

# ВЫСОКИЕ ПОРЯДКИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ: СУЩЕСТВЕННЫ ЛИ РЕНОРМАЛОНЫ?

И. М. Суслов

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН

117334, Москва, Россия

E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

## Аннотация

Согласно Липатову [1], высокие порядки теории возмущений определяются перевальными конфигурациями — инстантонами — соответствующих функциональных интегралов. Согласно другой точке зрения, существенны также вклады отдельных больших диаграмм — ренормалонов, которые по мнению т'Хоофта [15] не содержатся в липатовском вкладе. Излагается история концепции ренормалонов и обсуждаются аргументы за и против их существования. На примере теории  $\varphi^4$  исследуются аналитические свойства борелевских образов функциональных интегралов, функций Грина, вершинных частей и скейлинговых функций. Доказана их аналитичность в комплексной плоскости с разрезом от первой инстантонной особенности до бесконечности (гипотеза Ле-Гийо — Зинн-Жюстина [38]). Это исключает существование ренормалонных сингулярностей, указанных т'Хоофтом, и демонстрирует неконструктивность концепции ренормалонов в целом. Результаты можно интерпретировать как указание на внутреннюю непротиворечивость теории  $\varphi^4$ .

## 1. Введение

Многие задачи теоретической физики сводятся к вычислению функциональных интегралов типа

$$I = \int D\varphi \exp(-S_0\{\varphi\} - gS_{int}\{\varphi\}) \quad , \quad (1)$$

разложение которых по константе связи  $g$  дает обычную теорию возмущений. В 1977 году Липатов [1] предложил метод вычисления далеких коэффициентов разложения интегралов (1), основанный на следующей простой идее. Если функции  $F(g)$  раскладывается в ряд

$$F(g) = \sum_{N=0}^{\infty} F_N g^N \quad ,$$

то  $N$ -й коэффициент разложения может вычисляться по формуле

$$F_N = \oint_C \frac{dg}{2\pi i} \frac{F(g)}{g^{N+1}} \quad , \quad (2)$$

где контур  $C$  охватывает точку  $g = 0$  в комплексной плоскости. Принимая в качестве  $F(g)$  интеграл (1), получим

$$I_{N-1} = \frac{1}{2\pi i} \int dg \int D\varphi \exp(-S_0\{\varphi\} - gS_{int}\{\varphi\} - N \ln g) \quad (3)$$

и появление при больших  $N$  экспоненты с большим показателем позволяет надеяться на применение метода перевала. Идея Липатова состоит в том, что перевал в (3) ищется *одновременно* по  $g$  и  $\varphi$ : он существует для всех представляющих интерес случаев и реализуется на локализованной в пространстве функции, называемой инстантоном, причем при больших  $N$  оказываются выполненными условия применимости метода перевала.

Примененный первоначально к скалярным теориям типа  $\varphi^4$ ,

$$S_0\{\varphi\} + gS_{int}\{\varphi\} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{4}g\varphi^4 \right\} \quad , \quad (4)$$

метод Липатова был обобщен в дальнейшем на векторные поля [2], скалярную электродинамику [3, 4], поля Янга-Миллса [5], фермионные поля [6] и др. (см. сборник статей [7]). Конечная цель состояла в применении его к теориям, представляющим практический интерес — квантовой электродинамике [8, 9] и КХД [10, 11]: как было указано уже в первой работе Липатова [1], знание нескольких первых коэффициентов и их асимптотики позволяет приблизительно восстановить функцию Гелл-Манна – Лоу, что открывает прямой путь к решению проблемы конфайнмента и электродинамики на малых расстояниях.

Однако, уже в 1977 году зародилось направление, ставящее под сомнение метод Липатова. Оно берет начало с работы Лаутрупа [12], которая содержала следующее

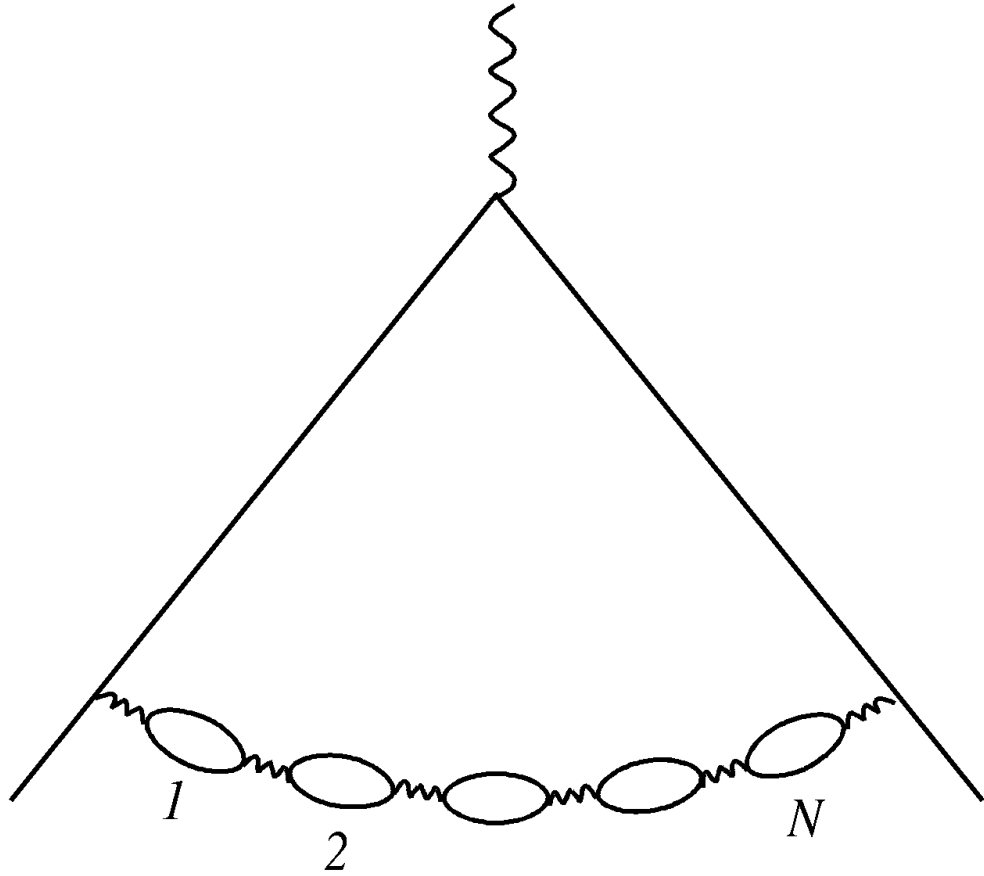


Рис. 1: Пример диаграммы для квантовой электродинамики, дающей вклад  $\sim N!$  в  $N$ -м порядке теории возмущений [12].

любопытное замечание. Типичный результат вычислений методом Липатова имеет функциональную форму

$$I_N = ca^N \Gamma(N + b) \approx ca^N N^{b-1} N! \quad (5)$$

и его естественная интерпретация состоит в том, что имеется факториально большое число диаграмм одинакового порядка  $(ag)^N$ . Однако, в общем случае такая интерпретация неправильна — существуют примеры отдельных диаграмм  $N$ -го порядка, имеющих величину  $\sim N!$  — это диаграммы (рис. 1), содержащие длинные цепочки "пузырей" (bubble diagrams). Такие факториальные вклады отдельных диаграмм получили название "ренормалонов", так как они возникают лишь в перенормируемых теориях <sup>1</sup>: пример Лаутрупа (рис. 1) относился к квантовой электродинамике, но аналогичные диаграммы существуют в КХД и четырехмерной теории  $\varphi^4$ .

<sup>1</sup>В широком смысле, перенормируемой называется теория, расходимости в которой устраняются путем перенормировки конечного числа параметров. По более тонкой терминологии такие теории подразделяются на суперперенормируемые (перенормируемые "с запасом") и перенормируемые в узком смысле (перенормируемые "на пределе", маргинально); последние, давшие название "ренормалонам",

Строго говоря, из замечания Лаутрупа ничего не следовало: метод Липатова основан на формальном вычислении функционального интеграла (3) и ни в коей мере не опирается на статистический анализ диаграмм. Естественно ожидать, что ренормалонные вклады уже учтены в инстантонном результате (5). Фактически, ни в работе [12], ни в нескольких последующих [13, 14] никаких серьезных утверждений и не делалось.

Однако, в дальнейшем тональность работ этого направления резко меняется. Причиной послужила лекция т'Хоофта [15], прочитанная на одной из школ в том же 1977 году: в ней впервые появилось слово "ренормалоны" и было высказано утверждение, что *ренормалоны не содержатся в инстантонном вкладе (5)*. Авторы последующих работ [16]-[30] считают мнение т'Хоофта самоочевидным и не утруждают себя аргументацией.

В лекции т'Хоофта был введен удобный язык для обсуждения — аналитические свойства борелевских образов. В теории расходящихся рядов [31] широко используется преобразование Борел

$$F(g) = \sum_{N=0}^{\infty} F_N g^N = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{N!} \int_0^{\infty} dx x^N e^{-x} g^N = \int_0^{\infty} dx e^{-x} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{N!} (gx)^N \quad ,$$

факториально улучшающее сходимость рядов. Его удобно переписать в виде

$$F(g) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} B(gx) \quad , \quad (6)$$

$$B(z) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{N!} z^N \quad , \quad (7)$$

введя борелевский образ  $B(z)$  функции  $F(g)$ . Для функции с коэффициентами разложения (5) борелевский образ

$$B_I(z) = \sum_N ca^N N^{b-1} z^N \sim (1 - az)^{-b} \quad , \quad za \rightarrow 1 \quad (8)$$

имеет особенность в точке  $z = 1/a$ .

Т'Хоофт приходит к этому результату другим путем, без ссылок на метод Липатова. Переписывая интеграл (1) и определение борелевского образа (6) в виде

$$I = \int D\varphi \exp(-S\{\varphi\}/g) \quad , \quad (9)$$

$$F(g) = \int_0^{\infty} dx e^{-x/g} B(x) \quad , \quad (10)$$

---

характеризуются логарифмической ситуацией, которая необходима для возникновения факториальных вкладов (см. ниже).

что может быть сделано путем замен  $\varphi \rightarrow \varphi/\sqrt{g}$  и  $x \rightarrow x/g$  в (4) и (6)<sup>2</sup>, он получает борелевский образ интеграла (9):

$$B_I(z) = \int D\varphi \delta(z - S\{\varphi\}) = \oint_{z=S\{\varphi\}} \frac{d\sigma}{|\nabla S\{\varphi\}|} \quad , \quad (11)$$

где последнее интегрирование производится по гиперповерхности  $z = S\{\varphi\}$ . Если для интеграла (9) существует инстантон  $\varphi_c(x)$ , т. е. классическое решение с конечным действием, то  $\delta S\{\varphi\} = 0$  и частные производные  $\partial S/\partial\varphi_i$  по всем переменным  $\varphi_i$ , входящим в символ  $D\varphi$ , обращаются в нуль; следовательно,  $\nabla S\{\varphi_c\} = 0$  и борелевский образ (11) имеет особенность в точке

$$z = S\{\varphi_c\} \quad , \quad (12)$$

совпадающей с  $1/a$ . Кроме того, имеются сингулярности в точках  $mS\{\varphi_c\}$ , соответствующие решениям, содержащим  $m$  бесконечно удаленных инстантонов. Если считать, что особенность (12) — ближайшая к началу координат, то воспроизводится результат (5) метода Липатова. Однако, т'Хоофт допускает существование сингулярностей, отличных от инстантонных: в этом случае асимптотика коэффициентов разложения может определяться одной из них, ближайшей к началу координат.

В качестве возможного механизма возникновения новых сингулярностей т'Хоофт рассматривает ренормалоны. Возьмем произвольную диаграмму для квантовой электродинамики и выделим в ней линию виртуального фотона с импульсом  $k$  (или линию взаимодействия в теории  $\varphi^4$ )(рис. 2,): ей соответствует интегрирование по области больших импульсов типа

$$\int_{k>k_0} d^4k k^{-2m} \quad ,$$

где  $m$  — целое; если считать все перенормировки выполненными, то интеграл сходится и  $m \geq 3$ . Вставляя в фотонную линию цепочку из  $N$  "пузырей"(рис. 2, ), получим интеграл<sup>3</sup>

$$\int_{k>k_0} d^4k k^{-2m} (\beta_0 \ln k^2)^N \sim \beta_0^N \int_0^\infty dt t^N e^{-(m-2)t} \sim \left( \frac{\beta_0}{m-2} \right)^N N! \quad (13)$$

Суммирование по Борелю последовательности таких диаграмм дает особенности в точках

$$z = \frac{m-2}{\beta_0} \quad , \quad m = 3, 4, 5, \dots \quad (14)$$

Константа  $\beta_0$  является первым неисчезающим коэффициентом разложения функции Гелл-Манна — Лоу (разд. 2) и с учетом знаковых соотношений ( $S\{\varphi_c\} < 0$ ,  $\beta_0 > 0$ ) т'Хоофт приходит к картине сингулярностей для теории  $\varphi^4$ , показанной на рис. 3, .

<sup>2</sup>Т'Хоофт опускает множители типа  $g^n$ , имея в виду, что интегралы типа (1) обычно входят в виде отношения и такие множители сокращаются.

<sup>3</sup>В квантовой электродинамике и КХД поляризационная петля дает множитель  $k^2 \ln k^2$ , а фотонный (глюонный) пропагатор —  $1/k^2$ ; в четырехмерной теории  $\varphi^4$  замкнутой петле соответствует  $\ln k^2$ , а линии взаимодействия — константа. Во всех случаях цепочке из  $N$  "пузырей" соответствует  $(\ln k^2)^N$ .

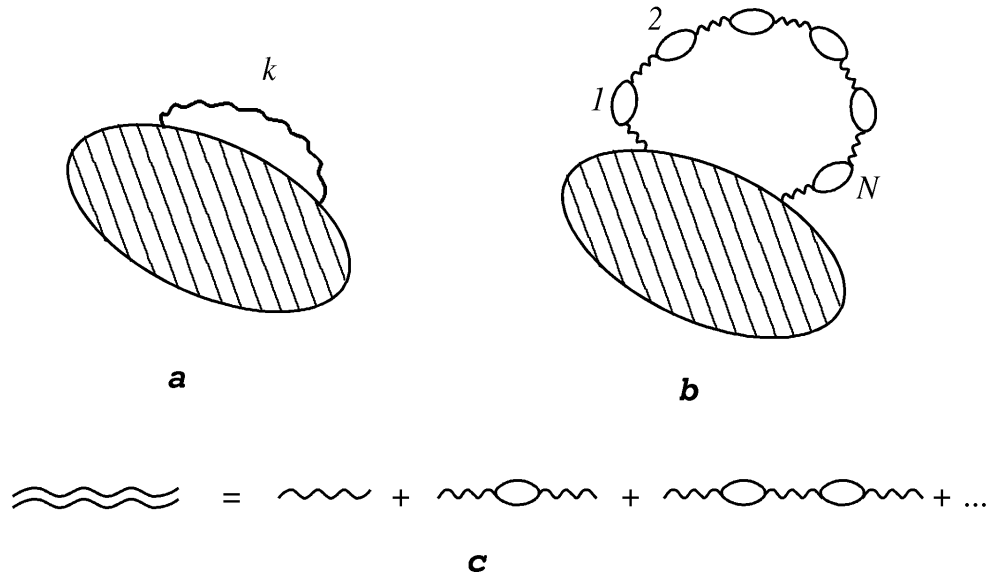


Рис. 2: Более общая точка зрения на ренормалоны.

Нетрудно видеть, что аргументация т'Хоофта в отношении ренормалонов оставляет без ответа главные вопросы: *Почему можно придавать значение отдельным последовательностям диаграмм, которые при  $N \rightarrow \infty$  составляют бесконечно малую долю их полного числа? Откуда известно, что ренормалоны уже не учтены в инстантонном вкладе (5)?* Однако, общая постановка вопроса о возможности вкладов неинстантонной природы в асимптотику коэффициентов разложения имеет смысл: она вскрывает пробел в математической обоснованности метода Липатова. Действительно, пусть функция  $f(x)$  имеет резкий максимум в точке  $x_0$  и медленный "хвост" при больших  $x$  (рис. 4), так что вклады в интеграл  $\int f(x)dx$  от окрестности максимума и области хвоста сравнимы. Исследование интеграла на перевал обнаружит точку максимума  $x_0$  и (при условии его достаточной резкости) формальную применимость метода перевала; однако, вычисление интеграла в перевальном приближении будет ошибочным, так как будет потерян вклад хвоста. Если такие хвосты имеются в интеграле (3), то метод Липатова может оказаться неверным<sup>4</sup>.

Практическое отсутствие неперевальных методов вычисления функциональных интегралов делает невозможным прямое исследование вклада возможных хвостов. Но есть ли конструктивные аргументы, указывающие на их существование? В принципе такие аргументы имеются, но носят довольно интуитивный и расплывчатый характер, а при ближайшем рассмотрении не выдерживают критики (разд. 2). В результате

<sup>4</sup>Справедливость метода перевала может быть обоснована для сходящихся интегралов конечной кратности от функций типа  $\exp(\lambda F(x))$  в пределе  $\lambda \rightarrow \infty$  [32]. Интеграл (3) может быть приведен к указанному виду, но, вообще говоря, содержит как обычные ультрафиолетовые расходимости, так и расходимости, связанные с переходом к бесконечному числу интегрирований. Конечным (после соответствующих перенормировок) должно быть отношение двух интегралов типа (1), но не каждый из них по отдельности.

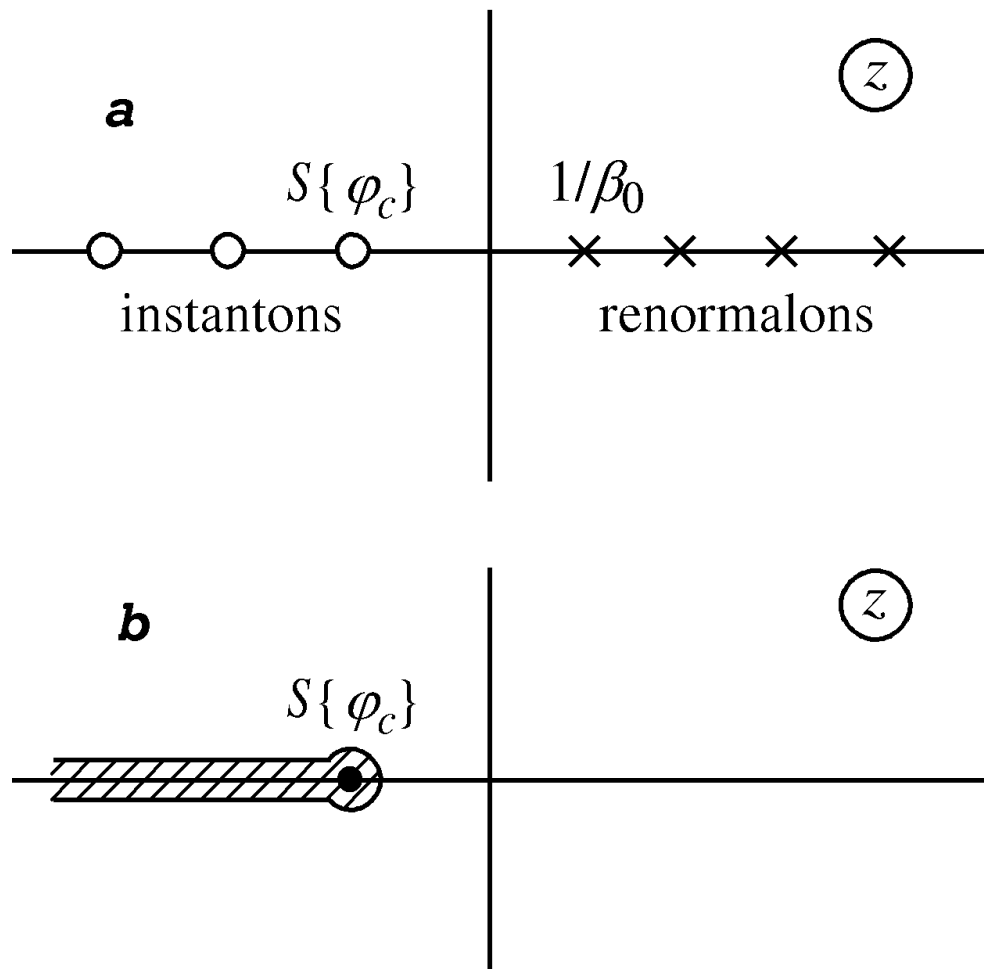


Рис. 3: *a* – Картина сингулярностей для теории  $\varphi^4$ , представлена т'Хоофтом [15].  
*b* – Область аналитичности согласно результатам настоящей работы.

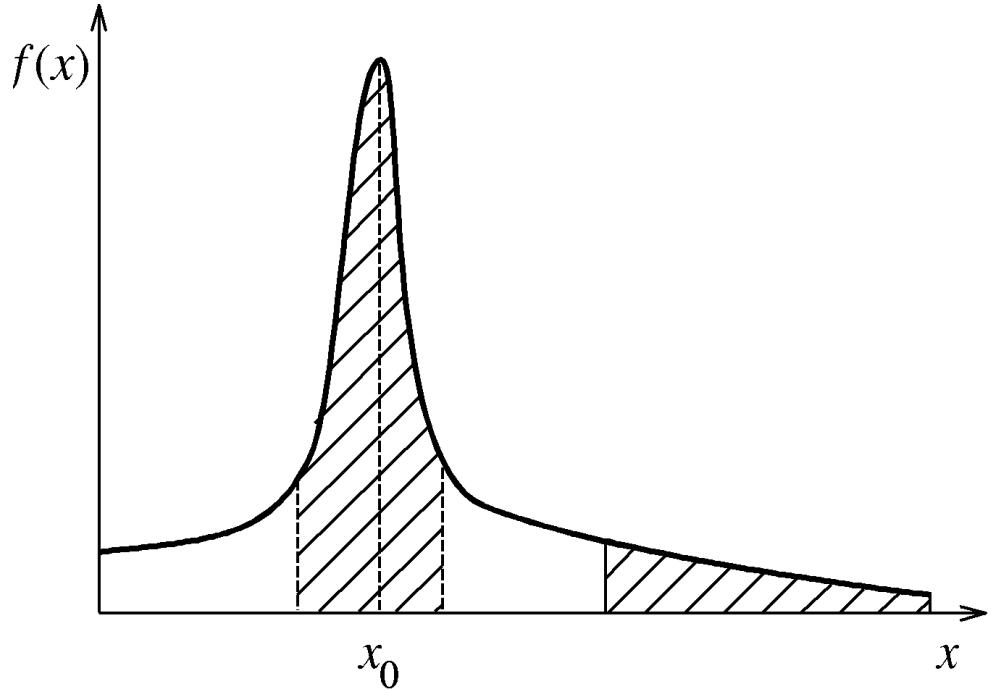


Рис. 4: Пример функции, для которой метод перевала формально применим, но дает неправильный результат.

концепция ренормалоннов оказалась в диалектическом равновесии — ее не удавалось ни доказать, ни опровергнуть. Такая неопределенность привела к тому, что интерес к высоким порядкам теории возмущений резко упал и программа Липатова [1] осталась незавершенной. Так, предварительный результат для квантовой электродинамики был получен уже в 1978 году [9], однако параметры  $b$  и  $c$  в асимптотике  $I_N = ca^N \Gamma(N/2 + b)$  не вычислены до сих пор; первый результат для КХД появился в 1991 году [10], недавно подвергнут ревизии [11], но все равно остается неудовлетворительным (разд. 4), хотя фундамент для таких расчетов был полностью подготовлен к 1980 г. [5, 6]; попытки восстановления функции Гелл-Манна – Лоу ограничились теорией  $\varphi^4$  [33, 34, 35].

В последнее время наблюдается оживление интереса к асимптотическим оценкам, но почти исключительно в рамках ренормалонного направления [21]-[30]; в частности, считается общепринятым (см. обзор Захарова [22]), что ренормалонны определяют асимптотику теории возмущений в КХД. Однако, уже в рамках ренормалонного направления обнаружилась его сомнительность: суммирование более сложных последовательностей диаграмм привело к сильной перенормировке ренормалонного вклада и сделало полностью неопределенным общий коэффициент перед ним [30]; фактически невозможно утверждать, что он не обращается в нуль. С другой стороны, применение метода Липатова обеспечило существенный прогресс в теории неупорядоченных систем [36] и теории турбулентности [37].

В настоящей работе дается детальное обсуждение существующей аргументации в



пользу ренормалонов и показывается ее несостоятельность (разд. 2). На примере теории  $\varphi^4$  исследуются аналитические свойства борелевских образов (разд. 3) и доказываются их аналитичность в комплексной плоскости с разрезом от первой инстантонной особенности до бесконечности (рис. 3, ): это исключает существование ренормалонных сингулярностей, указанных т'Хоофтом (рис. 3, ), и демонстрирует неконструктивность концепции ренормалонов в целом.

Гипотеза о том, что борелевские образы имеют указанные аналитические свойства, высказывалась Ле-Гийо и Зинн-Жюстином [38] и лежит в основе одного из эффективнейших методов суммирования рядов теории возмущений, известного под названием "конформ-борель"; полученные ниже результаты дают математическое обоснование этого метода.

## 2. Pro et contra

Обсудим имеющиеся в литературе аргументы, указывающие на существование в интеграле (3) вкладов, отличных от инстантонного.

1. Имеется множество полуинтуитивных высказываний, сводящихся к тому, что *инстантоны не исчерпывают всей физики*. Этот тезис является правильным при правильном его понимании; но в этом случае он не имеет отношения к делу.

Исторически инстантоны впервые появились при использовании перевального приближения в *исходном интеграле (1)*; это было обосновано лишь в узкой области параметров и потому инстантоны действительно не исчерпывали всей физики. В методе Липатова ситуация меняется, так как перевальное приближение используется не в интеграле (1), а в выражении (3) для коэффициентов разложения. Поскольку рассматриваются лишь большие значения  $N$ , то инстантонам с самого начала отводится ограниченная роль; но теперь метод перевала применим всегда<sup>5</sup> и появляются основания считать, что все определяется инстантонами.

Проиллюстрируем сказанное на примере уравнения Шредингера со случайным потенциалом  $V(x)$ :

$$\left[ \hat{p}^2/2m + V(x) \right] \Psi(x) = E\Psi(x) \quad . \quad (15)$$

Его собственные функции (рис. 5) при больших отрицательных  $E$  локализованы на редких флуктуациях случайного потенциала (, ), при больших положительных  $E$  — близки к плоским волнам (, ), а в окрестности затравочного края спектра  $E = 0$  имеют сильно изрезанный, фрактальный характер (, ). Проблема исследования уравнения (15) может быть переформулирована на языке эффективной теории поля — именно, теории  $\varphi^4$  с "неправильным" знаком  $g$  [36, 39]; при этом типичные волновые функции локализованных состояний описываются инстантонами. На инстантонном языке

<sup>5</sup>Конечно, инстантоны существуют не во всей области параметров, но в методе Липатова это не является ограничением: величины  $a, b, c$  в асимптотике (5) вычисляются *точно* и как функции физических параметров допускают аналитическое продолжение.

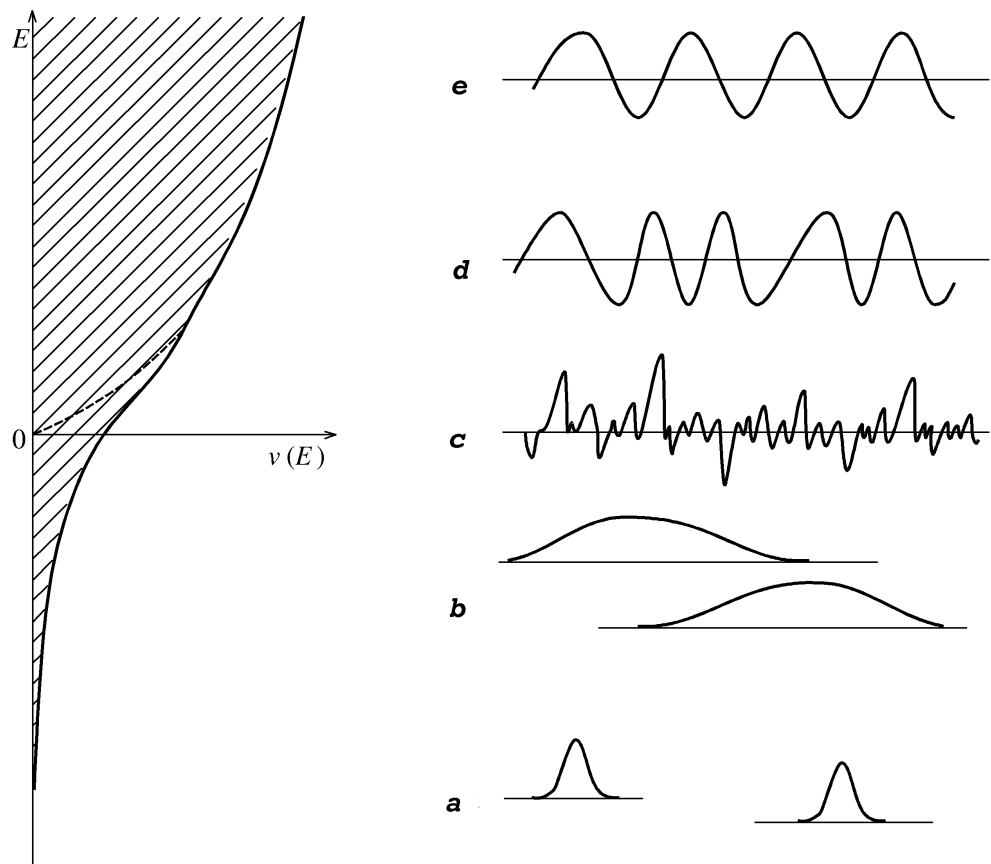


Рис. 5: Справа — схематический вид собственных функций уравнения (15). Слева — плотность состояний  $\nu(E)$  при наличии (сплошная кривая) и отсутствии (пунктир) случайного потенциала.

изменение ситуации при увеличении  $E$  выглядит следующим образом: сначала инстантоны имеют малый радиус и расположены редко, т. е. образуют идеальный газ (); затем радиус инстантонов увеличивается, а их плотность возрастает — между ними возникает взаимодействие (); затем происходит конденсация инстантонов () и образуется инстантонный кристалл (, ). Применности метода перевала в интеграле типа (1) соответствует лишь случай () и потому стандартное инстантонное приближение оказывается очень бедным.

Рассмотрим эту ситуацию с точки зрения теории возмущений по случайному потенциалу  $V(x)$ . Идеальный инстантонный кристалл () соответствует плоской волне, т. е. нулевому порядку теории возмущений; в неидеальном кристалле () возрастает роль более высоких порядков; в окрестности затравочной границы спектра () все диаграммы оказываются одного порядка величины, так что высокие и низкие порядки теории возмущений одинаково существенны; в области локализованных состояний (, ) доминирующая роль переходит к высоким порядкам: эти состояния не появляются ни в каком конечном порядке теории возмущений, а отбрасывание вкладов низших порядков никак не влияет на их свойства. Мы видим, что концепция Липатова (высокие порядки определяются инстантонами) прекрасно вписывается в существующую физическую картину.

Таким образом, статус инстантонов в интеграле (1) и интеграле (3) существенно различен; на наш взгляд, это объясняет позицию, занятую т'Хоофтом, так как он является классиком инстантонов [40] именно в исходном интеграле (1).

2. *Связь с логарифмической ситуацией* [15]. Реномалоны существуют лишь в перенормируемых, но не суперперенормируемых теориях. Если теория суперперенормируема, то для вклада отдельной диаграммы можно получить оценку сверху типа  $a^N g^N$  и появление множителя  $N!$  в асимптотике (5) может быть связано лишь с факториально большим числом диаграмм. В перенормируемых теориях появляются реномалоны и, следовательно, — новый механизм возникновения факториальных вкладов. Можно ожидать, что этот механизм связан с образованием хвостов в интеграле (3) и не учитывается в методе Липатова.

В этом аргументе правильно все, кроме последнего вывода. Проиллюстрируем это на примере теории  $\varphi^4$ , которая перенормируема при  $d = 4$  и суперперенормируема при  $d < 4$ . Среди множества интегрирований, спрятанных в символе  $D\varphi$  интеграла (3), можно выделить одно, для которого предельный переход  $d \rightarrow 4$  связан с качественными изменениями: это интегрирование по радиусу инстантона  $R$  (рис. 6). Для  $d$ , существенно меньших 4 (напр.  $d = 3$ ), подинтегральная функция  $\exp(-S\{\varphi\})$  имеет по  $R$  резкий максимум и допускает перевальное интегрирование; при  $d = 4 - \epsilon$  максимум становится пологим, а при  $d = 4$  инстантонное действие  $S\{\varphi_c\}$  вообще не зависит от  $R$ . В последнем случае интеграл расходится, что и приводит к логарифмической ситуации. Мы видим (см. кривую для  $d = 4 - \epsilon$  на рис. 6), что "подключение" реномалонных вкладов действительно связано с возникновением медленных хвостов в интеграле (3), однако эти хвосты *учитываются* в липатовской технике [36].

Может возникнуть недоумение: если метод Липатова — это метод перевала, то как он может охватить заведомо неперевальную ситуацию для  $d = 4 - \epsilon$ ? Дело в

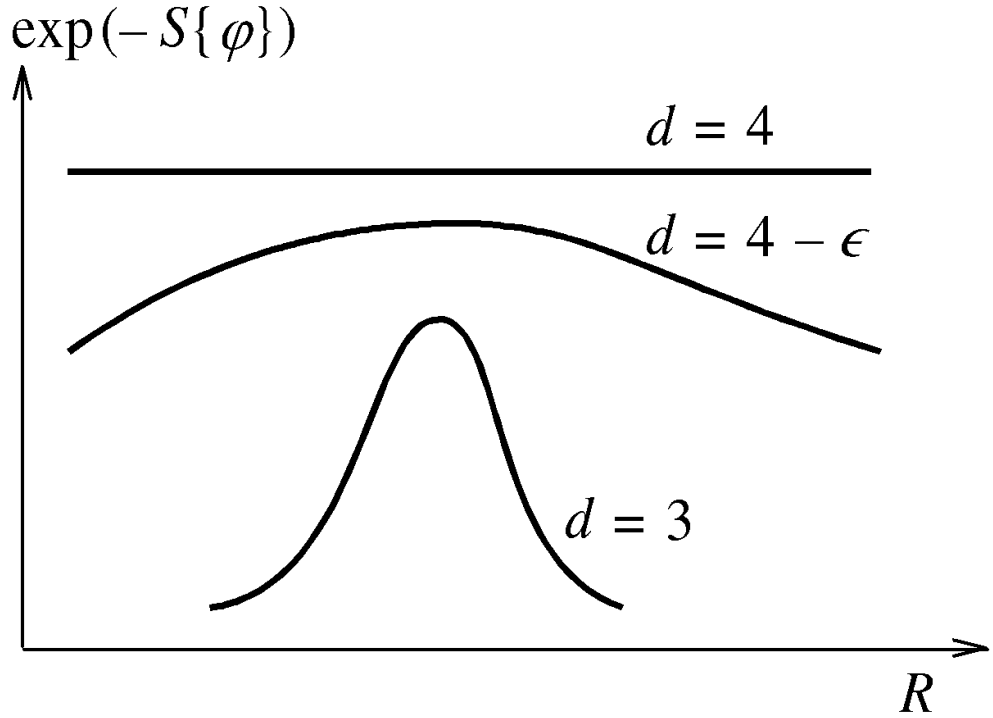


Рис. 6: Зависимость подынтегральной функции (1) от радиуса инстантона в  $d$ -мерной теории  $\varphi^4$ .

том, что перевал в функциональном интеграле фактически никогда не сводится к простому максимуму, достигаемому в одной точке: максимум оказывается вырожденным на некотором подпространстве конечной размерности. Соответственно, конечное число интегрирований должно быть выполнено точно, а не в перевальном приближении. Но если по некоторой переменной (напр.  $R$ ) интегрирование производится точно, то не имеет значения, является ли вырождение точным ( $d = 4$ ) или приближенным ( $d = 4 - \epsilon$ ). Впрочем, в последнем случае возникают технические трудности и соответствующие методы ("constrained instantons"[41, 42]) до недавнего времени были плохо разработаны [36].

Из сказанного ясно, что даже в случаях, когда медленные хвосты в интеграле (3) реально возникают, липатовская процедура оказывается достаточно гибкой и содержит широкие возможности для обращения с ними.

3. *Предел  $n \rightarrow \infty$ .* Есть мнение, что в существовании ренормальных вкладов легко убедиться, рассмотрев  $n$ -компонентную теорию  $\varphi^4$  в пределе  $n \rightarrow \infty$  (и аналогичные модели в КХД и электродинамике) [16]: замкнутой петле соответствует множитель  $n$  и ренормальные графики, содержащие максимально возможное количество петель, оказываются выделенными по большому параметру  $n$ . Диаграммы того же порядка, но с меньшим количеством петель, хотя и могут давать при больших  $N$  сравнимые вклады из-за комбинаторных множителей, имеют более медленную зависимость от  $n$ ; поэтому ренормалоны не могут сократиться тождественно.

Этот аргумент является правильным в любом конечном порядке по  $1/n$ . Однако, детальное исследование структуры  $1/n$ -разложения [18, 19] обнаруживает наличие многочисленных сокращений и, хотя ситуацию не удается прояснить полностью, вопрос не решается на уровне простых аргументов указанного типа.

Нетрудно разобраться, в чем здесь дело. Рассмотрим для примера собственную энергию  $\Sigma(p, m)$  теории  $\varphi^4$ ; из диаграммного анализа ясно, что при  $m = 0$  и импульсах  $p$ , близких к импульсу обрезания  $\Lambda$ ,  $(N + 1)$ -й коэффициент разложения для  $\Sigma(p, 0) - \Sigma(0, 0)$  имеет вид полинома по  $n$ ,

$$p^2 \left\{ A_N(N)n^N + A_{N-1}(N)n^{N-1} + \dots + A_1(N)n + A_0(N) \right\} \quad , \quad (16)$$

в котором коэффициент  $A_N(N)$  определяется ренормалонными графиками:

$$A_N(N) = \text{const} \left( -\frac{1}{16\pi^2} \right)^N N! \quad (17)$$

Если предположить, что ренормалонный вклад содержится в инстантонном, то выражение (16) должно переходить при больших  $N$  в асимптотику Липатова (см. формулу (130) работы [43] при  $M = 1$  и  $p \approx \Lambda$ ):

$$p^2 \alpha \beta^n N^{(n+6)/2} \left( -\frac{3}{8\pi^2} \right)^N N! \left[ \Gamma \left( \frac{n+2}{2} \right) \right]^{-1} \int_0^\infty dy y^{(n+5)/3} K_1(y)^2 \quad , \quad (18)$$

где  $\alpha, \beta \sim 1$ ,  $K_1(x)$  – функция Мак-Дональда. Легко видеть, что при  $n \rightarrow \infty$  равенство выражений (16) и (18) невозможно – в этом и проявляется "несокращаемость" ренормалонов.

Однако обычное условие применимости метода Липатова  $N \gg 1$  при больших  $n$ , вообще говоря, заменяется более жестким, например  $N \gg n$ , и для  $n$  возникает ограничение типа

$$n \lesssim n_0(N) \quad , \quad (19)$$

не позволяющее переходить к пределу  $n \rightarrow \infty$ . Если учесть, что асимптотика Липатова имеет ограниченную точность ( $\sim 1/N$  в относительных единицах), то правильная постановка вопроса состоит в следующем: можно ли построить интерполяционный полином вида (16) со старшим коэффициентом (17), который с заданной точностью аппроксимирует функцию (18) на отрезке  $0 \leq n \leq n_0(N)$ , где  $n_0(N) \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ ? Ответ на этот вопрос положительный (см. Приложение); следовательно, предположение о том, что ренормалонный вклад содержится в инстантонном, не приводит к противоречиям.

4. *Связь с полюсом Ландау* [16, 19]. Нетрудно видеть (рис. 2, ), что суммирование последовательности ренормалонных диаграмм соответствует "одеванию" взаимодействия; при этом для связи перенормированного заряда  $g$  с затравочным  $g_0$  получается известное выражение [44, 45, 46]

$$g_0 = \frac{g}{1 - \beta_0 g \ln(\Lambda^2/m^2)} \quad , \quad (20)$$

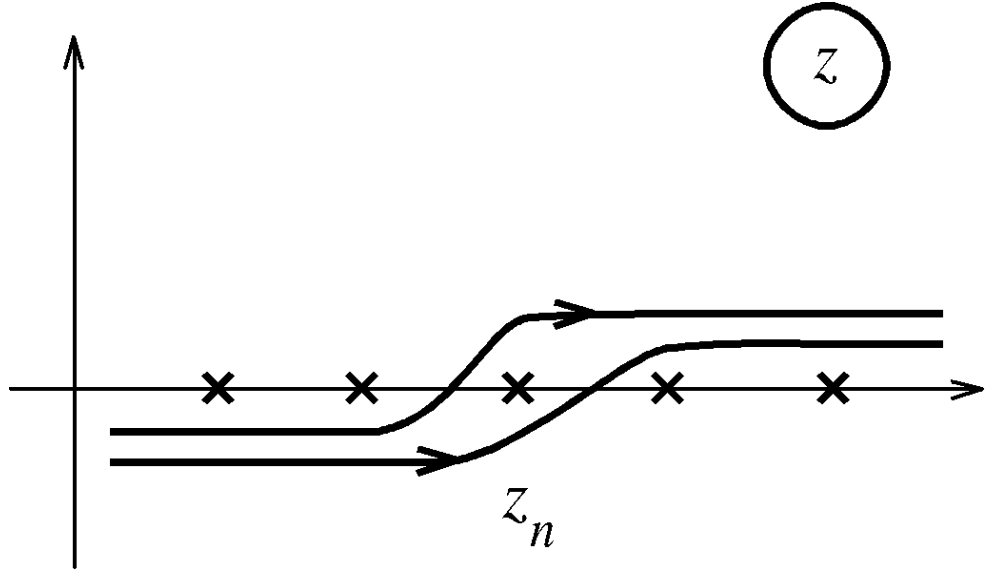


Рис. 7: Неоднозначность выбора контура интегрирования в борелевском интеграле (6) при наличии ренормалонных сингулярностей.

содержащее полюс в точке

$$\Lambda_c^2 = m^2 e^{1/\beta_0 g} \quad . \quad (21)$$

При буквальной интерпретации этого полюса в духе старых работ Ландау и Померанчука [47] ренормалонным сингулярностям можно придать наглядный физический смысл [16, 19].<sup>6</sup>

Зависимость ряда теории возмущений от параметра обрезания  $\Lambda$  имеет структуру

$$c_{-1}\Lambda^2 + c_0 \ln \Lambda^2 + c_1\Lambda^{-2} + c_2\Lambda^{-4} + \dots + c_n\Lambda^{-2n} + \dots \quad (22)$$

Первые два члена устраняются процедурой перенормировки, остальные в принципе остаются, но исчезают в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Из-за наличия полюса в (20) значения  $\Lambda$ , большие  $\Lambda_c$ , принципиально недостижимы и в теории возникают неустраняемые неопределенности типа

$$\Lambda_c^{-2n} = m^2 e^{-n/\beta_0 g} \quad . \quad (23)$$

Такие же неопределенности порождаются ренормалонными сингулярностями, существование которых на положительной полуоси приводит к неоднозначности выбора контура интегрирования в борелевском интеграле (6). Контур можно провести справа или слева от  $n$ -й сингулярности (рис. 7), что дает неопределенность в восстановлении функции по ее борелевскому образу

$$\delta F(g) \sim \oint_{z \approx z_n} dz e^{-z/g} B(z) \sim e^{-z_n/g} \quad , \quad (24)$$

<sup>6</sup>Ниже предполагается, что  $\beta_0 > 0$ . Для асимптотически свободных теорий, в которых  $\beta_0 < 0$ , аналогичные соображения справедливы в отношении так называемых "инфракрасных" ренормалонов; последние получаются из интегралов типа (13) с  $m = 1, 0, -1, -2, \dots$  от области малых импульсов.

которая с учетом  $z_n = n/\beta_0$  совпадает с (23).

Разумеется, буквальная интерпретация полюса Ландау выглядит архаичной, однако, путем некоторой модификации приведенного рассуждения ему можно придать реальный смысл. Как известно [46], зависимость заряда  $g$  от масштаба расстояний  $\Lambda^{-1}$  определяется уравнением

$$\frac{dg}{d \ln \Lambda^2} = \beta(g) = \beta_0 g^2 + \beta_1 g^3 + \dots \quad , \quad (25)$$

характер решения которого зависит от поведения функции Гелл-Манна — Лоу  $\beta(g)$ . Полюс в (20) устраняется, если  $\beta(g)$  меняет знак или ведет себя при больших  $g$  как  $g^\alpha$  с  $\alpha < 1$ ; если же  $\beta(g)$  положительна и растет при  $g \rightarrow \infty$  как  $g^\alpha$  с  $\alpha > 1$ , то полюс сохраняется и теория внутренне противоречива из-за невозможности определить зависимость  $g(\Lambda)$  при всех  $\Lambda$  [46]. В последнем случае положение полюса определяется уравнением

$$\ln \frac{\Lambda_c^2}{m^2} = \int_g^\infty \frac{dx}{\beta(x)} \quad , \quad (26)$$

которое при малых  $g$  приводит к результату

$$\Lambda_c^2 = \text{const } m^2 e^{1/\beta_0 g} \quad , \quad (27)$$

отличающемся от (21) лишь несущественным постоянным множителем. Таким образом, для внутренне противоречивых теорий существование ренормалонных сингулярностей выглядит достаточно убедительным; напротив, в "хороших" теориях для них нет оснований.<sup>7</sup>

Поскольку поведение функции  $\beta(g)$  при  $g \gtrsim 1$  неизвестно, то существование или отсутствие ренормалонных сингулярностей оказывается предметом веры. Подчеркнем, однако, следующее обстоятельство. Факториальные вклады отдельных диаграмм существуют во всех теориях поля, в которых разложение  $\beta$ -функции (25) начинается с квадратичного члена: тогда взаимодействие на масштабе  $k^{-1}$  описывается формулой типа (20) с заменой  $\Lambda$  на  $k$ , разложение которой дает  $(\beta_0 \ln k^2)^N$  в  $N$ -м порядке (см. (13))<sup>8</sup>. Решение же вопроса о внутренней противоречивости теории требует знания *всех* коэффициентов разложения (25). Поэтому считать, что формальное существование ренормалонов указывает на внутреннюю противоречивость теории было бы некорректно.

<sup>7</sup>В частности, результат (27) справедлив при обрыве разложения (25) на конечном числе членов при условии положительности возникающего полинома: на этом основании легко прийти к ошибочному выводу, что высшие члены разложения  $\beta$ -функции малосущественны. Аргументация Паризи [16, 17] в отношении импульсной зависимости борелевских образов носит именно такой характер; в действительности, характер решения написанных им уравнений [17] существенно зависит от поведения  $\beta(g)$  на бесконечности: в частности, они легко решаются для модельной функции  $\beta(g) = \beta_0 g^2 / (1 + \lambda g)$  с  $\lambda \gg 1$  и приводят к результату, качественно отличному от однопетлевого.

<sup>8</sup>При этом конкретный вид ренормалонных диаграмм в разных теориях может несколько различаться: так в теории  $\varphi^4$  существенные диаграммы не сводятся к цепочкам из "пузырей" (рис. 2, ), а образуют так называемый "паркет" [48].

### 3. Аналитические свойства борелевских образов теории $\varphi^4$

#### 3.1. Расширение класса преобразований Бореля

Для дальнейшего удобно расширить класс преобразований Бореля, полагая вместо (6, 7)

$$F(g) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{b_0-1} B(gx) \quad ,$$

$$B(g) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{\Gamma(N+b_0)} g^N \quad , \quad (28)$$

с произвольным параметром  $b_0 > 0$ . Если  $B(g)$  и  $\tilde{B}(g)$  — борелевские образы, соответствующие параметрам  $b_0$  и  $b_1$  соответственно (для определенности  $b_1 > b_0$ ), то нетрудно вывести формулу пересчета:

$$\tilde{B}(g) = \frac{1}{\Gamma(b_1 - b_0)} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{b_1-b_0-1}}{(1+x)^{b_1}} B\left(\frac{g}{1+x}\right) \quad . \quad (29)$$

Определим область аналитичности функции  $B(g)$ , построив так называемую звезду Миттаг–Лефлера [31], т. е. проведя разрезы от всех особых точек до бесконечности вдоль лучей, проведенных через эти точки из начала координат. Если  $g$  лежит в области аналитичности функции  $B(g)$ , то контур интегрирования в (29) не проходит через ее сингулярности и  $\tilde{B}(g)$  оказывается также аналитичной. Если  $g_c$  — особая точка  $B(g)$ , то в интеграле (29) для  $g = g_c$  контур неизбежно проходит через  $g_c$ , порождая особенность в  $\tilde{B}(g)$ . Для актуального случая степенных сингулярностей имеем правило соответстви

$$B(g) = A\Gamma(-\beta) \left(\frac{g_c - g}{g_c}\right)^{\beta} \quad \longrightarrow \quad \tilde{B}(g) = A\Gamma(-\beta - b_1 + b_0) \left(\frac{g_c - g}{g_c}\right)^{\beta+b_1-b_0} \quad (30)$$

для нецелых  $\beta + b_1 - b_0$  и

$$B(g) = A\Gamma(-\beta) \left(\frac{g_c - g}{g_c}\right)^{\beta} \quad \longrightarrow \quad \tilde{B}(g) = A \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left(\frac{g_c - g}{g_c}\right)^n \ln \left(\frac{g_c - g}{g_c}\right) \quad , \quad (31)$$

если  $\beta + b_1 - b_0 = n$  — целое.

Мы видим, что область аналитичности для всех борелевских образов одинакова и ее достаточно установить при каком-то фиксированном  $b_0$ . Для исследования функциональных интегралов удобен выбор  $b_0 = 1/2$ , так как в этом случае получается простой результат для борелевского образа экспоненты,

$$F(g) = e^{-g} \quad \longrightarrow \quad B(g) = \frac{\cos(2\sqrt{g})}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ e^{2i\sqrt{g}} + \text{c. c.} \right\} \quad , \quad (32)$$



сохраняющий ее экспоненциальную форму. Это позволяет записать явное выражение для борелевского образа функционального интеграла (1):

$$B_I(g) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int D\varphi \exp(-S_0\{\varphi\}) \left[ \exp\left(2i\sqrt{gS_{int}\{\varphi\}}\right) + \text{с. с.} \right] \quad (33)$$

Подинтегральная функция регулярна и область аналитичности  $B_I(g)$  определяется условием сходимости интеграла.

### 3.2. Аналитичность вне отрицательной полуоси

Для простоты рассматриваем скалярную теорию  $\varphi^4$ ; обобщение на  $n$ -компонентный случай тривиально и сводится лишь к некоторому усложнению обозначений. Считаем, что  $m^2 > 0$ , имея в виду последующее аналитическое продолжение на произвольные комплексные  $m^2$ .

Интеграл (33) для теории  $\varphi^4$  хорошо определен при положительных  $g$ , так как его сходимость определяется экспонентой от  $-S_0\{\varphi\}$  и является очевидной после фурье-преобразования  $\varphi(x)$ :

$$S_0\{\varphi\} = \frac{1}{2} \int d^d x \{(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\} = \frac{1}{2} \sum_k (k^2 + m^2) |\varphi_k|^2 \quad (34)$$

Для аналитического продолжения на комплексные  $g$  произведем поворот контура интегрирования в (33), полагая

$$g = \bar{g}e^{i\Psi} \quad , \quad \varphi = \bar{\varphi}e^{-i\Psi/4} \quad , \quad (35)$$

где  $\bar{g}$  и  $\bar{\varphi}$  действительны, причем  $\bar{g} > 0$ . Тогда интеграл в (33) принимает вид

$$\int D\bar{\varphi} \exp\left(-S_0\{\bar{\varphi}\}e^{-i\Psi/2}\right) \left[ \exp\left(2i\sqrt{\bar{g}S_{int}\{\bar{\varphi}\}}\right) + \text{с. с.} \right] \quad (36)$$

и сходится для  $-\pi < \Psi < \pi$ ; тем самым борелевский образ аналитичен вне отрицательной полуоси.

### 3.3. Аналитичность в круге

Воспользуемся формальным приемом, использованным в работах [3, 41], и введем функцию

$$R\{\varphi\} = \frac{S_0\{\varphi\}^2}{4S_{int}\{\varphi\}} \quad (37)$$

Тогда выражение (33) переписывается в виде

$$B_I(g) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int D\varphi \exp \left( - \left[ 1 - i \left( \frac{g}{R\{\varphi\}} \right)^{1/2} \right] S_0\{\varphi\} \right) + \text{c. c.} \quad (38)$$

и при замене  $R\{\varphi\}$  на константу  $R_0$  оказывается аналитичным в круге  $|g| < R_0$ . Пусть теперь

$$R\{\varphi\} \geq R_0 \quad (39)$$

для всех  $\varphi$ , т. е.  $R_0$  — точная нижняя грань  $R\{\varphi\}$ . Полагая  $g = -|g|e^{i\gamma}$ ,  $-\pi \leq \gamma \leq \pi$ , имеем неравенство

$$|B_I(g)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int D\varphi \left\{ \exp \left( - \left[ 1 - \left| \frac{g}{R_0} \right|^{1/2} \cos \frac{\gamma}{2} \right] S_0\{\varphi\} \right) + \exp(-S_0\{\varphi\}) \right\} \quad , \quad (40)$$

обеспечивающее сходимость интеграла в выражении (33), а следовательно — его аналитичность в круге  $|g| < R_0$ .

Для нахождения  $R_0$  рассматриваем вариационную задачу о минимизации  $R\{\varphi\}$ ; она приводит к уравнению

$$-\Delta\varphi(x) + m^2\varphi(x) - C\varphi(x)^3 = 0 \quad , \quad (41)$$

$$C = \frac{S_0\{\varphi\}}{2S_{int}\{\varphi\}} \quad ,$$

которое после замены  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x)/\sqrt{C}$  превращается в стандартное уравнение инстантона теории  $\varphi^4$ . С его помощью легко показать, что  $R_0 = S\{\varphi_c\}$ , чем устанавливается требуемая область аналитичности (рис. 3, ). Вопросы, связанные с отсутствием инстантонов в массивной четырехмерной теории [49], обсуждаются в разд. 3.5.

Кроме интеграла (1) представляют интерес другие функциональные интегралы, содержащие в предэкспоненте произведения типа  $\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_M)$ ; наличие последних не влияет на сходимость и все проведенные доказательства остаются без изменений.

### 3.4. Инвариантность относительно алгебраических операций

Как указал т'Хоофт [15], сингулярности борелевских образов не сдвигаются при проведении с исходными функциями алгебраических операций. Это легко доказать для модифицированного определения борелевского образа (10), отличного от (6) и (28), так как

$$F(g) = F_0 + F_1g + F_2g^2 + F_3g^3 + \dots \quad , \quad B(z) = F_0\delta(z) + \frac{F_1}{0!} + \frac{F_2}{1!}z + \frac{F_3}{2!}z^2 + \dots \quad (42)$$

и  $B(z)$  содержит  $\delta$ -образную особенность в нуле. Преобразование (10) заменой  $g \rightarrow 1/z$  сводится к преобразованию Лапласа и допускает обращение; с его помощью можно выразить борелевский образ произведения  $F_3(g) = F_1(g)F_2(g)$  через известные борелевские образы сомножителей:

$$B_3(z) = \int_0^z dz' B_1(z')B_2(z - z') \quad . \quad (43)$$

Легко видеть, что  $\delta$ -образная особенность в  $B_3(z)$  соответствует определению (42), а особые точки при конечных  $z$  совпадают с особыми точками  $B_1(z)$  и  $B_2(z)$  (см. аналогичное рассуждение в разд. 3.1). В частности, борелевским образом  $g^n$  является функция  $z^{n-1}/\Gamma(n)$ , аналитична при целых  $n$ , и умножение функции на  $g^n$  не меняет ее аналитических свойств в борелевской плоскости.

Если  $F_2(z) = 1/F_1(z)$ , то

$$\delta(z) = \int_0^z dz' B_1(z')B_2(z - z') \quad (44)$$

и  $\delta$ -образная особенность в левой части сокращается с  $\delta$ -образными особенностями  $B_1(z)$  и  $B_2(z)$ . При конечных  $z$  правая часть содержит сингулярности, соответствующие особым точкам  $B_1(z)$  и  $B_2(z)$ , которые отсутствуют в левой части и следовательно компенсируют друг друга: это возможно лишь в случае, если  $B_2(z)$  имеет особенности в тех же точках, что  $B_1(z)$ .

Для линейных операций – суммирования, дифференцирования, интегрирования и пр. – аналогичные утверждения доказываются тривиально.

Стандартное определение борелевского образа (6) получается из (10, 42) при  $F_0 = 0$  после замены  $F(g) \rightarrow gF(g)$ ; при этом  $\delta$ -образные особенности исчезают, а остальные сохраняются в тех же точках ввиду несущественности множителя  $g$ . Определение (6) соответствует определению (28) с  $b_0 = 1$  и в силу разд. 3.1 проведенный анализ распространяется на произвольные  $b_0$ .

Поскольку все входящие в теорию величины – функции Грина, вершинные части и пр. – выражаются путем алгебраических операций через функциональные интегралы с одинаковыми аналитическими свойствами (см. конец разд. 3.3), то их особые точки в борелевской плоскости – такие же, как у интеграла (1).

### 3.5. Процедура перенормировки

Выше неявно предполагалось отсутствие ультрафиолетовых расходимостей, что для теории  $\varphi^4$  верно при  $d < 2$ . Для  $2 \leq d \leq 4$  построение континуальной теории без расходимостей возможно путем введения в лагранжиан контрчленов [46, 50]. В простейшем

случае, когда требуется лишь перенормировка массы ( $2 \leq d < 4$ ), соответствующий член в (4) переписывается в виде

$$m_0^2 \varphi^2 = (m^2 + \Delta m^2) \varphi^2 = (m^2 + Ag + Bg^2 + Cg^3 + \dots) \varphi^2 \quad , \quad (45)$$

где коэффициенты  $A, B, C, \dots$  выбираются из условия сокращения расходимостей. При наличии контрчленов аналитические свойства интегралов типа (1) усложняются, так как константа связи входит не только в комбинации  $g\varphi^4$ , но и в виде  $g\varphi^2, g^2\varphi^2$  и т. д. Одно из направлений ренормальной деятельности как раз и состояло во введении в лагранжиан дополнительных членов и отслеживании возникающих ренормальных сингулярностей [16, 18, 19]; при этом возникает вопрос о сокращении сингулярностей при выборе коэффициентов у дополнительных членов из условия отсутствия расходимостей, на который не удается получить однозначного ответа.

Более простой путь состоит в явном введении регуляризации и использовании уравнений ренормгруппы. При этом имеется в виду т. н. схема обрезания [51]: по теории возмущений вычисляются вершинные части как функции затравочного заряда  $g_0$  и параметра обрезания  $\Lambda$ ; затем получаются скейлинговые функции, зависящие только от  $g_0$ ; наконец, строятся перенормированные вершины, зависящие от перенормированного заряда  $g$  [50]. При этом явного введения контрчленов не требуется, но учитываются все тонкости, связанные с их наличием, так как при записи ренормгрупповых уравнений существенно используется принципиальная возможность устранения расходимостей.

Простейший способ регуляризации состоит в замене члена  $(\nabla\varphi)^2$  в (4), приводящегося к виду  $-\varphi\Delta\varphi = \varphi\hat{p}^2\varphi$ , где  $\hat{p}$  – оператор импульса, на  $\varphi\epsilon(\hat{p})\varphi$ . Если

$$\epsilon(p) = \epsilon(-p) \quad , \quad \epsilon(p) \geq 0 \quad , \quad (46)$$

то сохраняется как вся структура инстантонных вычислений [52], так и приведенные выше доказательства; единственное изменение происходит в уравнении инстантона (41), которое приводится к виду

$$\epsilon(\hat{p})\varphi(x) + m^2\varphi(x) - \varphi(x)^3 = 0 \quad . \quad (47)$$

При использовании регуляризации

$$\epsilon(p) = p^2 + p^6/\Lambda^4 \quad (48)$$

зависимость действия  $S\{\varphi\}$  от радиуса инстантона  $R$  в четырехмерной теории  $\varphi^4$  имеет вид, показанный на рис. 8<sup>9</sup>. При  $\Lambda = \infty$  в безмассовой теории имеется вырождение по радиусу инстантона [1], тогда как в массивной теории инстантоны не существуют [49] ввиду монотонной зависимости  $S\{\varphi\}$  от  $R$ . При конечных  $\Lambda$  в зависимости  $S\{\varphi\}$  от  $R$  при  $m^2 > 0$  возникает минимум (пунктирные кривые на рис. 8) и в массивной теории

<sup>9</sup>Эту зависимость легко получить, характеризуя инстантон двумя параметрами — радиусом и амплитудой — и производя вариационную оценку действия; в теории неупорядоченных систем это соответствует методу оптимальной флуктуации [36].

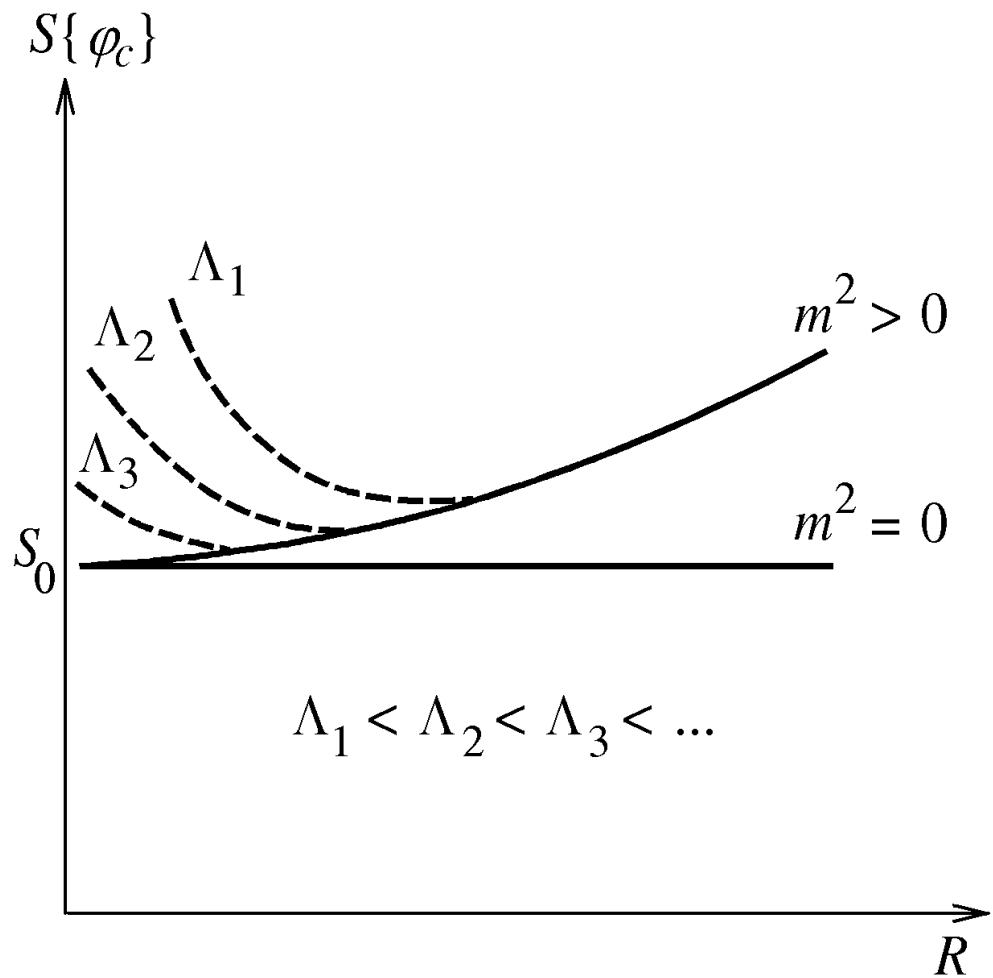


Рис. 8: Зависимость действия  $S\{\varphi\}$  от радиуса инстантона  $R$  в четырехмерной теории  $\varphi^4$  при отсутствии регуляризации (сплошные кривые) и для конечного параметра обрезания  $\Lambda$  (пунктир)

появляются инстантоны: их действие  $S\{\varphi_c\}$  определяет положение сингулярностей в борелевской плоскости. При  $\Lambda \rightarrow \infty$  и произвольных  $m^2 > 0$  величина  $S\{\varphi_c\}$  стремится к инстантонному действию безмассовой теории и положение сингулярностей не зависит от  $m$ .<sup>10</sup>

Уравнения ренормгруппы (в форме Каллана–Симанчика) справедливы для вершин  $\Gamma^{L,N}$  с  $N$  свободными концами и  $L$  замыканиями двух линий [50]:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda^2} + \beta(g_0) \frac{\partial}{\partial g_0} + \left( L - \frac{N}{2} \right) \eta(g_0) - L\eta_2(g_0) \right] \Gamma^{L,N}(g_0, \Lambda) = 0 \quad . \quad (49)$$

Выписывая три таких уравнения с разными  $L$  и  $N$ , можно выразить скейлинговые функции  $\beta(g_0)$ ,  $\eta(g_0)$ ,  $\eta_2(g_0)$  через вершины  $\Gamma^{L,N}(g_0, \Lambda)$  с помощью алгебраических операций и операций дифференцирования, не сдвигающих положение особенностей в борелевской плоскости. В пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$ , когда справедливо уравнение (49), зависимость скейлинговых функций от  $\Lambda$  исчезает [50] и их сингулярности в борелевской плоскости соответствуют безмассовой теории.

Функция Гелл-Манна – Лоу  $\beta(g_0)$  определяет связь перенормированного заряда  $g$  с затравочным  $g_0$ . Пусть функции  $F_0$  и  $F_1$  таковы, что  $F_0(g_0) \equiv F_1(g)$ ; связь соответствующих борелевских образов  $B_0$  и  $B_1$  (в смысле определения (10)) легко найти для бесконечно малого преобразования зарядов,  $g_0 = g + 2\beta(g)\delta\Lambda/\Lambda$  (см. (25)):

$$B_1(z) = B_0(z) + \frac{2\delta\Lambda}{\Lambda} \int_0^z dy [B_0(y) + yB_0'(y)] B_\beta(z-y) \quad , \quad (50)$$

где  $B_\beta(z)$  - борелевский образ функции  $\beta(g)/g$ . Уравнение (50) аналогично уравнению (43) и, следовательно, аналитические свойства не меняются при преобразовании зарядов.

Вершины  $\Gamma^{L,N}$  расходятся при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , но становятся конечными после выделения из них расходящихся  $Z$ -факторов и перехода от затравочного заряда к перенормированному. Поскольку  $Z$ -факторы в свою очередь выражаются через  $\Gamma^{L,N}$  [50], то перенормированные вершины имеют требуемые аналитические свойства.

Зависимость скейлинговых функций от ренормировочной схемы определяется формулами пересчета [51]:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(q(g)) &= \beta(g) \frac{dq(g)}{dg} \quad , \\ \tilde{\eta}(q(g)) &= \eta(g) - \beta(g) \frac{d \ln p(g)}{dg} \quad , \\ \tilde{\eta}_2(q(g)) &= \eta_2(g) - \beta(g) \frac{d \ln p_2(g)}{dg} \quad . \end{aligned} \quad (51)$$

<sup>10</sup>Для размерностей пространства  $2 \leq d < 4$  влияние параметра  $\Lambda$  на свойства инстантона несущественно и роль перенормировок сводится к тому, что в уравнение инстантона входит перенормированная масса [36]; зависимость  $S\{\varphi_c\}$  от  $m$  в этом случае сохраняется.

Входящие в них пересчетные функции  $q(g)$ ,  $p(g)$  и  $p_2(g)$  для стандартных ренормировочных схем (обрезания, вычитания и пр.) выражаются через вершины  $\Gamma^{L,N}$ , так что аналитические свойства скейлинговых функций во всех схемах одинаковы. В общем случае аналитические свойства пересчетных функций требуют дополнительного исследования.

## 4. Заключение

Результаты разд. 3 исключают существование ренормалонных сингулярностей в теории  $\varphi^4$ . Если считать убедительными соображения разд. 2 о связи с полюсом Ландау, то теория  $\varphi^4$  *не может быть* внутренне противоречивой. К тому же выводу можно прийти, исходя из твердотельных приложений: к теории  $\varphi^4$  математически точно сводится разумная модель неупорядоченной системы [36, 39] и внутренняя противоречивость  $\varphi^4$  означала бы принципиальную невозможность получить математическое описание этой модели. Поэтому становится актуальной ревизия результатов работ [34, 35], в которых указания на внутреннюю противоречивость теории  $\varphi^4$  получены на основе приближенного восстановления функции Гелл-Манна – Лоу.

Результаты разд. 3 относятся только к теории  $\varphi^4$  и не могут быть прямо перенесены на другие теории поля; однако, вместе с качественными соображениями разд. 2 они демонстрируют несостоятельность концепции ренормалонов в целом. Поэтому было бы актуально обобщить метод доказательства, использованный в разд. 3, на другие случаи.

В квантовой хромодинамике ренормалонное направление является в настоящее время господствующим [20]–[30]. Однако, специфика КХД в данном контексте никогда не подчеркивалась: так т’Хоофт [15], говоря о КХД, дает пояснения на примере теории  $\varphi^4$ , а в последних работах возник термин "наивная неабелизация" [26, 30], суть которого как раз и состоит в пренебрежении спецификой КХД. Впрочем, в КХД есть специальная причина дл веры в ренормалоны, имеющая чисто феноменологический характер. Путем обработки экспериментальных данных можно установить, что вклад высших порядков имеет зависимость от импульса  $1/q^4$  [22]: ее легко получить из ренормалонных графиков, но, как принято считать, невозможно — в рамках инстантонного метода. Последнее основано на результатах работ [10, 11], согласно которым инстантонный вклад пропорционален  $1/q^{18}$ . Однако, легко убедиться, что вклад  $\sim 1/q^4$  в работах [10, 11] возникал, но содержал расходимости, которые авторы затруднились устранить<sup>11</sup>: поэтому соответствующий член был "отправлен" в ренормалонный сектор с мотивацией, что "он дает вклад скорее в ренормалонную сингулярность, чем в инстантонную" [10, р. 287]. Если никаких ренормалонных сингулярностей нет, то этот вклад был просто выброшен; следовательно, никакого реального вычисления асимптотики Липатова для КХД в настоящее время нет.

<sup>11</sup>Такие расходимости возникают и в теории  $\varphi^4$ : процедура их устранения известна [36].

Работа стимулирована продолжительными дискуссиями с П. Г. Сильвестровым, которому автор признателен за оппонирование на стороне ренормалонов, критические замечания и общую помощь в ознакомлении с ситуацией. Автор благодарит Б. Л. Иоффе и участников семинаров в ИФП и ФИАН за интерес к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант N 580) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-19527).

### *Приложение.* Построение интерполяционного полинома

Полином степени  $N$ , совпадающий с функцией  $f(x)$  в точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ , определяется формулой Лагранжа [53]:

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{f(x_k)}{\psi'(x_k)} \frac{\psi(x)}{(x - x_k)} \quad , \quad (\text{A.1})$$

$$\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) \quad , \quad (\text{A.2})$$

а ошибка интерполяции дается выражением

$$R_N(x) = f(x) - P_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \psi(x) \quad , \quad (\text{A.3})$$

где  $\xi$  принадлежит интервалу  $(x_0, x_N)$ .

Интересующая нас функция (18) при  $n \lesssim N$  ведет себя как  $q^n$  с медленно меняющимся  $q$ , так что  $\ln q \sim \ln N$ ; пренебрегая этими медленными изменениями и опуская в (16) и (18) общий множитель, имеем

$$f(x) = q^x \quad , \quad A_N \sim \frac{1}{6^N N^3} \quad . \quad (\text{A.4})$$

Учитывая, что на интервале  $0 \leq x \leq \Delta$  функция  $|\psi(x)| \leq \Delta^{N+1}$ , получим

$$|R_N(x)| \leq \frac{(\ln q)^{N+1} q^\Delta}{(N+1)!} \Delta^{N+1} \quad (\text{A.5})$$

и ошибка интерполяции мала при

$$\Delta \lesssim N / \ln N \quad . \quad (\text{A.6})$$

Для исследования зависимости коэффициента  $A_N$  от расположения точек  $x_k$  положим  $\psi(x) = \text{Re} \psi(x + i0)$  и вычисляя  $\ln \psi(x + i0)$  с помощью формулы Эйлера–Маклорена, получим для  $\psi(x)$  представление

$$\psi(x) = F(x) \sin G(x) \quad . \quad (\text{A.8})$$



В частности, для степенного расположения точек

$$x_k = (k/N)^\alpha \Delta \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (\text{A.9})$$

имеем при  $\alpha \gg 1$ :

$$F(x) = (-1)^N \sqrt{x(\Delta - x)} \exp \left\{ N \left[ \alpha (x/\Delta)^{1/\alpha} + \ln \Delta - \alpha \right] \right\} \quad , \quad G(x) = \pi N (x/\Delta)^{1/\alpha} \quad . \quad (\text{A.10})$$

Для старшего коэффициента полинома (A.1) получим

$$A_N = \sum_{k=0}^N \frac{f(x_k)}{\psi'(x_k)} \sim \exp\{(\alpha - \ln \Delta)N\} \quad (\text{A.11})$$

(сумма определяется членом с  $k = 1$ ) и при  $\alpha \sim \ln N$  в зависимости от соотношения  $\alpha$  и  $\ln \Delta$  коэффициент  $A_N$  может быть факториально малым или факториально большим, так что требуемое значение (A.4) попадает в область изменения. Таким образом, требуемый полином (16) существует в интервале  $0 \leq n \leq n_0$ , где  $n_0 \sim N/\ln N$ .

## Список литературы

- [1] Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
- [2] E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D **15**, 1544 (1977).
- [3] C. Itzykson, G. Parisi, J. B. Zuber, Phys. Rev. Lett. **38**, 306 (1977).
- [4] А. П. Бухвостов, Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **73**, 1658 (1977).
- [5] E. B. Bogomolny, V. A. Fateyev, Phys. Lett. B **71**, 93 (1977); L. N. Lipatov, A. P. Bukhvostov, E. I. Malkov, Phys. Rev. D **19**, 2974 (1979).
- [6] G. Parisi, Phys. Lett. B **66**, 382 (1977).
- [7] Large order behavior of perturbation theory, ed. by J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, Amsterdam, 1990.
- [8] C. Itzykson, G. Parisi, J. B. Zuber, Phys. Rev. D **16**, 996 (1977); R. Balian, C. Itzykson, G. Parisi, J. B. Zuber, Phys. Rev. D **17**, 1041 (1978).
- [9] E. B. Bogomolny, V. A. Fateyev, Phys. Lett. B **76**, 210 (1978).
- [10] I. I. Balitsky, Phys. Lett. B **273**, 282 (1991).
- [11] S. V. Faleev, P. G. Silvestrov, Nucl. Phys. B **463**, 489 (1996).
- [12] B. Lautrup, Phys. Lett. B **69**, 109 (1977).

- [13] S. Chadha, P. Olesen, Phys. Lett. B **72**, 87 (1977).
- [14] P. Olesen, Phys. Lett. B **73**, 327 (1977).
- [15] G. t'Hooft, in: The whys of subnuclear physics (Erice, 1977), ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, 1979.
- [16] G. Parisi, Phys. Lett. B **76**, 65 (1978); Nucl. Phys. B **150**, 163 (1979).
- [17] G. Parisi, Phys. Rep. **49**, 215 (1979).
- [18] F. David, Nucl. Phys. B **209**, 433 (1982); **234**, 237 (1984); **263**, 637 (1986).
- [19] M. C. Bergere, F. David, Phys. Lett. B **135**, 412 (1984).
- [20] A. H. Mueller, Nucl. Phys. B **250**, 327 (1985).
- [21] G. B. West, Phys. Rev. Lett. **67**, 1388 (1991).
- [22] V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **385**, 452 (1992).
- [23] L. S. Brown, L. J. Yaffe, Phys. Rev. D **45**, R398 (1992); L. S. Brown, L. J. Yaffe, C. Zhai, Phys. Rev. D **46**, 4712 (1992).
- [24] G. Grunberg, Phys. Lett. B **304**, 183 (1993).
- [25] A. H. Mueller, Phys. Lett. B **308**, 355 (1993).
- [26] M. Beneke et al, Phys. Lett. B **307**, 154 (1993); **348**, 613 (1995); Nucl. Phys. B **452**, 563 (1995); **472**, 529 (1996); Phys. Rev. D **52**, 3929 (1995).
- [27] D. J. Broadhurst, Z. Phys. C **58**, 339 (1993).
- [28] A. I. Vainstein, V. I. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **73**, 1207 (1994); Phys. Rev. D **54**, 4039 (1996).
- [29] C. N. Lovett-Turner, C. V. Maxwell, Nucl. Phys. B **432**, 147 (1994).
- [30] S. V. Faleev, P. G. Silvestrov, Nucl. Phys. B **507**, 379 (1997).
- [31] И. Харди, Расходящиеся ряды, Москва, ИИЛ, 1951.
- [32] Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, Лекции по теории функций комплексного переменного, Москва, Наука (1976).
- [33] В. С. Попов, В. Л. Елецкий, А. В. Турбинер, ЖЭТФ **74**, 445 (1978).
- [34] Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков, ТМФ **38**, 15 (1979).
- [35] Ю. А. Кубышин, ТМФ **58**, 137 (1984).

- [36] И. М. Суслов, УФН **168**, 503 (1998).
- [37] G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev, A. Migdal, Phys. Rev. E **54**, 4896 (1996).
- [38] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, Phys. Rev. Lett. **39**, 95 (1977); Phys. Rev. B **21**, 3976 (1980).
- [39] М. В. Садовский, УФН **133**, 223 (1981).
- [40] G. t'Hooft, Phys. Rev. D **14**, 3433 (1976).
- [41] Y. Frishman, Phys. Rev. D **19**, 540 (1979).
- [42] I. Affleck, Nucl. Phys. B **191**, 429 (1981).
- [43] И. М. Суслов, ЖЭТФ **111**, 220 (1997).
- [44] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН СССР **95**, 497, 773, 1177 (1954).
- [45] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Квантовая электродинамика, Наука, Москва (1980).
- [46] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Наука, Москва (1976).
- [47] Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН СССР **102**, 489 (1955).
- [48] И. Т. Дятлов, В. В. Судаков, К. А. Тер-Мартirosян, ЖЭТФ **32**, 767 (1957).
- [49] V. G. Makhankov, Phys. Lett. A **61**, 431 (1977).
- [50] E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, in: Phase Transitions and Critical Phenomena, ed. by C. Domb and M. S. Green, Academic, New York (1976), Vol. VI.
- [51] А. А. Владимиров, Д. В. Ширков, УФН **129**, 407 (1979).
- [52] И. М. Суслов, ЖЭТФ **105**, 560 (1994).
- [53] А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Наука, Москва (1967).