag. 1977. V. 35. P. 1421.
12. Kunz H., Souillard R. // J. de Phys. Lett. 1983. V. 44. P. L 506.
13. Thouless D. J. // J. Phys. C. 1976. V. 9. P. L603.
14. Lloid P. // J. Phys. C. 1969. V. 2. P. 1717.
15. Straley J. P. // Phys. Rev. B. 1983. V. 28. P. 5393.
16. Lukes T. // J. Phys. C. 1979. V. 12. P. L 797.
17. Harris A. B., Lubensky T. C. // Sol. St. Comm. 1980. V. 34. P. 343.
18. Harris A. B., Lubensky T. C. // Phys. Rev. B. 1981. V. 23. P. 2640.
19. Ефетов К. Б. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. С. 1032.
20. Vollhardt I. D., Wölfе P. // Phys. Rev. B. 1980. V. 22. P. 4666; Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 699.
21. Мясников А. В., Садовский М. В. // ФТТ. 1982. Т. 24. С. 3569.
22. Ефетов К. Б. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 1125.
23. Ефетов К. Б. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. В. 1. С. 357.
24. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962.
25. Edwards S. F. // Phil. Mag. 1958. V. 3. P. 1020.
26. Сулаев И. М. // ЖЭТФ. 1987. Т. 92. С. 1433.
27. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИИЛ, 1951.
28. Brezin E., Parisi G. // J. Stat. Phys. 1978. V. 19. P. 269; J. Phys. C. 1980. V. 13. P. L 307.
29. Cardy J. L. // J. Phys. C. 1978. V. 11. P. L 321.
30. Sadovskii M. V. // Sov. Sci. Rev. A. Phys. 1986. V. 7. P. 1.
31. Ishii K. // Progr. Theor. Phys. Suppl. 1973. V. 53. P. 77.

Физический институт  
им. П. Н. Лебедева  
Российской академии наук

Поступила в редакцию  
30.06.92

I. M. Suslov

#### DENSITY OF STATES OF A DISORDERED SYSTEM IN THE $D > 4$ -DIMENSIONAL SPACE

The Anderson model on  $d$ -dimensional cubic lattice with the Gaussian site energy distribution is analyzed. It is shown that for  $d > 4$  the mean density of states  $N(E)$  may be calculated for all energies. It is a smooth function and has no singularity near the Anderson transition.