

## ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ ВБЛИЗИ ПЕРЕХОДА АНДЕРСОНА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. РЕШЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ.

И. М. Сулов

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 апреля 1994 г.

В пределе слабого беспорядка получены асимптотически точные результаты для средней функции Грина и средней плотности состояний неупорядоченной системы, описываемой моделью Андерсона с гауссовским распределением энергий узлов в четырехмерном пространстве. Используемое приближение состоит в учете а) паркетных членов, содержащих максимальную степень большого логарифма и б) наиболее быстро растущих при  $N \rightarrow \infty$  ( $N$  — порядок теории возмущений) членов с низкими степенями логарифмов, которые вычисляются методом Липатова; последние приводят к непертурбативному вкладу в мнимую часть функции Грина, который обеспечивает обход «ложного» полюса.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

По аналогии с современной теорией критических явлений [1–3] естественно ожидать, что для перехода Андерсона [4–7] существует верхняя критическая размерность пространства  $d_{c2}$ , вблизи которой возможно построение  $\varepsilon$ -разложения. До недавнего времени вопрос о величине  $d_{c2}$  оставался дискуссионным: хотя многие факты указывали на выделенность размерности  $d_{c2} = 4$  [8, 9], эти факты допускали другую интерпретацию [10], что привело к выдвигению альтернативных гипотез о том, что  $d_{c2} = 6$  [11],  $d_{c2} = 8$  [12, 13] и др. В недавней работе автора [14] предложено конструктивное решение проблемы верхней критической размерности: сделано утверждение, что  $d_{c2} = 4$ , показано, каким образом условие  $d > 4$  приводит к упрощению проблемы, и вычислена плотность состояний неупорядоченной системы для  $d > 4$  во всей области энергий, включая окрестность перехода Андерсона. В настоящей работе делается следующий шаг на пути построения  $\varepsilon$ -разложения и рассматривается случай  $d = 4$ .

В дальнейшем будем иметь в виду модель Андерсона на  $d$ -мерной кубической решетке, описываемую дискретным уравнением Шредингера

$$\sum_{x'} J_{x-x'} \Psi_{x'} + V_x \Psi_x = E \Psi_x \quad (1)$$

с гауссовским распределением энергий узлов  $V_x$ :

$$P\{V\} \sim \exp\left(-\sum_x \frac{V_x^2}{2W^2}\right). \quad (2)$$

Амплитуду беспорядка  $W$  и рассматриваемые энергии  $E$  считаем малыми по сравнению с шириной зоны  $J$ ; начало отсчета энергии и интегралы перекрытия  $J_{x-x'}$  выбраны так,

что спектр идеальной решетки

$$\varepsilon(k) = \sum_x J_x e^{-ikx} \quad (3)$$

имеет вид  $k^2/2m$  при малых  $k$ . В континуальном пределе, когда постоянная решетки  $a_0 \rightarrow 0$  при условии  $2m = \text{const}$ ,  $a_0^d W^2 = \text{const}$ , задача о вычислении усредненной функции Грина уравнения (1) математически эквивалентна задаче о фазовом переходе второго рода в системе с  $n$ -компонентным параметром порядка  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  в пределе  $n \rightarrow 0$ : в этом можно убедиться путем сравнения диаграммных разложений [2, стр. 225] или путем перехода к функциональному интегралу с помощью метода реплик [15]. При этом коэффициенты в гамильтониане Гинзбурга – Ландау

$$H\{\varphi\} = \int d^d x \left( \frac{1}{2} c |\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2} \kappa_0^2 |\varphi|^2 + \frac{1}{4} g |\varphi|^4 \right) \quad (4)$$

связаны с параметрами неупорядоченной системы соотношениями

$$c = 1/2m, \quad \kappa_0^2 = -E, \quad g = -a_0^d W^2/2. \quad (5)$$

Как обычно, коэффициент при  $|\nabla\varphi|^2$  положителен, коэффициент при  $|\varphi|^2$  меняет знак в окрестности фазового перехода (при слабом беспорядке переход Андерсона лежит при малых  $E$ ), однако коэффициент при  $|\varphi|^4$  имеет «неправильный» знак; последнее обстоятельство мешает непосредственному перенесению результатов из теории фазовых переходов в физику неупорядоченных систем. В квантовой теории поля модели (4) соответствует известная модель  $\varphi^4$ , описывающая релятивистский бозе-газ с точечным взаимодействием [16, 17]; при этом отрицательные значения константы взаимодействия  $g$  (притяжение) соответствуют неустойчивой теории поля<sup>1)</sup>.

Размерность пространства  $d = 4$  является выделенной для гамильтониана (4): при  $d = 4$  имеется доминирующая последовательность диаграмм, содержащих максимальную степень большого логарифма — так называемый паркет [18–20]; суммирование паркета приводит к следующей связи перенормированной константы  $g_R$ , описывающей взаимодействие на больших расстояниях, с ее затравочным значением  $g$  [19, 3, 21]:

$$g_R = \frac{g}{1 + K_4(n+8)g \ln(\Lambda/\kappa)}, \quad (6)$$

где  $K_4 = (8\pi^2)^{-1}$  — площадь единичной сферы в четырехмерном пространстве, деленная на  $(2\pi)^4$ ,  $\Lambda$  — параметр обрезания на больших импульсах,  $\kappa$  — перенормированное значение величины  $\kappa_0$ , обращающееся в нуль в точке перехода. При  $g > 0$  выражение (6) описывает типичную «нуль-зарядную» ситуацию [22, 23, 16]: при  $\kappa \rightarrow 0$ , т. е.

<sup>1)</sup>При использовании диаграммной техники отрицательность  $g$  не существенна, так как разложение проводится по целым степеням  $g$ . Функциональные интегралы с  $g < 0$  понимаются в смысле аналитического продолжения с положительных  $g$ . Фактически, как объяснялось в [15], при применении метода реплик можно избежать появления расходящихся функциональных интегралов за счет использования произвола в выборе поля  $\varphi$  (при этом коэффициенты в гамильтониане (4) становятся комплексными); однако использование этой процедуры не устраняет описанных ниже трудностей, связанных с появлением ложного полюса.

при приближении к точке фазового перехода, эффективное взаимодействие стремится к нулю. При переходе от  $d = 4$  к  $d = 4 - \varepsilon$  константа  $g_R$  при  $\kappa \rightarrow 0$  приобретает конечное, но малое по величине значение; фактически на этом обстоятельстве основан успех  $\varepsilon$ -разложения Вильсона [1, 2].

Использование паркетного приближения в теории неупорядоченных систем приводит к выражению типа (6) с  $g < 0$  [24, 25]; при малых  $\kappa$  (т. е. малых значениях перенормированной энергии  $E$ ) в выражении (6) возникает «ложный» полюс, не устранимый в рамках паркетного приближения. Формальное использование паркетных результатов типа (6) приводит к расходимостям в физических величинах. Таким образом, возникает парадоксальная ситуация: использование одного и того же приближения в двух математически эквивалентных проблемах приводит в одном случае (теория фазовых переходов), по- существу, к полному решению задачи, в другом случае (теория неупорядоченных систем) — к явно нефизическим результатам. По мнению автора работ [24, 25], проблема ложного полюса является основной проблемой, препятствующей построению последовательной теории перехода Андерсона. В настоящей работе мы представим решение этой проблемы для определенного класса решеточных моделей.

Фактически источником возникающих трудностей является не столько «неправильный» знак константы взаимодействия  $g$ , сколько неустраняемая комплексность эффективного гамильтониана (4). Уже для конкретизации выбора функции Грина (запаздывающая или опережающая) к энергии  $E$  нужно делать бесконечно малую мнимую добавку  $+i\delta$  или  $-i\delta$ , выбор знака которой следует учитывать при аналитическом продолжении по константе связи или ином способе устранения расходимости функциональных интегралов (см. сноску <sup>1</sup>). Неустойчивость при  $g < 0$  теории поля приводит к тому, что бесконечно малая затравка  $\pm i\delta$  приводит к появлению, вообще говоря, у всех вычисляемых величин конечной мнимой части. Проблема вычисления последней не возникала в теории фазовых переходов, но именно здесь паркетное приближение становится совершенно неудовлетворительным. Основной эффект состоит в появлении мнимой части у «температуры» перехода: после учета этого обстоятельства восстанавливается математическая эквивалентность двух проблем — физические величины неупорядоченной системы, определяемые средней функцией Грина, описываются формулами теории фазовых переходов с комплексной  $T_c$ ; последнее обстоятельство обеспечивает обход ложного полюса.

Анализ случая  $d > 4$  [14] показал, что решение описанных трудностей лежит на пути корректного учета факториальной расходимости ряда теории возмущений [26], определяющей, в частности, появление флуктуационного хвоста плотности состояний [27, 28]. Для исследования высших порядков теории возмущений в предыдущей работе [14] использовалась следующая схема: а) исходя из диаграммной техники путем статистического анализа устанавливалась функциональная форма коэффициентов разложения собственной энергии  $\Sigma$ , содержащая небольшое число феноменологических параметров; б) вычислялся непертурбативный вклад в затухание  $\Gamma$ , что позволяло вычислить плотность состояний  $\nu(E)$  при всех энергиях; в) путем сопоставления асимптотики  $\nu(E)$  при  $E \rightarrow -\infty$  с результатами инстантонного метода [24, 25, 28, 29] определялись введенные выше феноменологические параметры.

В настоящей работе избран более прямой путь реализации той же идеи: а) инстантонным методом Липатова [26] вычисляется асимптотика коэффициентов разложения функции Грина; б) по ней находится асимптотика коэффициентов разложения собственной энергии; в) путем сопоставления инстантонных результатов, справедливых

при  $E < 0$ , со структурой ряда теории возмущений, следующей из диаграммной техники, устанавливается вид собственной энергии  $\Sigma(p, E)$  при произвольных  $p$  и  $E$ ;  $\gamma$  вычисляется  $\nu(E)$ . При таком подходе отпадает необходимость в статистическом анализе диаграмм, содержащем нестрогие моменты [14]; однако существенным образом используется продемонстрированная в [14] принципиальная возможность получения инстантонных результатов из диаграммной техники.

В дальнейшем единицы измерения считаем выбранными так, что  $a_0 = 1$ ,  $2m = 1$ , пользуясь обычными единицами лишь в оценках.

## 2. СТРУКТУРА РЯДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ $d=4$

Для удобства использования имеющихся в литературе результатов будем вести изложение в терминах теории фазовых переходов, переходя к обозначениям для неупорядоченных систем на более позднем этапе.

Определим  $M$ -точечную функцию Грина как

$$G_M(\alpha_1, x_1, \dots, \alpha_M, x_M) = Z_0^{-1} Z_M(\alpha_1, x_1, \dots, \alpha_M, x_M), \quad (7)$$

где величина  $Z_M$  дается функциональным интегралом

$$Z_M(\alpha_1, x_1, \dots, \alpha_M, x_M) = \int D\varphi \varphi_{\alpha_1}(x_1) \dots \varphi_{\alpha_M}(x_M) e^{-H\{\varphi\}}, \quad (8)$$

а гамильтониан  $H\{\varphi\}$  в континуальном приближении определяется выражением (4). Разложение (7) по степеням  $g$  приводит к стандартной диаграммной технике [2]. Вычисление двухточечной функции Грина  $G(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) = \delta_{\alpha_1 \alpha_2} G(x_1 - x_2)$  обычным образом сводится к вычислению собственной энергии  $\Sigma$ :

$$G^{-1}(k) = \varepsilon(k) + \kappa_0^2 - \tilde{\Sigma}(k, \kappa_0^2) = \varepsilon(k) + \kappa^2 - \Sigma(k, \kappa^2) + \Sigma(0, \kappa^2), \quad (9)$$

где  $G(k)$  есть фурье-образ  $G(x_1 - x_2)$ , а величина  $\kappa^2$  есть

$$\kappa^2 = \kappa_0^2 - \tilde{\Sigma}(0, \kappa_0^2) = \kappa_0^2 - \Sigma(0, \kappa^2). \quad (10)$$

Точка перехода определяется условием  $G^{-1}(0) = 0$  или  $\kappa_0 = \kappa_c$ , где

$$\kappa_c^2 = \Sigma(0, 0). \quad (11)$$

Подсчет степеней импульсов в диаграмме  $N$ -го порядка для  $\Sigma$  дает величину  $r = 2 + (d - 4)N$ , и при  $d = 4$  все диаграммы расходятся на верхнем пределе как  $\Lambda^2$ . При вычитании из каждой диаграммы ее значения при  $k = 0$ ,  $\kappa = 0$  показатель степени  $r$  понижается на 2 и расходимость становится логарифмической. Устранение квадратичных расходимостей из внутренних блоков осуществляется переходом от затравочных функций Грина  $G_B(k) = [\varepsilon(k) + \kappa_0^2]^{-1}$  к модифицированным функциям

$$G_0(k) = [\varepsilon(k) + \kappa^2]^{-1} \quad (12)$$

(при разложении по функциям  $G_0(k)$  диаграммы имеют такой же вид, как при разложении по  $G_B(k)$ , но из каждой неприводимой собственно-энергетической части вычитается ее значение при нулевом импульсе). В результате все квадратичные расходимости

поглощаются величиной  $\Sigma(0, 0)$ , а разность  $\Sigma(k, \kappa^2) - \Sigma(0, 0)$  содержит лишь логарифмические расходимости; классифицируя вклады диаграмм по степеням логарифмов, имеем для  $k = 0$ :

$$\Sigma(0, \kappa^2) = \Sigma(0, 0) + \kappa^2 \sum_{N=1}^{\infty} g^N \sum_{K=0}^N A_N^K \left( \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right)^K, \quad (13)$$

$$\Sigma(0, 0) = \Lambda^2 \sum_{N=1}^{\infty} B_N g^N. \quad (14)$$

Максимальная степень логарифма определяется паркетными графиками и равна порядку диаграммы; в (13) отброшены члены типа  $\kappa^4/\Lambda^2$ ,  $\kappa^6/\Lambda^4$  и т.д., исчезающие при  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Учет в (13) лишь коэффициентов  $A_N^N$  соответствует паркетному приближению; соответствующий результат нетрудно вывести из работы Гинзбурга [21]. Из тождества Уорда имеем

$$\frac{\partial G^{-1}(0, \kappa^2)}{\partial \kappa_0^2} = \frac{\partial \kappa^2}{\partial \kappa_0^2} = \left[ 1 + K_4(n+8)g \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right]^{-(n+2)/(n+8)} \quad (15)$$

(см. формулы (32), (30), (17) работы [21] при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ); интегрируя (15) в главном логарифмическом приближении и учитывая (10), получим

$$\Sigma(0, \kappa^2) = \Sigma(0, 0) + \kappa^2 \left\{ \left[ 1 + K_4(n+8)g \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right]^{(n+2)/(n+8)} - 1 \right\}. \quad (16)$$

Раскладывая в ряд по  $g$  и сопоставляя с (13), имеем

$$A_N^N = [-K_4(n+8)]^N \frac{\Gamma(N-\beta)}{\Gamma(N+1)\Gamma(-\beta)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(-\beta)} [-K_4(n+8)]^N N^{-\beta-1}, \quad (17)$$

где  $\beta = (n+2)/(n+8)$ ,  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

Проведенный в [14] анализ случая  $d > 4$  показал качественную важность учета факториальной расходимости ряда теории возмущений. Эта расходимость прямо связана с существованием флуктуационного хвоста плотности состояний. Действительно, при гауссовском распределении энергий узлов (2) с конечной вероятностью существуют сколь угодно глубокие флуктуации потенциала и, следовательно, сколь угодно глубокие уровни энергии при сколь угодно малом  $W^2$ , т.е. плотность состояний  $\nu(E)$  отлична от нуля при всех  $E$  и  $W^2$ ; отсюда

$$G(E+i\delta) - G(E-i\delta) = \text{const} \cdot \nu(E) \neq 0 \quad \text{для всех } E, g < 0, \quad (18)$$

т.е. точная функция Грина  $G(E)$  имеет разрез при отрицательных  $E$ , которого не имела невозмущенная функция Грина  $G_0(E)$ . По известной теореме анализа сумма ряда, составленного из непрерывных функций, непрерывна при условии его равномерной сходимости; равномерная сходимость имеет место, если функциональный ряд мажорируется сходящимся числовым рядом [30]. Если коэффициенты разложения  $G(E)$  по степеням  $g$  растут медленнее  $a^N$  с некоторым конечным  $a$ , то при малых  $|g|$  ряд мажорируется сходящейся геометрической прогрессией и сходится равномерно; тогда из

непрерывности членов ряда, вытекающей из непрерывности  $G_0(E)$ , следует невозможность (18). Поэтому коэффициенты разложения растут быстрее  $a^N$  со сколь угодно большим  $a$ : факториальная зависимость — одна из простейших, обладающих таким свойством.

Из (17) ясно, что коэффициенты паркетного разложения не имеют факториального роста, что вскрывает причину неудовлетворительности паркетного приближения; члены с низкими степенями логарифмов имеют более высокую скорость роста и при больших  $N$  становятся доминирующими.

В принципе можно сделать второе, третье и т.д. логарифмические приближения, учитывая в (13) коэффициенты  $A_N^{N-1}$ ,  $A_N^{N-2}$  и т.д. Эти коэффициенты неявно определяются при вычислении высших членов  $\varepsilon$ -разложения методом Вильсона, основанном на существовании при  $d = 4 - \varepsilon$ ,  $g > 0$  точной ренормгруппы [2, гл. 9]; при конечном  $K$  и  $N \rightarrow \infty$

$$A_N^{N-K} = \text{const} \cdot [-K_4(n+8)]^N N^{-\beta-1} (N \ln N)^K. \quad (19)$$

Мы видим, что факториальный рост не возникает ни в каком конечном логарифмическом приближении; он угадывается при  $K \sim N$ , когда формула (19) уже неприемлема.

Информация о наиболее быстро растущих коэффициентах может быть получена методом Липатова (см. разд.4). Эти коэффициенты соответствуют членам с низкими степенями логарифмов и зависят от характера обрезания на больших импульсах (например, изменение  $\Lambda$  в 2 раза изменяет все  $A_N^K$  с  $K \neq N$ ), а следовательно, от выбора модели; чтобы сориентироваться в этом вопросе, произведем несколько простых оценок.

### 3. ОЦЕНКИ МЕТОДОМ ОПТИМАЛЬНОЙ ФЛУКТУАЦИИ И КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

Из разд. 2 и работы [14] ясно, что ситуация в высших порядках теории возмущений связана с поведением флуктуационного хвоста плотности состояний, который в теоретико-полевой формулировке определяется классическими решениями — инстантонами [24, 25, 28, 29]. Качественное представление о свойствах инстантонов можно получить методом оптимальной флуктуации Лифшица [31, 32].

В силу (2) вероятность флуктуационного возникновения потенциальной ямы глубиной  $V$  и радиусом  $R$  имеет порядок <sup>2)</sup>

$$P(V, R) \sim \exp\left(-\frac{V^2 R^d}{W^2 a_0^d}\right). \quad (20)$$

При наличии в яме уровня  $E = -|E|$  параметры  $V$  и  $R$  связаны соотношением

$$E = -V + \frac{1}{mR^2} \simeq -V + J \left(\frac{a_0}{R}\right)^2, \quad (21)$$

<sup>2)</sup> В следующих ниже оценках всюду опускаем константы  $\sim 1$ .

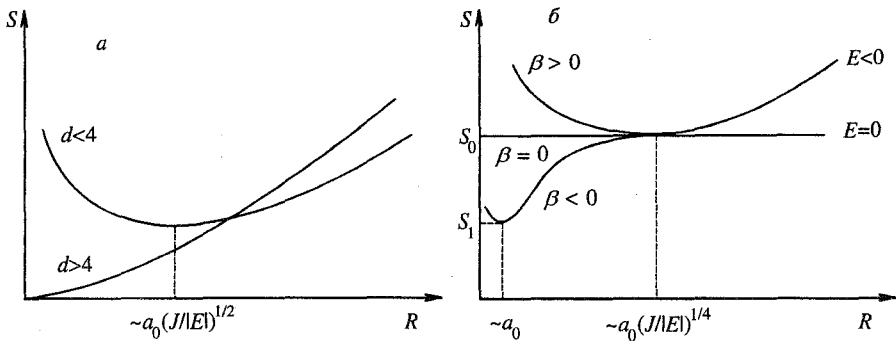


Рис. 1. Зависимость  $S(E, R)$  от  $R$  при  $E = \text{const}$ : а —  $d \neq 4$ ; б —  $d = 4$

что позволяет исключить  $V$  из (20):

$$P(E, R) \propto \exp \left\{ - \left( \frac{R}{a_0} \right)^d \left[ \frac{|E| + J(a_0/R)^2}{W} \right]^2 \right\} \equiv \exp \{-S(E, R)\}. \quad (22)$$

Вероятность образования уровня  $P(E)$ , определяющая плотность состояний  $\nu(E)$ , получается интегрированием (22) по  $R$ ; в перевальном приближении вклад в интеграл определяется точкой  $R = R_c$ , в которой величина  $S(E, R)$  минимальна. Величина  $R_c$  соответствует радиусу инстантона в теоретико-полевой формулировке: из рис. 1, а ясно, что при  $d < 4$  радиус инстантона  $R_c \propto |E|^{-1/2}$  и расходится при  $|E| \rightarrow 0$ , тогда как при  $d > 4$  он соответствует минимально возможным  $R$ , т. е.  $R_c \sim a_0$ .

При  $d = 4$  (рис. 1, б) величина  $S(E, R) = \text{const} = S_0$  при  $E = 0$  и ситуация близка к вырождению. При больших  $R$  вырождение снимается за счет конечности  $E$ ,  $S(E, R) \propto E^2 R^4$ ; при малых  $R$  становится существенным поведение спектра  $\varepsilon(k)$  при больших  $k$ : если в разложении  $\varepsilon(k)$  по  $k$  наряду с членами  $\sim k^2$  учесть члены  $\sim k^4$ , то вместо (21) получим

$$E = -V + J \left( \frac{a_0}{R} \right)^2 + \beta J \left( \frac{a_0}{R} \right)^4. \quad (23)$$

При  $\beta > 0$  (отталкивающий кор) величина  $S(E, R)$  отклоняется от значения  $S_0$  вверх, обеспечивая появление минимума при  $R \sim a_0 (J/|E|)^{1/4}$ , тогда как при  $\beta < 0$  (притягивающий кор)  $S(E, R)$  отклоняется от  $S_0$  вниз и минимум достигается при  $R \sim a_0$ , где становятся существенными дальнейшие члены разложения  $\varepsilon(k)$  по  $k$  (рис. 1, б). Мы видим, что переход от высших размерностей пространства к низшим «продолжается» при  $d = 4$  по параметрам модели: при  $\beta < 0$  инстантон локализован на атомном масштабе, аналогично случаю  $d > 4$ , при  $\beta > 0$  радиус инстантона расходится при  $E \rightarrow 0$ , что характерно для низших размерностей. Соответственно, различной оказывается асимптотика плотности состояний при больших отрицательных  $E$ :

$$\nu(E) \sim \begin{cases} \exp \left[ - \frac{J^2}{W^2} \left( 1 + \frac{|E|}{J} \right) \right], & \beta < 0 \\ \exp \left[ - \frac{J^2}{W^2} \left( 1 + \frac{|E|^{1/2}}{J^{1/2}} \right) \right], & \beta > 0 \end{cases} \quad (24)$$

Резкое различие между притягивающим и отталкивающим корами стирается в области малых  $E$ , где лежит переход Андерсона. Дело в том, что при  $\beta < 0$  имеет место конкуренция вкладов инстантонного минимума с  $S = S_1$  и более высоколежащего плато с  $S = S_0$ , ширина которого неограниченно увеличивается при  $E \rightarrow 0$ . Интегрирование  $P(E, R)$  по  $R$  с учетом обоих вкладов дает результат типа

$$\nu(E) \sim \exp(-S_1) + \left(\frac{J}{|E|}\right)^{1/2} \exp(-S_0), \quad (25)$$

и при сближении  $S_1$  и  $S_0$  неизбежно возникает доминирование второго члена (вклада плато), так что переход к случаю  $\beta > 0$ , сопровождающийся исчезновением первого члена в (25), не имеет существенных последствий.

Поскольку энергия  $E$  всегда входит в комбинации  $E + i\Gamma$ <sup>3)</sup> с затуханием  $\Gamma$ , то в окрестности перехода Андерсона в (25) следует положить  $E \sim \Gamma$ ; тогда можно выделить два предельных случая.

1) Сильно притягивающий кор. Если  $S_1$  достаточно мало по сравнению с  $S_0$ , то в (25) доминирует первый член; при этом  $\Gamma$  определяется соответствующей экспонентой  $\exp\{-S_1\}$ , что обеспечивает малость второго члена. Вклад в  $\nu(E)$  определяется инстантонами, локализованными на атомном масштабе, и дискретность решетки имеет принципиальное значение.

2) Слабо притягивающий ( $S_1$  близко к  $S_0$ ), отталкивающий или нейтральный ( $\beta = 0$ ) кор. Плотность состояний определяется вторым членом в (25) — вкладом плато; поскольку существенны инстантоны большого радиуса, то атомная структура решетки не имеет значения и рассмотрение можно вести в континуальной модели ( $a_0 \rightarrow 0$ ).

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случая 1, в котором в силу дискретности модели, не возникает ультрафиолетовых расходимостей. Случай 2 более сложен: здесь при переходе к континуальному пределу требуется (как в квантовой электродинамике) перенормировка трех величин — «заряда», «массы» и функции Грина, которая должна быть согласованно проведена в высших порядках теории возмущений.

Чтобы убедиться в существовании моделей с малыми  $S_1$ , проведем вариационную оценку инстантонного минимума, рассматривая заведомо неоптимальную флуктуацию, локализованную на одном узле. Полагая в (2)  $V_x = V\delta_{x0}$  и исключая  $V$  с помощью уравнения

$$1 + VG_{00}(E) = 0, \quad (26)$$

определяющего уровень в таком потенциале [31] ( $G_{xx}(E)$  — функция Грина идеальной решетки), получим при  $E \rightarrow 0$

$$S_1 < [2W^2 G_{00}^2(0)]^{-1} = \frac{1}{2W^2} \left[ a_0^d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\varepsilon(k)} \right]^{-2} < \frac{J^2}{2W^2},$$

если спектр  $\varepsilon(k)$  лежит в интервале от 0 до  $J$ . Значение  $S_0$  для плато определяется эффективной массой  $m$  для малых  $k$ , которая не связана с шириной зоны  $J$  жестким соотношением. Уменьшая  $J$  при  $m = \text{const}$ , можно сделать отношение  $S_1/S_0$  сколь угодно малым.

<sup>3)</sup>В дальнейшем всюду, где это существенно, имеется ввиду запаздывающая функция Грина.



4. АСИМПТОТИКА КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ  $N$ 

## 4.1. Применение метода Липатова

Метод Липатова [26] основан на том, что коэффициенты разложения функции  $F(g)$ ,

$$F(g) = \sum_{N=0}^{\infty} F_N g^N, \quad (27)$$

могут определяться по формуле

$$F_N = \int_C \frac{dg}{2\pi i} g^{-N-1} F(g), \quad (28)$$

где контур  $C$  охватывает точку  $g = 0$  в комплексной плоскости, причем при больших  $N$  интеграл в (28) может вычисляться методом перевала. Беря в качестве  $F(g)$  величину  $Z_M$  из (8), имеем

$$[Z_M]_{N-1} = \int \frac{dg}{2\pi i} \int D\varphi \varphi_{\alpha_1}(x_1) \dots \varphi_{\alpha_M}(x_M) \exp(-H\{\varphi\} - N \ln g), \quad (29)$$

где гамильтониан  $H\{\varphi\}$  берется для решеточной модели:

$$H\{\varphi\} = \sum_x \left[ \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x) \varepsilon(\hat{p}) \varphi_{\alpha}(x) + \frac{1}{2} \kappa^2 \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x)^2 + \frac{1}{4} g \left( \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x)^2 \right)^2 \right]. \quad (30)$$

Действие оператора  $\varepsilon(\hat{p})$ , где  $\hat{p} = -i\nabla$ , определяется использованием фурье-разложения (3) и учетом того, что  $\exp(i\hat{p}\mathbf{a})$  есть оператор сдвига на вектор  $\mathbf{a}$ . Идея метода Липатова состоит в использовании в (29) метода перевала одновременно по  $g$  и  $\varphi$ , причем условия применимости перевального приближения выполнены при больших  $N$  и  $\kappa^2 > 0$  независимо от его применимости к исходному интегралу (8). Перевальная точка определяется условиями:

$$\left( \frac{\partial/\partial g}{\delta/\delta\varphi} \right) \left\{ -N \ln g - \sum_x \left[ \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} \varepsilon(\hat{p}) \varphi_{\alpha} + \frac{1}{2} \kappa^2 \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}^2 + \frac{1}{4} g \left( \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}^2 \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (31)$$

Если искать классическое решение (инстантон) в виде

$$\varphi_{\alpha}^c(x) = \varphi_c(x) u_{\alpha}, \quad (32)$$

где  $u_{\alpha}$  — компоненты единичного вектора  $\mathbf{u}$ , то (31) дает

$$N g_c^{-1} = -\frac{1}{4} \sum_x \varphi_c(x)^4, \quad (33)$$

$$\varepsilon(\hat{p}) \varphi_c(x) + \kappa^2 \varphi_c(x) + g_c \varphi_c(x)^3 = 0, \quad (34)$$

откуда ясно, что  $g_c < 0$ , а  $\varphi_c(x)$  ищется в классе функций, убывающих на бесконечности, для обеспечения сходимости суммы в (33). Ввиду принятого предположения о

сильно притягивающем коре, инстантон считаем локализованным на атомном масштабе. Рассматривая малые отклонения от перевальной точки:

$$g = g_c + \delta g, \quad \varphi_\alpha(x) = \varphi_c(x)u_\alpha + \delta\varphi_\alpha(x), \quad (35)$$

и разделяя  $\delta\varphi_\alpha(x)$  на продольную и поперечную части:

$$\delta\varphi_\alpha(x) = \delta\varphi_L(x)u_\alpha + \delta\varphi_\alpha^T(x), \quad \delta\varphi^T \perp \mathbf{u}, \quad (36)$$

для выражения в экспоненте (29) получим

$$\begin{aligned} -N \ln g - H\{\varphi\} &= -N \ln g_c - H\{g_c, \varphi_c\} + \frac{1}{2} N \left( \frac{\delta g}{g_c} \right)^2 - \\ -\delta g \sum_x \varphi_c(x)^3 \delta\varphi_L(x) &- \frac{1}{2} \sum_x \delta\varphi_L(x) \hat{M}_L \delta\varphi_L(x) - \frac{1}{2} \sum_x \sum_\alpha \delta\varphi_\alpha^T(x) \hat{M}_T \delta\varphi_\alpha^T(x), \end{aligned} \quad (37)$$

где введены операторы

$$\hat{M}_L = \varepsilon(\hat{p}) + \kappa^2 + 3g_c \varphi_c(x)^2, \quad \hat{M}_T = \varepsilon(\hat{p}) + \kappa^2 + g_c \varphi_c(x)^2. \quad (38)$$

Вводя собственные значения и нормированные собственные функции

$$\hat{M}_L e_s^L(x) = \lambda_s^L e_s^L(x), \quad \hat{M}_T e_s^T(x) = \lambda_s^T e_s^T(x) \quad (39)$$

и раскладывая по ним  $\delta\varphi_L$  и  $\delta\varphi_\alpha^T$

$$\delta\varphi_L(x) = \sum_s C_s^L e_s^L(x), \quad \delta\varphi_\alpha^T(x) = \sum_s C_s^{T,\alpha} e_s^T(x), \quad (40)$$

получим (37) в виде

$$\begin{aligned} -N \ln g - H\{\varphi\} &= -N \ln g_c - H\{g_c, \varphi_c\} + \frac{1}{2} N \left( \frac{\delta g}{g_c} \right)^2 - \\ -\frac{\delta g}{g_c} \sum_s C_s^L \omega_s &- \frac{1}{2} \sum_g \lambda_s^L (C_s^L)^2 - \frac{1}{2} \sum_s \sum_\alpha \lambda_s^T (C_s^{T,\alpha})^2, \end{aligned} \quad (41)$$

где введено обозначение

$$\omega_s = g_c \sum_x \varphi_c(x)^3 e_s^L(x). \quad (42)$$

От интегрирования по  $\varphi(x)$  можно перейти к интегрированию по  $C_s^L, C_s^{T,\alpha}$  причем детерминант преобразования равен единице в силу ортонормированности  $e_s^L, e_s^T$ :

$$\int D\varphi = \int DC^L \int DC^T. \quad (43)$$

### 4.2. Выделение нулевых мод

В континуальной модели оператор  $\hat{M}_L$  имеет нулевые моды, связанные с возможностью непрерывных трансляций инстантонного решения [25]. В дискретной модели эти моды становятся щелевыми и не требуют специального выделения, однако удобно провести процедуру, аналогичную используемой при таком выделении, для получения результата в трансляционно-инвариантном виде. Введем под интеграл (29) разложение единицы  $\sum_y \delta_{y-y_0}$ , отождествим  $y_0$  с узлом, вблизи которого локализован инстантон и проведем преобразование

$$x - y_0 + y \rightarrow x, \quad \varphi(x + y_0 - y) \rightarrow \varphi(x), \tag{44}$$

перемещающее инстантон к узлу  $y$  (после чего  $\delta_{y-y_0} = 1$ ); ввиду инвариантности  $D\varphi$  и  $H\{\varphi\}$  относительно преобразования (44), интеграл (29) приводится к виду

$$[Z_M]_{N-1} = \int \frac{dg}{2\pi i} \int D\varphi \sum_y \varphi_{\alpha_1}(x_1 - y) \dots \varphi_{\alpha_M}(x_M - y) \exp(-H\{\varphi\} - N \ln g). \tag{45}$$

Для выделения нулевой моды оператора  $\hat{M}_T$  [25],

$$\lambda_0^T = 0, \quad e_0^T = \left( \sum_x \varphi_c(x)^2 \right)^{-1/2} \varphi_c(x), \tag{46}$$

связанной с возможностью вращения вектора  $\mathbf{u}$  в (32), введем под интеграл (47) разложение единицы:

$$1 = \int d^n u' \prod_{\alpha=1}^n \delta(u'_\alpha - v_\alpha) = \int d^n u \delta(|\mathbf{u}| - 1) \left( \sum_x \varphi_c(x)^2 \right)^{(n-1)/2} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \delta(C_0^{T,\alpha}), \tag{47}$$

где единичный вектор  $\mathbf{v}$  выбран так, что

$$\mathbf{v} \parallel \sum_x |\varphi(x)| \varphi(x). \tag{48}$$

Для получения второй части равенства (47) нужно отождествить вектор  $\mathbf{u}'$  с вектором  $\mathbf{u}$  в (32) (что возможно ввиду произвольности последнего), выразить  $\mathbf{v}$  через  $\varphi_c(x)$  и  $\delta\varphi(x)$ , использовать (40) и ортогональность  $e_s^T(x)$  с  $s \neq 0$  и  $e_0^T(x)$ . Подставляя (47) под интеграл в (45), беря  $\varphi_\alpha(x)$  в предэкспоненте в нулевом приближении (32), используя (41, 43) и снимая  $\delta$ -функции в (47) интегрированием по  $C_0^{T,\alpha}$ , получим

$$\begin{aligned} [Z_M]_{N-1} = & \sum_y \varphi_c(x_1 - y) \dots \varphi_c(x_M - y) \int d^n u \delta(|\mathbf{u}| - 1) u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_M} \times \\ & \times \left( \sum_x \varphi_c(x)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \exp(-H\{g_c, \varphi_c\} - N \ln g_c) \frac{g_c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int DC^L \int D'C^T \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ Nt^2 - 2it \sum_s C_s^L \omega_s + \sum_s \lambda_s^L (C_s^L)^2 + \sum_s' \sum_\alpha \lambda_s^T (C_s^{T,\alpha})^2 \right] \right\}, \tag{49} \end{aligned}$$

где проведена замена  $\delta g = i|g_c|t$ , так как контур  $C$  проходит через точку  $g_c$  в вертикальном направлении; штрихом отмечаем исключение из сумм и произведений вклада нулевой моды (46).

### 4.3. Вычисление функционального интеграла

Квадратичная форма в экспоненте (49) неэрмитова, и для нее несправедлив закон инерции [33]; для приведения ее к диагональному виду с положительными коэффициентами, обеспечивающему сходимость интеграла (49), преобразование переменных следует подбирать специальным образом: ввиду отрицательности низшего собственного значения  $\lambda_0^L$  оператора  $\hat{M}_L$  [25] такое преобразование можно взять в виде <sup>4)</sup>

$$\tilde{t} = t - iC_0^L \omega_0 \left[ N + \sum_{s \neq 0} \frac{\omega_s^2}{\lambda_s^L} \right]^{-1}, \quad \tilde{C}_s^L = C_s^L - it \frac{\omega_s}{\lambda_s^L} \quad (s \neq 0). \quad (50)$$

При вычислении детерминанта требуется знать значение суммы

$$\sum_s \frac{\omega_s^2}{\lambda_s^L} = \frac{1}{2} g_c \sum_x \varphi_c(x)^4 = -2N, \quad (51)$$

вычисляемой с использованием полноты базиса  $e_s^L(x)$  и соотношения

$$2g_c \sum_x \varphi_c(x)^3 e_s^L(x) = \lambda_s^L \sum_x \varphi_c(x) e_s^L(x), \quad (52)$$

которое получается путем умножения (34) на  $e_s^L(x)$ , первого уравнения (39) на  $\varphi_c(x)$ , суммирования полученных равенств по  $x$  и взятия их разности. С учетом (50), (51) результат интегрирования по  $t$ ,  $C^L$ , и  $C^T$  в (49) равен

$$\left[ \frac{2\pi}{N} \left( \prod_s \frac{2\pi}{|\lambda_s^L|} \right) \left( \prod_s' \frac{2\pi}{\lambda_s^T} \right)^{n-1} \right]^{1/2}. \quad (53)$$

Для выделения зависимости от  $N$  сделаем замену

$$\varphi_c(x) = (-g_c)^{-1/2} \psi_c(x), \quad (54)$$

исключающую  $g_c$  из (34), (38), и введем обозначение

$$I_p = \sum_x \psi_c(x)^p. \quad (55)$$

Тогда

$$g_c = -\frac{I_4}{4N}, \quad H\{\varphi_c, g_c\} = -\frac{1}{4} g_c \sum_x \varphi_c(x)^4 = N \quad (56)$$

<sup>4)</sup> Положительность  $\lambda_s^L$  с  $s \neq 0$  ясна из следующего: в континуальной модели, когда радиус инстантона велик, нулевые моды операторов  $\hat{M}_T$  и  $\hat{M}_L$  связаны с тем, что в потенциале  $-|g_c| \varphi_c(x)^2$  имеется уровень  $-\kappa^2$ , соответствующий моменту  $l = 0$ , а в потенциале  $-3|g_c| \varphi_c(x)^2$  —  $d$ -кратно вырожденный уровень, соответствующий  $l = 1$  (углубление потенциала компенсируется центробежной энергией) [25]. При уменьшении радиуса инстантона состояния с  $l = 1$  стремятся вытолкнуться в непрерывный спектр, так как  $\delta$ -образный потенциал имеет лишь один уровень.

и (49) принимает вид

$$[Z_M]_N = \frac{(-1)^N}{2\pi} \Gamma\left(N + \frac{M+n-1}{2}\right) \left(\frac{4}{I_4}\right)^{N+(M+n-1)/2} \left(\prod_s \frac{2\pi}{|\lambda_s^L|}\right)^{1/2} \times \\ \times \left(\prod_s' \frac{2\pi}{\lambda_s^T}\right)^{(n-1)/2} I_2^{(n-1)/2} \sum_y \psi_c(x_1-y) \dots \psi_c(x_M-y) \int d^n u \delta(|u|-1) u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_M}. \quad (57)$$

#### 4.4. Переход к разложению для функции Грина

Из (57) ясно, что коэффициенты разложения  $Z_M$  растут при  $N \rightarrow \infty$  по факториальному закону. Для факториальных рядов имеет место простая алгебра (см. Приложение), позволяющая проводить перемножение рядов, возведение ряда в целую и дробную степень и т. п. Исходя из определения (7) и учитывая, что согласно (57) последовательность  $[Z_M]_N$  с  $M > 0$  растет быстрее, чем  $[Z_0]_N$ , получим, что коэффициенты разложения функции Грина такие же, как у величины

$$Z_0^{-1}(g=0)Z_M(g) = \left(\prod_s \frac{2\pi}{\lambda_s^0}\right)^{-n/2} Z_M(g), \quad (58)$$

где  $\lambda_s^0$  — собственные значения оператора  $\hat{M}_0 = \varepsilon(\hat{p}) + \kappa^2$ . Вводя обозначения для детерминантов

$$D_L = \prod_s \lambda_s^L, \quad D_T = \prod_s \lambda_s^T, \quad D_0 = \prod_s \lambda_s^0, \quad (59)$$

для коэффициентов разложения функции Грина получим

$$[G_M(x_1, \alpha_1, \dots, x_M, \alpha_M)]_N = \frac{(-1)^N}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \Gamma\left(N + \frac{M+n-1}{2}\right) \left(\frac{4}{I_4}\right)^{N+(M+n-1)/2} \times \\ \times \left[ \frac{D_0}{|D_L|} \left(I_2 \frac{D_0}{D_T'}\right)^{n-1} \right]^{1/2} \sum_y \psi_c(x_1-y) \dots \psi_c(x_M-y) \int d^n u \delta(|u|-1) u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_M}. \quad (60)$$

#### 4.5. Преобразование детерминантов по Брезану и Паризи

Спектр операторов  $\hat{M}_L$  и  $\hat{M}_T$  содержит непрерывную компоненту, и для вычисления детерминантов  $D_L$  и  $D_T$  требуется проводить квантование в большом, но конечном объеме с последующим переходом к термодинамическому пределу. Однако аналитическое вычисление  $\lambda_s^L$  и  $\lambda_s^T$ , как правило, невозможно, а численные методы в такой ситуации неэффективны. Метод преодоления этих трудностей предложен Брезаном и Паризи [27]; одновременно он выявляет расходимости в детерминантах, устранение которых обнаруживает связь с общими проблемами перенормируемости. Введя обозначения

$$D(z) = \det \hat{R}(z), \quad \hat{R}(z) = 1 - \frac{3z\psi_c(x)^2}{\varepsilon(\hat{p}) + \kappa^2} \quad (61)$$

и воспользовавшись тем, что детерминант произведения равен произведению детерминантов, имеем для входящих в (60) комбинаций

$$\frac{D_L}{D_0} = \frac{\det \{ \varepsilon(\hat{p}) + \kappa^2 - 3\psi_c(x)^2 \}}{\det \{ \varepsilon(\hat{p}) + \kappa^2 \}} = D(1), \quad \frac{D_T}{D_0} = D\left(\frac{1}{3}\right). \quad (62)$$

Спектр оператора  $\hat{R}(z)$  является чисто дискретным: его низшие собственные значения могут быть найдены численно, а для высших существует простая асимптотика (см. ниже); нетрудно показать, что

$$D(z) = \prod_s \left( 1 - \frac{z}{\mu_s} \right), \quad (63)$$

где  $\mu_s$  — собственные значения уравнения

$$(\varepsilon(\hat{p}) + \kappa^2 - 3\mu_s\psi_c(x)^2) e_s(x) = 0, \quad (64)$$

т. е.  $\mu_s$  есть значение  $\mu$  в потенциале  $-3\mu\psi_c(x)^2$  для уравнения Шредингера со спектром  $\varepsilon(p)$ , при котором  $s$ -й уровень энергии равен  $-\kappa^2$ ; в силу (63)  $D_L$  и  $D_T$  выражаются через одну последовательность  $\mu_s$ . Для исключения из  $D_T$  нулевого собственного значения нужно найти закон стремления к нулю соответствующего собственного значения  $\hat{R}(z)$  при  $z \rightarrow 1/3$ , что можно сделать по теории возмущений:

$$\frac{D'_T}{D_0} = \frac{I_2}{I_4} \bar{D}\left(\frac{1}{3}\right), \quad \bar{D}\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{z \rightarrow 1/3} \frac{D(z)}{1-3z}. \quad (65)$$

При подстановке (62), (65) в выражение (60) происходит сокращение величины  $I_2$ , расходящейся при  $d = 4$ ,  $\kappa^2 = 0$  (см. ниже).

#### 4.6. Расходимости детерминантов и их устранение

Асимптотику  $\mu_s$  при больших  $s$  можно получить, подсчитывая число электронов со спектром  $\varepsilon(p)$ , имеющих энергию меньше  $-\kappa^2$  в квазиклассическом (при больших  $\mu$ ) потенциале  $-3\mu\psi_c(x)^2$ , что можно сделать методом Томаса – Ферми [27]. Ввиду ограниченности спектра,  $0 \leq \varepsilon(p) \leq J$ , при  $\mu \gg J$  в области  $|x| < r_c$ , где  $r_c$  определяется условием

$$3\mu\psi_c(r_c)^2 = J + \kappa^2, \quad (66)$$

заполнены состояния со всеми  $p$  и электроны имеют постоянную плотность, равную  $a_0^{-d}$  для модели (1) с одним уровнем на узле; при  $|x| > r_c$  плотность электронов плавно убывает до нуля на масштабе  $r_c$ . При больших  $|x|$  уравнение инстантона (34) может быть линеаризовано и разложено по градиентам [14]: при  $\kappa^2 > 0$  функция  $\psi_c(x)$  убывает экспоненциально, при  $\kappa^2 = 0$  — степенным образом:

$$\psi_c(x) \propto |x|^{2-d}, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (\kappa^2 = 0). \quad (67)$$

Искомое число состояний имеет порядок величины  $(r_c/a_0)^d$ , и в силу (66), (67) получим

$$\mu_s \sim s^\nu, \quad \nu = (2d - 4)/d. \quad (68)$$

При  $d > 4$  последовательность  $\mu_s$  растет быстрее чем  $s^{1+\delta}$ , и, представляя (63) в виде

$$D(z) = \exp \left( -z \sum_s \mu_s^{-1} - \frac{1}{2} z^2 \sum_s \mu_s^{-2} - \frac{1}{3} z^3 \sum_s \mu_s^{-3} - \dots \right), \quad (69)$$

видим, что при  $d > 4$  сходятся все суммы и расходимости в  $D(z)$  отсутствуют; при  $d = 4$   $\mu_s \sim s$  и в (69) расходится первая сумма. Ее значение определяется правилом сумм [27]

$$\sum_s \frac{1}{\mu_s} = 3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\varepsilon(k) + \kappa^2} \sum_x \psi_c(x)^2, \quad (70)$$

получаемым путем вычисления  $\ln D(z)$  при малых  $z$  по теории возмущений на основе определения (61); интеграл по  $k$  сходится в силу дискретности модели, сумма по  $x$  логарифмически расходится при  $d = 4$ ,  $\kappa^2 \rightarrow 0$  в соответствии со сказанным выше; расходимость оказывается инфракрасной в отличие от ультрафиолетовой расходимости в континуальной модели при  $d < 4$  [27].

Эта расходимость устраняется в результате перенормировки величины  $\kappa$ . Если ее затравочное значение равно  $\kappa_0$ , то исходный гамильтониан можно представить в виде суммы гамильтониана (30) с перенормированной  $\kappa$  и контрчлена

$$\Delta H\{\varphi\} = \frac{1}{2} \sum_x (\kappa_0^2 - \kappa^2) \sum_\alpha \varphi_\alpha(x)^2, \quad (71)$$

где перенормировка  $\kappa$  ищется в виде диаграммного разложения

$$\kappa_0^2 - \kappa^2 = C_1 g + C_2 g^2 + \dots \quad (72)$$

Строя инстантон по гамильтониану (30) и используя оценки для значений в перевальной точке и среднеквадратичных флуктуаций вблизи нее,

$$g_c \sim N^{-1}, \quad \delta g \sim N^{-3/2}, \quad \varphi_c \sim N^{1/2}, \quad \delta \varphi \sim 1, \quad (73)$$

убеждаемся, что при вычислениях с точностью до нулевого порядка по  $N$  включительно в (72) нужно учитывать лишь первый член разложения, а для  $g$  и  $\varphi_\alpha(x)$  в (71) подставлять их значения в перевальной точке. Вычисляя  $\kappa_0^2 - \kappa^2$  в однопетлевом приближении (определяющем  $C_1$  в (72)), получим, что контрчлен (71) приводит к появлению в правой части (60) дополнительного множителя

$$\exp \left( \frac{1}{2} g_c (n+2) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\varepsilon(k) + \kappa^2} \sum_x \varphi_c(x)^2 \right), \quad (74)$$

который в силу (62), (65), (69), (70) сокращает расходящуюся часть детерминантов. Определяя перенормированные детерминанты как

$$D_R(z) = \prod_s \left( 1 - \frac{z}{\mu_s} \right) \exp \left( \frac{z}{\mu_s} \right), \quad (75)$$

получим (60) в виде

$$\begin{aligned}
 [G_M(x_1, \alpha_1, \dots, x_M, \alpha_M)]_N &= \frac{2^{n-1}(-1)^N}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \left[ |D_R(1)| \bar{D}_R \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1} \right]^{-1/2} \times \\
 &\times \Gamma \left( N + \frac{M+n-1}{2} \right) \left( \frac{4}{I_4} \right)^{N+M/2} \sum_y \psi_c(x_1 - y) \dots \psi_c(x_M - y) \times \\
 &\times \int d^n u \delta(|u| - 1) u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_M}, \quad (76)
 \end{aligned}$$

где инстантонное решение определено по перенормированной  $\kappa$ .

#### 4.7. Зависимость от $\kappa$

Выражение (76) конечно при  $\kappa = 0$  для всех  $d \geq 4$ . Для выделения зависимости от  $\kappa$  при  $\kappa \ll \Lambda$  в явном виде придадим величине  $\kappa^2$  в уравнении инстантона (34) приращение  $\delta\kappa^2$ , разложим возникающую добавку к  $\psi_c(x)$  по  $e_s^L(x)$  и вычисляя изменение величины  $I_4$  с использованием (52) и полноты базиса  $e_s^L(x)$ , получим

$$I_4(\kappa^2 + \delta\kappa^2) - I_4(\kappa^2) = 2I_2(\kappa^2)\delta\kappa^2. \quad (77)$$

При  $d > 4$  уравнение (77) можно непосредственно проинтегрировать ввиду конечности  $I_2$  при  $\kappa^2 = 0$ :

$$I_4(\kappa^2) = I_4(0) + 2I_2(0)\kappa^2, \quad d > 4. \quad (78)$$

При  $d = 4$  величина  $I_2(\kappa^2)$  логарифмически расходится при  $\kappa^2 \rightarrow 0$ ; расходящуюся часть удобно выделить с помощью соотношения между фурье-компонентами  $\psi_c$  и  $\psi_c^3$ :

$$\langle \psi_c \rangle_k = \langle \psi_c^3 \rangle_k [\varepsilon(k) + \kappa^2]^{-1}, \quad \langle f \rangle_k \equiv \sum_x f(x) e^{ikx}, \quad (79)$$

следующего из (34); выражая  $I_2$  через  $\langle \psi_c \rangle_k$  и учитывая (79), имеем

$$I_2(\kappa^2) = I_3(0)^2 K_4 \ln \frac{\Lambda}{\kappa}, \quad d = 4, \quad (80)$$

что после подстановки в (77) и интегрирования дает

$$I_4(\kappa^2) = I_4(0) + 2I_3(0)^2 K_4 \kappa^2 \ln \frac{\Lambda}{\kappa} + O(\kappa^2), \quad d = 4. \quad (81)$$

В остальных величинах можно положить  $\kappa = 0$  (их зависимость от  $\kappa$  соответствует энергетической зависимости предэкспоненты в (92)).

#### 4.8. Функция Грина и собственная энергия неупорядоченной системы

Полагая в (76)  $M = 2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$ , проводя фурье-преобразование и переходя к пределу  $n \rightarrow 0$ , получим

$$[G(p)]_N = \frac{(-1)^N}{2(2\pi)^{1/2}} \Gamma \left( N + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{4}{I_4} \right)^{N+1} \left( \frac{\bar{D}_R(1/3)}{|D_R(1)|} \right)^{1/2} \langle \psi_c \rangle_p \langle \psi_c \rangle_{-p}, \quad (82)$$



где мы воспользовались тем, что

$$\int d^n u \delta(|u| - 1) u_\alpha^2 = \frac{1}{n} \int d^n u \delta(|u| - 1) |u|^2 = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \xrightarrow{n \rightarrow 0} 1. \quad (83)$$

Возводя ряд для  $G(p)$  в степень  $-1$  (см. Приложение), получим

$$G(p)^{-1} = (\varepsilon(p) + \kappa_0^2) + \dots - (\varepsilon(p) + \kappa_0^2)^2 [G(p)]_N g^N - \dots \quad (84)$$

Полагая в (84)  $p = 0$  и учитывая (9), получим связь  $\kappa$  и  $\kappa_0$

$$\kappa^2 = \kappa_0^2 + \dots - \kappa_0^4 [G(0)]_N g^N - \dots \quad (85)$$

Ввиду факториальности рядов (84), (85), в далеких членах ряда (84) можно заменить  $\kappa$  на  $\kappa_0$ . В силу (9) ряд (84) дает разложение для собственной энергии; учитывая (79), имеем

$$[\Sigma(p)]_N = c(p) \Gamma\left(N + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{4}{I_4}\right)^N, \quad c(p) = \frac{\langle \psi_c^3 \rangle_p \langle \psi_c^3 \rangle_{-p}}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{\bar{D}_R(1/3)}{|D_R(1)|}\right)^{1/2} \frac{2}{I_4}. \quad (86)$$

При  $p \rightarrow 0$   $\langle \psi_c^3 \rangle_p \rightarrow I_3$ , и выражение (86) конечно при  $p \rightarrow 0$ ,  $\kappa \rightarrow 0$ ; зависимость от  $p$  и  $\kappa$  является медленной — существенные изменения происходят на масштабе  $\Lambda$ .

## 5. СТРУКТУРА ОСНОВНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ $d=4$

Положим в выражении (86)  $p = 0$  и разложим его по  $\kappa$ , используя (81); сопоставляя с (13), произведем отождествление коэффициентов:

$$\begin{aligned} \Lambda^2 B_N &= c(0) \Gamma\left(N + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{4}{I_4(0)}\right)^N, \\ A_N^0 &= \text{const} \cdot N \Gamma\left(N + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{4}{I_4(0)}\right)^N, \\ A_N^1 &= -2c(0) \frac{K_4 I_3(0)^2}{I_4(0)} N \Gamma\left(N + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{4}{I_4(0)}\right)^N. \end{aligned} \quad (87)$$

Из (87) ясно, что максимальной скоростью роста при  $N \rightarrow \infty$  обладают члены с нулевой и первой степенями логарифмов: члены с более высокими степенями логарифмов растут более медленно и не воспроизводятся главной асимптотикой (86). Вследствие проведенного отождествления результат (86), выведенный для  $\kappa^2 \geq 0$ , можно распространить на произвольные комплексные  $\kappa$  при условии  $|\kappa| \ll \Lambda$ .

Теперь можно сформулировать приближение, которое дает асимптотически точное в пределе слабого беспорядка описание всей области энергий, включая окрестность перехода Андерсона: в разложении (13) учитываются: а) паркетные члены как содержащие максимальную степень большого логарифма; б) начиная с некоторого большого номера  $N_0$ , наиболее быстро растущие члены, соответствующие коэффициентам (87);

существенность этих членов связана с расходимостью ряда, поэтому выбор  $N_0$  не имеет значения. В результате (13) принимает вид:

$$\Sigma(0, \kappa^2) - \text{Re} \Sigma(0, 0) = \kappa^2 \sum_{N=1}^{\infty} A_N^N g^N \left( \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right)^N + i \text{Im} \sum_{N=N_0}^{\infty} c(0) \Gamma \left( N + \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{4g}{I_4(\kappa^2)} \right)^N. \quad (88)$$

Действительную часть последней суммы можно взять при  $\kappa = 0$ , после чего она включается в  $\text{Re} \Sigma(0, 0)$ . Определяемая уравнением (88) величина  $\kappa^2$  оказывается комплексной,  $\kappa^2 = -E - i\Gamma$ , причем в области, где существенна вторая сумма, затухание  $\Gamma$  оказывается экспоненциально малым; с учетом  $g \rightarrow -W^2/2$  можно положить

$$-\frac{4}{I_4(\kappa^2)} g \rightarrow \frac{2W^2}{I_4(E)} + i\delta, \quad I_4(E) = I_4(0) - I_3(0)^2 K_4 E \ln \frac{\Lambda^2}{(E^2 + \Gamma^2)^{1/2}} \quad (89)$$

и вычислить вторую сумму в (88) с помощью формулы

$$\text{Im} \sum_{N=N_0}^{\infty} \Gamma(N+b)(g+i\delta)^N = \frac{\pi}{g^b} e^{-1/g}, \quad (90)$$

которая получается в результате представления гамма-функции в виде определяющего ее интеграла и суммирования возникающей геометрической прогрессии: это соответствует суммированию по Борелю в теории расходящихся рядов [34]. Заменяя сумму паркетных членов результатом (16), в котором полагаем  $n = 0$ , получим

$$\Sigma(0, \kappa^2) - \text{Re} \Sigma(0, 0) = \kappa^2 \left[ \left( 1 + 8K_4 g \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right)^{1/4} - 1 \right] + i\Gamma_0(0, E), \quad (91)$$

где введено обозначение для второй суммы (88) с  $p \neq 0$

$$\Gamma_0(p, E) = \pi c(p) \left( \frac{I_4(0)}{2W^2} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{I_4(E)}{2W^2} \right). \quad (92)$$

Зависимость  $\Gamma_0$  от  $E$  можно учитывать лишь в экспоненте, что обеспечивает убывание  $\Gamma_0$  и  $\nu(E)$  в области отрицательных энергий на масштабе  $W^2/J$ ; в интересующей нас окрестности перехода Андерсона  $E \sim \Gamma$  в (92) можно положить  $E = 0$ , после чего (91) отличается от результата паркетного приближения (16) лишь появлением мнимой части у  $\Sigma(0, 0)$ : ввиду (11) это обосновывает высказанное в разд. 1 утверждение о комплексности «температуры» перехода. Полагая  $E_c = -\text{Re} \Sigma(0, 0)$ , обозначая затравочную энергию  $-\kappa_0^2$  как  $E_B$  (в отличие от перенормированной  $E$ ) и используя (10), получим уравнение ( $\Gamma_0 \equiv \Gamma_0(0, E)$ )

$$-E_B + E_c = \kappa^2 \left( 1 - 4W^2 K_4 \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right)^{1/4} + i\Gamma_0, \quad \kappa^2 = -E - i\Gamma, \quad (93)$$

определяющее  $E$  и  $\Gamma$  как функцию  $E_B$ .

## 6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (93)

Положим

$$\kappa^2 = |\kappa|^2 e^{-i\varphi}, \quad 1 - 4W^2 K_4 \ln \frac{\Lambda}{\kappa} = R e^{-i\psi}, \quad (94)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  лежат в интервале от 0 до  $\pi$ . Взяв мнимую часть (93), имеем

$$|\kappa|^2 R^{1/4} \sin(\varphi + \psi/4) = \Gamma_0. \quad (95)$$

Полагая

$$\Gamma_c = \Lambda^2 \exp\left(-\frac{1}{2K_4 W^2}\right), \quad x = \ln \frac{|\kappa|^2}{\Gamma_c}, \quad (96)$$

получим параметризацию через  $x$  и  $\varphi$  величин, входящих в (95):

$$R = 2K_4 W^2 (x^2 + \varphi^2)^{1/2}, \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{x}{\varphi}, \quad |\kappa|^2 = \Gamma_c e^x, \quad (97)$$

что позволяет преобразовать (95) к виду

$$\sin\left(\varphi + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varphi}\right) = B \frac{e^{-x}}{(x^2 + \varphi^2)^{1/8}}, \quad (98)$$

где

$$B = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_c (2K_4 W^2)^{1/4}}. \quad (99)$$

Поскольку  $\Gamma_0 \propto \exp(-S_1)$ , где величина  $S_1$  считается достаточно малой,  $B \gg 1$ . При  $x \lesssim 1$  правая часть (98) велика для всех  $\varphi$  из интервала  $(0, \pi)$  и решений для  $\varphi$  не существует; такие решения появляются лишь при  $x \gg 1$ , когда (98) принимает вид

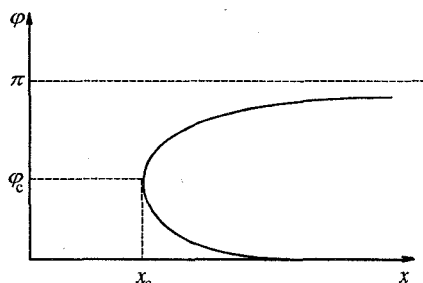
$$\sin\left(\varphi + \frac{\varphi}{4x}\right) = B \frac{e^{-x}}{x^{1/4}} \quad (100)$$

и разрешается относительно  $\varphi$ :

$$\varphi = \begin{cases} \frac{4x}{4x+1} \arcsin\left(B \frac{e^{-x}}{x^{1/4}}\right), & \varphi < \varphi_c, \\ \frac{4x}{4x+1} \left[\pi - \arcsin\left(B \frac{e^{-x}}{x^{1/4}}\right)\right], & \varphi > \varphi_c. \end{cases} \quad (101)$$

Зависимость  $\varphi$  от  $x$  представлена на рис. 2: при  $x < x_c$  решений для  $\varphi$  нет, при  $x > x_c$  имеются два решения, стремящиеся при больших  $x$  к 0 и  $\pi$ ; функция  $x(\varphi)$  является однозначно определенной для всех  $\varphi$  из интервала  $(0, \pi)$ . Параметры  $x_c$  и  $\varphi_c$  определяются уравнениями

$$\varphi_c = \frac{\pi}{2} \frac{4x_c}{4x_c+1}, \quad B \frac{e^{-x_c}}{x_c^{1/4}} = 1 \quad (102)$$

Рис. 2. Вид функции  $\varphi(x)$ 

и в главном приближении равны

$$x_c \approx \ln B, \quad \varphi_c \approx \frac{\pi}{2}. \quad (103)$$

Следующие из (94) уравнения

$$E = -\Gamma_c e^x \cos \varphi, \quad \Gamma = \Gamma_c e^x \sin \varphi \quad (104)$$

совместно с (101) определяют зависимость  $\Gamma(E)$  в параметрической форме; при  $|E| \gg \Gamma_c$  справедливы асимптотики

$$\Gamma(E) = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi K_4 W^2 E \left(1 - 2K_4 W^2 \ln \frac{\Lambda^2}{E}\right)^{-1}, & E \gg \Gamma_c, \\ \Gamma_0 \left(1 - 2K_4 W^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|E|}\right)^{-1/4}, & -E \gg \Gamma_c. \end{cases} \quad (105)$$

При больших положительных  $E$  получается результат однопетлевого приближения, определяющий обратное время релаксации, входящее в кинетическое уравнение, а при больших отрицательных  $E$  имеем  $\Gamma(E) = \Gamma_0$ , т. е. вклад в затухание является чисто непертурбативным. В точке, определяемой значениями  $x_c, \varphi_c$ , величины  $|\kappa^2|$  и  $R$  достигают своего минимального значения

$$(|\kappa^2|)_{min} \approx B\Gamma_c = \Gamma_0 (2K_4 W^2)^{-1/4}, \quad R_{min} \approx 2K_4 W^2 \ln B \approx 1 - K_4 I_4. \quad (106)$$

Для нахождения связи  $\Gamma$  и  $E$  с затравочной энергией  $E_B$  возьмем действительную часть уравнения (93) и, подставляя (94), (97) с учетом  $x \gg \varphi$ , получим

$$-E_B + E_c = \Gamma_c (2K_4 W^2)^{1/4} e^x x^{1/4} \cos(\varphi + \varphi/4x), \quad (107)$$

что совместно с (104), (101) определяет зависимости  $\Gamma(E_B), E(E_B)$  в параметрической форме. При больших  $|E|$  имеем  $E \approx E_B - E_c$ ; величина  $E_c$  регулярным образом вычисляется по теории возмущений и в однопетлевом приближении равна

$$E_c = -W^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\varepsilon(k)}. \quad (108)$$

7. СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ  $\Sigma(p, \kappa^2)$  ПРИ КОНЕЧНЫХ ИМПУЛЬСАХ

Прежде всего вычислим  $\Sigma(p, \kappa^2)$  в паркетном приближении, что может быть сделано путем некоторого развития работы Гинзбурга [21]. Из тождества Уорда имеем

$$\frac{\partial G^{-1}(p, \kappa^2)}{\partial \kappa_0^2} \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} G(q)^2 P_{\alpha\sigma\sigma\beta}(p, -q, q, -p), \quad (109)$$

где  $P_{\alpha\beta\mu\nu}(p_1, p_2, p_3, p_4)$  — полная четыреххвостая вершина ( $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ ). При  $d = 4$  ввиду  $G(q) \sim q^{-2}$  в интеграле имеет место логарифмическая ситуация. Как обычно в паркетных вычислениях [20, 21], перейдем в вершине от импульсов  $p_1, p_2, p_3, p_4$  к импульсам  $p', p, q$ , где

$$2p' = p_4 - p_3, \quad 2p = p_1 - p_2, \quad q = p_1 + p_2 = -p_3 - p_4, \quad (110)$$

а нумерация концов четыреххвостки выбрана так, что  $p' > p > q > 0$ . Вводя логарифмические переменные

$$y = \ln \frac{\Lambda}{p}, \quad z = \ln \frac{\Lambda}{q}, \quad z_{\infty} = \ln \frac{\Lambda}{\kappa}, \quad (111)$$

перепишем (109) в виде

$$\frac{\partial G^{-1}(y)}{\partial \kappa_0^2} \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{K_4}{2} \sum_{\sigma} \left[ \int_0^y dz P_{\alpha\beta\sigma\sigma}(z, y, z_{\infty}) + \int_y^{z_{\infty}} dz P_{\sigma\sigma\beta\alpha}(y, z, z_{\infty}) \right], \quad (112)$$

где учтено, что в паркетных вычислениях предполагается  $q \gg \kappa$  и поэтому предел  $q \rightarrow 0$  понимается как  $q \rightarrow \kappa$ . Пользуясь тем, что  $P$  имеет структуру [21]

$$P_{\alpha\beta\mu\nu}(x, y, z) = T_1(x, y, z) I_{\alpha\beta\mu\nu} + T_2(x, y, z) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu}, \quad (113)$$

$$I_{\alpha\beta\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}$$

и подставляя для  $T_1, T_2$  выражения (21), (22) из работы [21], получим

$$\frac{\partial G^{-1}(y, \kappa^2)}{\partial \kappa_0^2} = -\frac{6}{n-4} t(y)^{-(n+2)/(n+8)} + \frac{n+2}{n-4} t(y)^{-6/(n+8)} t(z_{\infty})^{-(4-n)/(n+8)}, \quad (114)$$

$$t(y) = 1 + K_4(n+8)gy,$$

что при  $p \rightarrow 0$  (когда  $y \rightarrow z_{\infty}$ ) согласуется с (15). Разделив (114) на (15), найдем  $\partial G^{-1}/\partial \kappa^2$ ; интегрируя по  $\kappa^2$  в главном логарифмическом приближении, определяя постоянную интегрирования по (9) и опуская величину  $\Sigma(p, 0) - \Sigma(0, 0)$ , вклад в которую возникает лишь во втором логарифмическом приближении [21], получим искомый результат паркетного приближения для  $\Sigma(p, \kappa^2)$ :

$$\Sigma(p, \kappa^2) = \Sigma(0, 0) + \kappa^2 \left\{ t(z_{\infty})^{(n+2)/(n+8)} + \frac{6}{n-4} \left[ \frac{t(z_{\infty})}{t(y)} \right]^{(n+2)/(n+8)} - \frac{n+2}{n-4} \left[ \frac{t(z_{\infty})}{t(y)} \right]^{6/(n+8)} \right\}. \quad (115)$$

Аналогично случаю  $p = 0$  вклад наиболее быстро растущих членов ряда теории возмущений приводит к появлению в правой части (115) дополнительного слагаемого  $i\Gamma_0(p, E)$  (см. (92)). Переходя к пределу  $n \rightarrow 0$ , получим окончательный результат:

$$\Sigma(p, \kappa^2) - \Sigma(0, \kappa^2) = \kappa^2 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[ \frac{t(z_\infty)}{t(y)} \right]^{1/4} + \frac{1}{2} \left[ \frac{t(z_\infty)}{t(y)} \right]^{3/4} \right\} + i\Gamma_0(p, E) - i\Gamma_0(0, E). \quad (116)$$

## 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Плотность состояний  $\nu(E)$  определяется формулой

$$\nu(E) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p, \kappa^2) \equiv \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} Y(\kappa^2) \Big|_{\kappa^2 = -E - i\Gamma}. \quad (117)$$

Главный вклад в интеграл дает область  $|p| \gtrsim \kappa$ , для которой

$$Y(\kappa^2) \approx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\varepsilon(p)} - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\kappa^2 - \Sigma(p, \kappa^2) + \Sigma(0, \kappa^2)}{\varepsilon(p)^2}. \quad (118)$$

При подстановке в (118) выражения (116) можно опустить разность непертурбативных вкладов — для нее не возникает логарифмической ситуации, что ведет к потере одной степени логарифма. Переходя в (118) к логарифмическим переменным и интегрируя, получим

$$\nu(E) = \frac{1}{2\pi W^2} \operatorname{Im} \kappa^2 \left\{ - \left[ 1 - 4K_4 W^2 \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right]^{1/4} + \left[ 1 - 4K_4 W^2 \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right]^{3/4} \right\}_{\kappa^2 = -E - i\Gamma}. \quad (119)$$

Использование (94), (97) с учетом  $x \gg \varphi$  дает

$$\nu(E) = \frac{\Gamma_c e^{\varphi}}{2\pi W^2} (2K_4 W^2 x)^{1/4} \left[ \sin \left( \varphi + \frac{\varphi}{4x} \right) - (2K_4 W^2 x)^{1/2} \sin \left( \varphi + \frac{3\varphi}{4x} \right) \right], \quad (120)$$

что совместно с (101), (104) определяет  $\nu(E)$  в параметрическом виде. Для  $|E| \gg \Gamma_c$  имеем асимптотики

$$\nu(E) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_4 E \left( 1 - 2K_4 W^2 \ln \frac{\Lambda^2}{E} \right)^{-1/4}, & E \gg \Gamma_c, \\ \Gamma_0 (2\pi W^2)^{-1} \left[ 1 - \left( 1 - 2K_4 W^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|E|} \right)^{1/2} \right], & -E \gg \Gamma_c. \end{cases} \quad (121)$$

При больших положительных  $E$   $\nu(E)$  переходит в плотность состояний идеальной решетки, а при больших отрицательных  $E$  с учетом (92) справедлив результат

$$\nu(E) = \frac{1}{2} K_4 c(0) \ln \frac{\Lambda^2}{|E|} \left[ \frac{I_4(0)}{2W^2} \right]^{1/2} \exp \left[ -\frac{I_4(E)}{2W^2} \right], \quad (122)$$

который можно получить путем суммирования далеких членов ряда для  $G(p)$  (см. (82)): он соответствует асимптотике флуктуационного хвоста, получаемой инстантонным методом в традиционной формулировке [25, 28, 29]. Плотность состояний  $\nu(E)$ , определяемая формулой (120), не имеет особенностей ни при каких  $E$ .

## 9. ОЦЕНКА ПОПРАВОК К ОСНОВНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Убедимся, что поправки к использованному приближению действительно малы. Эти поправки можно разбить на две группы.

С одной стороны, можно учитывать поправки  $\sim 1/N$ ,  $1/N^2$  и т. д. к главной асимптотике коэффициентов разложения в методе Липатова, которые возникают при учете более высоких степеней  $\delta g$  и  $\delta \varphi$  с одновременным учетом дальнейших членов разложения (72); при этом выражения типа (86) содержат лишний множитель  $1/N^m$ , который эквивалентен уменьшению на  $m$  единиц аргумента гамма-функции, что при суммировании по формуле (90) дает лишний множитель  $\sim g^m \ll 1$ . Хотя при этом возникают более высокие степени логарифмов, они входят в комбинации  $\kappa^2 \ln^k(\Lambda/\kappa)$  и в каждом порядке по  $1/N$  малы по сравнению с членом  $\sim \Lambda^2$ , содержащим нулевую степень логарифма.

С другой стороны, можно учитывать поправки к паркетному приближению, учитывая коэффициенты  $A_N^{N-1}$ ,  $A_N^{N-2}$  и т. д.: они растут быстрее, чем  $A_N^N$ , и могут быть существенными. В силу (19) суммирование в (13) членов с  $K = N - m$  дает вклад в  $\Sigma$

$$\sim \kappa^2 g^m \left(1 + 8K_4 g \ln \frac{\Lambda}{\kappa}\right)^{1/4-m} \ln^m \left(1 + 8K_4 g \ln \frac{\Lambda}{\kappa}\right), \quad (123)$$

отношение которого к результату паркетного приближения имеет верхнюю оценку

$$\sim (g (\ln R_{min}) / R_{min})^m, \quad (124)$$

так как величина  $R$  в (94) заключена в пределах от  $R_{min}$  до 1. Ввиду малости  $I_4$  для сильно притягивающего кора выражение (106) дает  $R_{min} \sim 1$ , что означает малость (124). При  $K_4 I_4 \rightarrow 1$  из (106) имеем  $R_{min} \rightarrow 0$  и поправки (124) становятся существенными; с другой стороны, при  $K_4 I_4 > 1$  уравнение (98) не имеет физически удовлетворительных решений, так как не определяет однозначную функцию  $x(\varphi)$  для всех  $\varphi$ : это указывает на существование критического значения инстантонного минимума  $S_1$  (равного  $3/4$  от значения  $S_0$  для плато), до которого справедлива изложенная теория. Имеет ли это критическое значение реальный смысл или устраняется при учете вклада инстантонного плато (разд. 3) — вопрос, требующий дальнейшего исследования.

## 10. УТОЧНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ $d > 4$

Результаты разд. 4 определяют коэффициент  $c$  в выражении (92) для непертурбативного вклада  $\Gamma_0$  и его зависимость от импульса, что позволяет уточнить результаты предыдущей работы [14] для  $d > 4$ . При  $d > 4$  в разложении  $\Sigma(p, \kappa^2)$  по  $g$  учитывается первый член и сумма далеких членов ряда [14], что в терминах затравочной энергии  $E_B$  дает

$$\Sigma(p, E_B) = W^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\varepsilon(k) - E_B - \Sigma(k, E_B)} + i\Gamma_0(p, E_B). \quad (125)$$

Действительная часть  $\Sigma$  не зависит от  $p$ , и можно перейти к перенормированной энергии

$$E = E_B + \text{Re} \Sigma(E_B) \approx E_B - E_c, \quad E_c = -W^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\varepsilon(k)}. \quad (126)$$

Тогда

$$\Gamma(p, E) = \text{Im} \Sigma(p, E) = \pi W^2 \nu(E) + \Gamma_0(p, E) \quad (127)$$

и для плотности состояний  $\nu(E)$  имеем уравнение

$$\nu(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\varepsilon(k) - E - i\pi W^2 \nu(E) - i\Gamma_0(k, E)}, \quad (128)$$

где  $\Gamma_0(k, E)$  определяется формулами (92), (78) с  $\kappa^2 = -E$ .

Автор признателен А. Ф. Андрееву, Д. А. Киржницу и М. В. Садовскому за обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-02-2690).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Операции с факториальными рядами

Пусть

$$\begin{aligned} S_A &= A_0 + A_1 g + \dots + A_N g^N + \dots, \\ S_B &= B_0 + B_1 g + \dots + B_N g^N + \dots \end{aligned} \quad (П.1)$$

— два факториальных ряда, так что  $A_N, B_N \sim N!$ . Перемножив ряды, имеем

$$S_A S_B = A_0 B_0 + \dots + g^N (A_0 B_N + A_1 B_{N-1} + A_2 B_{N+2} + \dots + A_N B_0) + \dots \quad (П.2)$$

Ввиду факториальности рядов  $B_{N-1} \sim B_N/N$ ,  $B_{N-2} \sim B_N/N^2$  и т.д. и аналогично  $A_{N-1} \sim A_N/N$ ,  $A_{N-2} \sim A_N/N^2$  и т.д.; поэтому в скобках в (П.2) можно оставить лишь первый и последний члены,

$$S_A S_B = A_0 B_0 + \dots + g^N (A_0 B_N + A_N B_0) + \dots, \quad (П.3)$$

если коэффициенты  $A_N$  и  $B_N$  имеют одинаковую скорость роста. Если коэффициенты одного из рядов, например  $S_A$ , растут быстрее (за счет более медленных поправок к основной факториальной зависимости), то в скобках в (П.3) сохраняется лишь второй член и произведение  $S_A S_B$  можно записать как  $B_0 S_A$ , если учитывать лишь нулевой и далекие члены разложения.

Используя формулу (П.3) для  $n$ -кратного умножения ряда  $S_A$  самого на себя, получим формулу для возведения  $S_A$  в натуральную степень:

$$(S_A)^n = A_0^n + \dots + n A_0^{n-1} A_N g^N + \dots \quad (П.4)$$

Для возведения  $S_A$  в отрицательную и дробную степени воспользуемся формулой для разложения в ряд  $(1+x)^\alpha$  в выражении

$$(S_A)^\alpha = A_0^\alpha \left[ 1 + g \left( \tilde{A}_0 + \dots + \tilde{A}_N g^N + \dots \right) \right]^\alpha, \quad \tilde{A}_n = A_{n+1}/A_0$$

и применим результат (П.4) к факториальному ряду в круглых скобках:

$$(S_A)^\alpha = A_0^\alpha \left[ 1 + \dots + g^N \left( \alpha \tilde{A}_{N-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} 2\tilde{A}_0 \tilde{A}_{N-2} + \dots \right) + \dots \right]. \quad (П.5)$$



Сохраняя в круглых скобках лишь первый член, получим обобщение формулы (П.4) на произвольные вещественные  $n$ .

Если функция  $f(x)$  задана сходящимся рядом

$$f(x) = f_0 + f_1 x + \dots + f_N x^N + \dots, \quad (\text{П.6})$$

то, подставляя  $x = S_A$  и используя (П.4), получим

$$f(S_A) = f(A_0) + \dots + g^N f'(A_0) A_N + \dots \quad (\text{П.7})$$

## Литература

1. К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение*, Мир, Москва (1975).
2. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).
3. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982).
4. P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
5. D. J. Thouless, Phys. Rep. **13**, 92 (1974).
6. А. Л. Эфрос, УФН **126**, 41 (1978).
7. М. В. Садовский, УФН **133**, 223 (1981).
8. S. F. Edwards, M. B. Green, and G. Srinivassan, Phil. Mag. **35**, 1421 (1977).
9. H. Kunz, R. Souillard, J. de Phys Lett. **44**, L506 (1983).
10. D. J. Thouless, J. Phys. C **9**, L603 (1976).
11. J. P. Straley, Phys. Rev. B **28**, 5393 (1983).
12. T. Lukes, J. Phys. C **12**, L797 (1979).
13. А. В. Harris and T. C. Lubensky, Phys. Rev. B **23**, 2640 (1981).
14. И. М. Суслов, ЖЭТФ **102**, 1951 (1992).
15. A. Nitzan, K. F. Freed, and M. N. Cohen, Phys. Rev. B **15**, 4476 (1977).
16. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).
17. А. Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Наука, Москва (1975).
18. И. Т. Дятлов, В. В. Судаков, К. А. Тер-Мартirosян, ЖЭТФ **32**, 767 (1957).
19. А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ **56**, 2087 (1969).
20. А. М. Поляков, ЖЭТФ **57**, 271 (1969).
21. С. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **66**, 647 (1974).
22. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН СССР **95**, 497, 773, 1177 (1954).
23. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
24. М. В. Садовский, ФТТ **19**, 2334 (1977); **21**, 743 (1979).
25. M. V. Sadovsii, Sov. Sci. Rev. A. Phys. **7**, 1 (1986).
26. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
27. E. Brezin, and G. Parisi, J. Stat. Phys. **19**, 269 (1978).
28. E. Brezin, and G. Parisi, J. Phys. C **13**, L307 (1980).
29. J. L. Cardy, J. Phys. C **11**, L321 (1978).
30. Л. Д. Кудрявцев, *Математический анализ*, т.1, Высшая школа, Москва (1973), §36.
31. И. М. Лифшиц, УФН **83**, 617 (1964).
32. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1980).
33. Д. В. Беклемишев, *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*, Наука, Москва (1974), гл.VIII.
34. Г. Харди, *Расходящиеся ряды*, ИИЛ, Москва (1951).