Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.11, стр.855 - 859 © 1996г. 10 июня

ϵ-РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ СИСТЕМЫ ВБЛИЗИ ПЕРЕХОДА АНДЕРСОНА

И.М.Суслов

Институт физических проблем им. П.Л.Капицы РАН
117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 апреля 1996 г.

В пространстве размерности $d = 4 - \epsilon$ вычислена плотность состояний для уравнения Шредингера с гауссовским случайным потенциалом во всей области энергий, включая окрестность перехода Андерсона.

PACS: 71.30+h

В работах автора [1,2] начато построение ϵ-разложения для плотности состояний неупорядоченной системы в окрестности перехода Андерсона; в настоящем сообщении приводятся результаты этого построения.

Плотность состояний для уравнения Шредингера с гауссовским случайным потенциалом определяется усредненной функцией Грина, вычисление которой сводится к задаче о фазовом переходе второго рода с n-компонентным параметром порядка $\varphi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ в пределе $n \to 0$ [3,4]. При этом коэффициенты в гамильтониане Гинзбурга-Ландау

$$H\{\varphi\} = \int d^d x \left(\frac{1}{2} c |\nabla \vec{\varphi}|^2 + \frac{1}{2} \kappa_0^2 |\vec{\varphi}|^2 + \frac{1}{4} u |\vec{\varphi}|^4 \right) \tag{1}$$

связаны с параметрами неупорядоченной системы соотношениями

$$c = 1/2m, \quad \kappa_0^2 = -E, \quad u = -a_0^d W^2/2, \tag{2}$$

где d – размерность пространства, m и E – масса и энергия частицы, a_0 – постоянная решетки, W – амплитуда случайного потенциала (в дальнейшем полагаем $c = 1$, $a_0 = 1$). "Неправильный" знак коэффициента при $|\varphi|^4$ приводит к проблеме "ложного" полюса [5], и возможность построения ϵ-разложения долгое время вызывала сомнения.

В четырехмерном пространстве структура ряда теории возмущений для собственной энергии $\Sigma(p, \kappa)$ при $p = 0$ имеет вид [2]

$$\Sigma(0, \kappa) - \Sigma(0, 0) = \kappa^2 \sum_{N=1}^{\infty} u^N \sum_{K=0}^{N} A_N^K \left(\ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right)^K, \tag{3}$$

где κ – перенормированное значение величины κ_0, Λ – параметр обрезания на больших импульсах. При $d = 4 - \epsilon$ аналогичное разложение имеет вид

$$\kappa^2 + \Sigma(0, \kappa) - \Sigma(0, 0) \equiv \kappa^2 Y(\kappa) = \kappa^2 \sum_{N=0}^{\infty} (u\Lambda^{-\epsilon})^N \sum_{K=0}^{N} A_N^K(\epsilon) \left[\frac{(\Lambda/\kappa)^\epsilon - 1}{\epsilon} \right]^K, \tag{4}$$

где $A_N^K(\epsilon)$ являются регулярными функциями ϵ,

$$A_N^K(\epsilon) = \sum_{L=0}^{\infty} A_N^{K,L} \epsilon^L \tag{5}$$

и $A_0^0(\epsilon) \equiv 1$. Разложение (4) учитывает факт, что величина Y является однородным полиномом степени N, составленным из $\Lambda^{-\epsilon}$ и $\kappa^{-\epsilon}$, следующий из анализа размерностей, и необходимость перехода в выражение (3) при $\epsilon \to 0$.

Величина Y удовлетворяет уравнению Каллана–Симанчика [6], следующего из ее связи с вершиной $\Gamma^{(1,2)}$ [7]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} + W(g_0,\epsilon)\frac{\partial}{\partial g_0} + V(g_0,\epsilon)\right) Y = 0, \tag{6}$$

где $g_0 = u\Lambda^{-\epsilon}$, $V(g_0,\epsilon) \equiv \eta_2(g_0,\epsilon)$, а определения функций $\Gamma^{(1,2)}$, $W(g_0,\epsilon)$, $\eta_2(g_0,\epsilon)$ даны в [6]. Вводя разложения

$$\begin{aligned} W(g_0,\epsilon) &= \sum_{M=1}^{\infty} W_M(\epsilon) g_0^M = \sum_{M=1}^{\infty}\sum_{M'=0}^{\infty} W_{M,M'} g_0^M \epsilon^{M'}, \\ V(g_0,\epsilon) &= \sum_{M=1}^{\infty} V_M(\epsilon) g_0^M = \sum_{M=1}^{\infty}\sum_{M'=0}^{\infty} V_{M,M'} g_0^M \epsilon^{M'} \end{aligned} \tag{7}$$

и подставляя (4) в (6), получим систему уравнений для функций $A_N^K(\epsilon)$:

$$(K+1)A_N^{K+1}(\epsilon) = (N-K)\epsilon A_N^K(\epsilon) - \sum_{M=1}^{N-K} [(N-M)W_{M+1}(\epsilon) + V_M(\epsilon)] A_{N-M}^K(\epsilon) \tag{8}$$

и для коэффициентов $A_N^{K,L}$:

$$(K+1)A_N^{K+1,L} = (N-K)A_N^{K,L-1}(1-\delta_{L,0}) - \sum_{M=1}^{N-K}\sum_{M'=0}^{L} [(N-M)W_{M+1,M'} + V_{M,M'}] A_{N-M}^{K,L-M'} . \tag{9}$$

В низших порядках теории возмущений в разложении (4) достаточно сохранить лишь главный порядок по $1/\epsilon$; при больших N требуется учет низших степеней ϵ, так как соответствующие члены имеют более высокую скорость роста при $N \to \infty$. Информация о коэффициентах разложения при больших N может быть получена методом Липатова [8, 9]: вклад N-го порядка в $\Sigma(p,\kappa)$ имеет вид

$$[\Sigma(p,\kappa)]_N = a u^N \Gamma\left(N + \frac{d+2}{2}\right)\left(-\frac{4}{I_4}\right)^N \int_0^{\infty} d\ln b^2 b^{-2} \langle\phi_c^3\rangle_{bp} \langle\phi_c^3\rangle_{-bp} \times$$

$$\times \exp\left(-Nf(\kappa b) + N\epsilon \ln b + 2K_d I_4 \frac{1-(\Lambda b)^{-\epsilon}}{\epsilon}\right), \tag{10}$$

где a – численная константа порядка единицы,

$$f(x) = -\frac{\epsilon}{2}(C + 2 + \ln\pi) - 3x^2\left(C + \frac{1}{2} + \ln\frac{x}{2}\right), \quad I_4 = \bar{I}_4 \exp(f(b_0)),$$

$$\bar{I}_4 = \frac{16}{3} S_4, \quad S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2), \quad K_d = S_d(2\pi)^{-d}, \tag{11}$$

$$b_0 \simeq \left(\frac{\epsilon}{3\ln(1/\epsilon)}\right)^{1/2}, \quad \langle\phi_c\rangle_p^3 = 8\cdot 2^{1/2}\pi^2 p K_1(p),$$

C – постоянная Эйлера, $K_1(x)$ – функция Мак-Дональда. Представляя результат (10) в виде разложения (4), имеем

$$A_N^K(\epsilon) = \tilde{a}\Gamma\left(N + \frac{d+2}{2}\right)\left(-\frac{4}{\bar{I}_4}\right)^N \int\limits_0^\infty d\ln b^2 b^{-2} C_N^K \left(\epsilon + \frac{2K_d I_4}{N} b^{-\epsilon}\right)^K \times$$

$$\times \exp\left(-Nf(b) + N\epsilon\ln b + 2K_d I_4 \frac{1-b^{-\epsilon}}{\epsilon}\right), \tag{12}$$

где $\tilde{a} = a\langle\phi_c^3\rangle_0^2$. Формула (12) справедлива для всех K при $N\epsilon \gg 1$ и для $K \ll N$ при $N\epsilon \lesssim 1$; при этих условиях коэффициенты (12) удовлетворяют уравнению (8), в котором в сумме сохранен лишь член с $M=1$, что возможно при больших N ввиду факториального роста $A_N^K(\epsilon)$. При $N\epsilon \lesssim 1$ метод Липатова хорошо воспроизводит коэффициенты $A_N^K(\epsilon)$ лишь при $K \ll N$ ввиду их быстрого убывания с ростом K и ограниченной точности $\sim 1/N$ главной асимптотики. Система уравнений (8) определяет $A_N^K(\epsilon)$ с $K>0$ по заданным $A_N^0(\epsilon)$, и асимптотику Липатова можно использовать как граничное условие к ней, что позволяет определить $A_N^K(\epsilon)$ в области $1 \ll N \lesssim 1/\epsilon$ для всех K. Исследование показывает, что в сумме (4) существенны два вклада: а) непертурбативный вклад, возникающий от области больших N и получаемый суммированием (10) от произвольного конечного N_0 до бесконечности [1,2]:

$$[\Sigma(0,\kappa)]_{nonpert} = i\pi\tilde{a}\kappa^2 \left[\frac{I_4}{4|u|}\kappa^\epsilon\right]^{(d+2)/2} \int\limits_0^\infty d\ln b^2 b^{-2} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{2K_d I_4}{\epsilon} - \frac{\bar{I}_4}{4|u|}\kappa^\epsilon(1 + f(b) - \epsilon\ln b)\right), \tag{13}$$

где взят предел $\Lambda \to \infty$; б) квазипаркетный вклад, возникающий от членов с коэффициентами $A_N^{N-K,L}$ при $K \sim L \sim 1$, $N \lesssim 1/\epsilon$: эти коэффициенты могут быть получены из (9), если заметить, что уравнения для $A_N^{N-K,L}$ с K и L, меньшими некоторого числа M, являются независимыми от остальных; выделяя главную асимптотику по N, нетрудно доказать по индукции, что

$$A_N^{N-K,L} = C_{K+L}^K A_N^{N-K-L},$$

$$A_N^{N-K} = (-W_{2,0})^N \frac{\Gamma(N-\beta)}{\Gamma(N+1)\Gamma(-\beta)} \frac{(-W_{3,0})^K}{(-W_{2,0})^{2K}} \frac{(N\ln N)^K}{K!}, \tag{14}$$

где $\beta = -V_{1,0}/W_{2,0}$, а значения первых коэффициентов разложения (7) равны

$$W_1(\epsilon) = -\epsilon, \quad W_{2,0} = K_4(n+8), \quad W_{3,0} = -3K_4^2(3n+14), \quad V_{1,0} = -K_4(n+2). \tag{15}$$

Для паркетных коэффициентов $A_N^{N,0}$ результат (14) является точным; квазипаркетный вклад в сумму (4) имеет вид

$$[Y(\kappa)]_{quasiparq} = \left[\Delta + \frac{W_{3,0}}{W_{2,0}} u\kappa^{-\epsilon} \ln \Delta\right]^{\beta}, \quad \Delta \equiv 1 + W_{2,0} u \frac{\kappa^{-\epsilon} - \Lambda^{-\epsilon}}{\epsilon}. \tag{16}$$

С логарифмической точностью величина Δ под логарифмом может быть заменена на свое минимальное значение $\tilde{\Delta} \sim \epsilon \ln \epsilon$ (определяемое приведенными ниже уравнениями (18)–(22)), и при $\Lambda \to \infty$ результат (16) может быть записан в виде

$$[Y(\kappa)]_{quasiparq} = [1 + W_{2,0} \tilde{u} \kappa^{-\epsilon}/\epsilon]^{\beta}, \quad \tilde{u} \equiv u \left[1 + \frac{W_{3,0}}{W_{2,0}^2} \epsilon \ln \tilde{\Delta}\right], \tag{17}$$

отличающемся от паркетного [7] лишь заменой u на $\tilde{u}$; можно доказать, что такая замена происходит во всех паркетных формулах, используемых при вычислении плотности состояний [2].

Дальнейшие вычисления аналогичны описанным в [2]; зависимости затухания Γ, перенормированной энергии E и плотности состояний ν от затравочной энергии E_B определяются в параметрической форме уравнениями

$$\Gamma = \Gamma_c \left(1 + \frac{\epsilon x}{2}\right)^{2/\epsilon} \sin\varphi, \quad E = -\Gamma_c \left(1 + \frac{\epsilon x}{2}\right)^{2/\epsilon} \cos\varphi, \tag{18}$$

$$-E_B + E_c = \Gamma_c \left(\frac{\epsilon x}{2}\right)^{1/4} \left(1 + \frac{\epsilon x}{2}\right)^{2/\epsilon - 1/4} \left(\cos\left(\varphi + \frac{\varphi}{4x}\right) - \mathrm{tg}\frac{\varphi(1 + 2\epsilon x)}{3} \sin\left(\varphi + \frac{\varphi}{4x}\right)\right), \tag{19}$$

$$\nu = \frac{\Gamma_c}{4\pi|\tilde{u}|} \left(1 + \frac{\epsilon x}{2}\right)^{2/\epsilon} \left(\left(1 + \frac{2}{\epsilon x}\right)^{-1/4} \sin\left(\varphi + \frac{\varphi}{4x}\right) \left[1 - \frac{b_0^2}{2(1 + \epsilon x/2)}\right] - \right.$$
$$\left. - \left(1 + \frac{2}{\epsilon x}\right)^{-3/4} \sin\left(\varphi + \frac{3\varphi}{4x}\right)\right), \tag{20}$$

$$\Gamma_c = \left(\frac{8K_4|\tilde{u}|}{\epsilon}\right)^{2/\epsilon}, \quad E_c \simeq 2u \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2}, \tag{21}$$

где $x(\varphi)$ – однозначная функция в интервале $0 < \varphi < \pi$, аналогичная показанной на рис.2 работы [2] и определяемая уравнением

$$\sin\left(\varphi + \frac{\varphi}{4x}\right) = B \frac{e^{-4x/3}}{x^{1/4}} \left(1 + \frac{\epsilon x}{2}\right)^{d/2 + 5/4} \cos\frac{\varphi(1 + 2\epsilon x)}{3} \int_0^{\infty} d\ln b^2 b^{-2} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{8}{3}\left(1 + \frac{\epsilon x}{2}\right) \frac{f(b) - \epsilon \ln b}{\epsilon}\right), \tag{22}$$

где

$$B = \pi \tilde{a} \cdot 2^{1/4} (8/3)^3 \epsilon^{-13/4} \exp\left[\frac{8}{3\epsilon}\left(1 - \frac{K_4 \tilde{I}_4 \tilde{u}}{K_d I_4 u}\right)\right] \sim \epsilon^{-3/2} \left(\ln\frac{1}{\epsilon}\right)^{7/4}. \tag{23}$$

Обратим внимание на наличие скейлинга: при измерении энергии в единицах Γ_c, а плотности состояний – в единицах $\Gamma_c/|\tilde{u}|$ все зависимости определяются универсальными функциями, не зависящими от степени беспорядка. При больших положительных E функция $\nu(E)$ переходит в плотность состояний идеальной системы, при больших отрицательных E получается результат для флуктуационного хвоста

$$\nu(E) = \tilde{a} K_4 \left(\frac{2\pi}{3} \ln \frac{1}{b_0}\right)^{1/2} b_0^{-3} |E|^{1-\epsilon/2} \left[\frac{I_4}{4|u|b_0^\epsilon} |E|^{\epsilon/2}\right]^{(d+1)/2} \times$$
$$\times \exp\left(\frac{2K_d I_4}{\epsilon} - \frac{I_4}{4|u|b_0^\epsilon}|E|^{\epsilon/2}\right), \qquad (24)$$

энергетическая зависимость которого совпадает с полученной в [10, 11] и соответствует известному закону Лифшица [12]; расходимость при $\epsilon \to 0$ устраняется для конечного параметра обрезания Λ. В области малых $|E|$, при $\epsilon x \ll 1$, формулы (18) – (22) по функциональной форме совпадают с четырехмерными, несколько отличаясь от полученных в [2] вследствие перенормируемости модели. Аналогично [2], точка фазового перехода смещается в комплексную плоскость и плотность состояний не имеет особенностей при действительных E в соответствии с общепринятыми (но не доказанными) представлениями.

Автор признателен участникам семинаров в ИФП и ФИАН за интерес к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Российского правительства (гранты M0H000 и M0H300), и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-19527).

1. И.М.Суслов, ЖЭТФ **102**, 1951 (1992).
2. И.М.Суслов, ЖЭТФ **106**, 560 (1994).
3. Ш.Ма, *Современная теория критических явлений*, М.: Мир, 1980.
4. A.Nitzan, K.F.Freed, and M.N.Cohen, Phys. Rev. B **15**, 4476 (1977).
5. M.V.Sadovskii, Sov. Sci. Rev. A. Phys. **7**, 1 (1986).
6. E.Brezin, J.C.Le Guillou, and J.Zinn-Justin, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Ed. by C.Domb and M.S.Green (Academic, New York, 1976), vol. VI.
7. С.Л.Гинзбург, ЖЭТФ **66**, 647 (1974).
8. Л.Н.Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
9. E.Brezin, J.C.Le Guillou, and J.Zinn-Justin, Phys. Rev. D **15**, 1544 (1977).
10. J.L.Cardy, J. Phys. C **11**, L321 (1978).
11. E.Brezin and G.Parisi, J. Phys. C **13**, L307 (1980).
12. И.М.Лифшиц, УФН **83**, 617 (1964).