

П И С Ь М А
В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД

ТОМ 71, ВЫПУСК 6
25 МАРТА, 2000

Письма в ЖЭТФ, том 71, вып.6, стр.315 - 321

© 2000г. 25 марта

О ФУНКЦИИ ГЕЛЛ-МАННА – ЛОУ ТЕОРИИ φ^4

И.М.Суслов¹⁾

Институт физических проблем им.Капицы РАН
117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 ноября 1999 г.

После переработки 2 февраля 2000 г.

Предложен алгоритм определения асимптотики суммы ряда теории возмущений в пределе сильной связи по заданным значениям его коэффициентов. Применение алгоритма к теории φ^4 дает для ее функции Гелл-Манна – Лоу поведение $\beta(g) \propto g^\alpha$ с $\alpha \approx 1$ в пределе больших g .

PACS: 11.10.-z

Многие задачи теоретической физики требуют продвижения в область сильной связи. Наиболее известные из них связаны с зависимостью эффективной константы взаимодействия g от масштаба расстояний L : таковы проблема электродинамики на сверхмалых расстояниях и проблема конфайнмента. Зависимость g от L в перенормируемых теориях определяется уравнением

$$-dg/d \ln L = \beta(g) \quad (1)$$

и в общем случае требует информации о функции Гелл-Манна – Лоу $\beta(g)$ при произвольных g [1]. На протяжении многих лет проблема восстановления β -функции казалась совершенно безнадежной, так как единственным источником информации о ней была теория возмущений, позволяющая вычислить несколько первых членов разложения:

$$\beta(g) = \sum_{N=0}^{\infty} \beta_N (-g)^N = \beta_2 g^2 - \beta_3 g^3 + \dots + \beta_N (-g)^N + \dots, \quad \beta_0 = \beta_1 = 0. \quad (2)$$

Появление метода Липатова [2] дало возможность вычисления асимптотики β_N при больших N , которая для большинства задач оказалась факториальной:

$$\beta_N^{as} = ca^N \Gamma(N+b) \approx ca^N N^{b-1} N! \quad (3)$$

¹⁾ e-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Сшивка асимптотики Липатова (3) со значениями первых коэффициентов β_N дает информацию обо всех членах ряда и позволяет приближенно восстановить β -функцию; однако это требует специальной процедуры суммирования расходящихся рядов [3]. Попытка реализации этой программы привела группу Ширкова [4] к выводу, что в теории φ^4 с действием

$$S\{\varphi\} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{16\pi^2}{4!}g\varphi^4 \right\} \quad (4)$$

функция Гелл-Манна – Лоу ведет себя при больших g как $0.9g^2$, что лишь коэффициентом отличается от однопетлевого результата $1.5g^2$, справедливого при $g \rightarrow 0$; близкое поведение $\beta(g)$ получено Кубышиным [5]. Если этот результат является правильным²⁾, то теория φ^4 является внутренне противоречивой. Этот вывод выглядит странным с точки зрения твердотельных приложений: к теории φ^4 математически точно сводится разумная модель неупорядоченной системы [7, 8], хорошо определенная в континуальном пределе. Другой аргумент следует из недавней работы автора [9]: доказанное в ней отсутствие ренормальных сингулярностей в теории φ^4 можно интерпретировать как свидетельство ее внутренней непротиворечивости.

Настоящая работа имеет целью ревизию указанных результатов [4, 5]. Мы будем исходить из той же информации, которая использовалась в работе [5], то есть значений первых четырех коэффициентов разложения β -функции [6, 10]:

$$\beta(g) = \frac{3}{2}g^2 - \frac{17}{6}g^3 + \frac{154.14}{8}g^4 - \frac{2338}{16}g^5 + \dots \quad (5)$$

и асимптотики Липатова с учетом первой поправки к ней, вычисленной в [11]:

$$\beta_N = \frac{1.096}{16\pi^2} N^{7/2} N! \left\{ 1 - \frac{4.7}{N} + \dots \right\}. \quad (6)$$

Методические отличия от [4, 5] состоят в использовании прямой связи асимптотики $\beta(g)$ с коэффициентами разложения и в явном проведении интерполяции.

1. Поставим задачу о восстановлении асимптотики β -функции

$$\beta(g) = \beta_\infty g^\alpha, \quad g \rightarrow \infty \quad (7)$$

по коэффициентам β_N ряда (2), которые растут по факториальному закону (3) и предполагаются заданными численно. Как при введении критических индексов в теории фазовых переходов, имеется в виду, что медленные (логарифмические) поправки к закону (7) являются превышением точности.

Понимая сумму ряда (2) в борелевском смысле, будем пользоваться модифицированным определением борелевского образа $B(g)$:

$$\beta(g) = \int_0^\infty dx e^{-x} x^{b_0-1} B(gx), \quad B(g) = \sum_{N=0}^\infty B_N(-g)^N, \quad B_N = \frac{\beta_N}{\Gamma(N+b_0)}, \quad (8)$$

где b_0 – произвольный параметр, который удобно использовать для оптимизации процедуры суммирования [3]. Как было предположено в [3] и недавно доказано автором [9], борелевский образ аналитичен в комплексной плоскости g с разрезом от

²⁾ Авторы [4] не настаивают на своем утверждении, а всячески подчеркивают его предварительный характер (см. также [6]).

$-1/a$ до $-\infty$. Для аналитического продолжения $B(g)$ из круга сходимости $|g| < 1/a$ на произвольные комплексные g используется конформное преобразование $g = f(u)$, отображающее плоскость с разрезом на единичный круг: тогда переразложение $B(g)$ в ряд по u

$$B(g) = \sum_{N=0}^{\infty} B_N(-g)^N \Big|_{g=f(u)} \longrightarrow B(u) = \sum_{N=0}^{\infty} U_N u^N \quad (9)$$

при любых g дает сходящийся ряд. Мы ограничимся аналитическим продолжением $B(g)$ на положительную полуось (что достаточно для проведения интегрирования в (8)) и воспользуемся модифицированным конформным преобразованием $g = (u/a)/(1-u)$, отображающим плоскость с разрезом $(-1/a, -\infty)$ на плоскость с разрезом $(1, \infty)$; при этом особенность $g = -1/a$ отодвигается на бесконечность, а особенность при $g = \infty$ становится ближайшей к началу координат и определяет асимптотику коэффициентов U_N :

$$U_N = \frac{\beta_{\infty}}{a^{\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(b_0 + \alpha)} N^{\alpha-1}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Этот результат легко получить, записывая коэффициенты разложения в виде

$$U_N = \oint_C \frac{du}{2\pi i} \frac{B(u)}{u^{N+1}} \quad (11)$$

и деформируя контур C , охватывающий точку $u = 0$, так, чтобы он проходил вокруг разреза, с учетом характера сингулярности $B(u) \sim (1-u)^{-\alpha}$ в точке $u = 1$. Переразложение ряда в (9) дает связь U_N и B_N :

$$U_0 = B_0, \quad U_N = \sum_{K=1}^N B_K \left(-\frac{1}{a}\right)^K C_{N-1}^{K-1} \quad (N \geq 1). \quad (12)$$

В результате мы приходим к простому алгоритму: вычисляя коэффициенты B_N по заданным β_N (см.(8)) и пересчитывая их в U_N согласно (12), нужно обработать U_N при больших N на степенной закон $U_N = U_{\infty} N^{\alpha-1}$, параметры которого в силу (10) определяют β_{∞} и α . Технически удобно вычислять β_{∞} , рассматривая U_{∞} как функцию b_0 и определяя наклон в линейной зависимости $U_{\infty} \propto (b_0 + \alpha)$ при малых $b_0 + \alpha$; при этом получается независимая оценка индекса α по корню функции $U_{\infty}(b_0)$.

2. В большинстве работ данного направления авторы формулировали алгоритм так, чтобы избежать упоминания о коэффициентах β_N при промежуточных значениях N . Такой подход является концептуально ошибочным: по конечному числу первых коэффициентов и их асимптотике можно построить функцию с наперед заданным поведением на бесконечности³⁾. Осмысленная постановка задачи возникает при приближенном задании *всех* β_N : тогда с некоторой точностью возможно восстановление $\beta(g)$. Поэтому необходимым этапом в решении задачи является проведение интерполяции и оценка ее точности; разумеется, это возможно лишь в предположении достаточной гладкости β_N как функции N .

³⁾ Функция от факториального ряда имеет ту же асимптотику коэффициентов (3), но с другим значением параметра s [8]; сформулированное в тексте утверждение легко доказать, беря подходящую линейную комбинацию нескольких функций.

Интерполяцию удобно проводить для приведенной коэффициентной функции

$$F_N = \frac{\beta_N}{\beta_N^{\alpha_s}} = 1 + \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{N^2} + \dots + \frac{A_K}{N^K} + \dots, \quad (13)$$

которая меняется в конечных пределах и имеет регулярное разложение по $1/N$. Обрывая ряд на конечном числе членов и подгоняя коэффициенты A_K под известные значения F_N , получим требуемую интерполяционную формулу. Она имеет точность

$$\delta F_N \sim \frac{A_{m+m_0+1}}{N^{m+m_0+1}} \frac{(N-L_0)(N-L_0-1)\dots(N-L)}{L(L-1)\dots L_0}, \quad (14)$$

если интерполяция проводилась по m известным значениям $F_{L_0}, F_{L_0+1}, \dots, F_L$ ($m = L - L_0 + 1$) при m_0 известных коэффициентах A_1, A_2, \dots, A_{m_0} . Оценка (14) основана на том, что ряд в (13) является асимптотическим [12] и погрешность аппроксимации при его обрыве оказывается порядка первого отброшенного члена, а ошибку интерполяции полинома $(m + m_0 + 1)$ -й степени полиномом $(m + m_0)$ -й степени можно вычислить точно. В рассматриваемом случае $L_0 = 2, L = 5, m_0 = 1$ и δF_N определяется коэффициентом A_6 , который можно оценить, экстраполируя найденные A_1, \dots, A_5 по факториальному закону [12].

Неоднозначность интерполяционной процедуры проявляется, в частности, в возможности различной параметризации асимптотики [4, 13], например в виде $ca^N \Gamma(N + b)$, $ca^N N^{b-1} N!$ и т. д. В инстантонных вычислениях [2] асимптотика возникает в виде $\bar{c}\bar{a}^N N^b N^N$; эта форма очень близка к параметризации Липатова $ca^N N^{b-1} N!$, получаемой из нее применением формулы Стирлинга, точность которой лучше 10% даже при $N = 1$. В этом смысле параметризация $ca^N N^{b-1} N!$ является "естественной", тогда как запись ее в других функциональных формах требует дополнительных предположений (например, $N \gg b$ для $ca^N \Gamma(N + b)$).

На рис.1а показано поведение коэффициентов $\tilde{U}_N = U_N \Gamma(b_0 + 2)$ (нормированных так, чтобы иметь конечный предел при $b_0 \rightarrow \infty$) для "естественной" параметризации $ca^N N^{b-1} N!$. При больших N имеется убедительный выход на константу (за исключением кривых для $b_0 \gg 1$ и $b_0 \approx -2$, когда имеются большие параметры, затягивающие выход на асимптотику), что соответствует значению индекса $\alpha = 1$. Зависимость U_∞ от b_0 проходит через нуль при $b_0 = -1.03$ (вставка на рис.1а), что дает вторую оценку $\alpha = 1.03$, демонстрирующую замечательную самосогласованность результатов. Определяя β_∞ по наклону кривой при $b_0 = -\alpha$, получим для асимптотики β -функции

$$\beta(g) \approx 8g \quad g \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Ситуация, возникающая при других способах интерполяции, иллюстрируется рисунком 1б, где используется параметризация $\beta_N^{\alpha_s} = ca^N \Gamma(N + b)$. Грубый выход на константу имеется, но он не столь убедителен, как в предыдущем случае. Обработка кривых в предположении $\alpha = 1$ дает зависимость U_∞ от b_0 (вставка на рис.1б), проходящую через нуль при $b_0 = -1.3$, что соответствует $\alpha = 1.3$; тем самым имеется существенная несогласованность результатов. Обработка кривых на степенную зависимость дает индекс α , несколько больший 1 (различный для разных b_0), но в этом случае U_∞ обращается в нуль при $b_0 = -0.8$ (при этом значении возрастание кривых на рис.1б сменяется убыванием), приводя к такой же несогласованности.

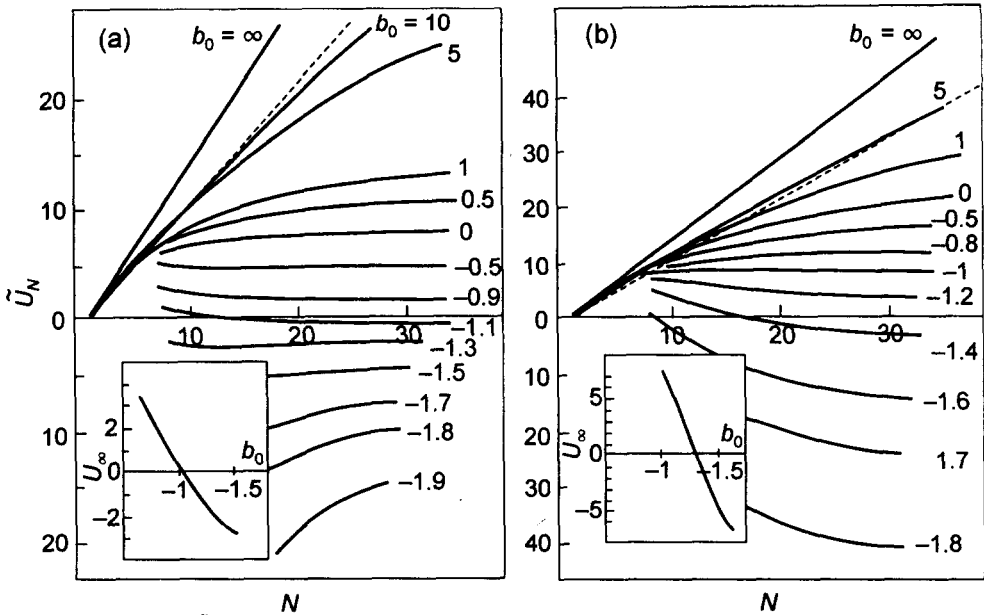


Рис.1. Зависимости $\tilde{U}_N = U_N \Gamma(b_0 + 2)$ от N при различных b_0 : а - для параметризации асимптотики в виде $\beta_N^{as} = ca^N N^{b-1} N!$; б - для $\beta_N^{as} = ca^N \Gamma(N + b)$. На вставках - зависимости U_∞ от b_0

Соответственно результат для асимптотики $\beta(g)$ получается менее определенным, $\beta(g) \approx 24g^\alpha$, $\alpha = 0.8 - 1.3$.

Параметризуя асимптотику в виде $\beta_N^{as} = ca^N N^{b-\bar{b}-1} \Gamma(N + \bar{b} + 1)$ и производя разложение F_N по обратным степеням $(N - N_0)$, получим множество реализаций интерполяционной процедуры, характеризуемое двумя параметрами \bar{b} и N_0 . В таблице приведены результаты для нескольких реализаций, для которых различие интерполяционных кривых примерно соответствует коридору ошибок для "естественной" интерполяции, оцениваемому согласно (14). С учетом неопределенностей зависимость индекса α от реализации практически отсутствует; систематические отклонения возникают лишь для некоторых "крайних" реализаций, для которых интерполяционная кривая начинает выходить за границу коридора ошибок. Реализация с $\bar{b} = 0$, $N_0 = 0$, которую мы сочли "естественной" из вычислительных соображений, выделяется максимальной степенью самосогласованности алгоритма; поэтому соответствующий ей результат (15) следует считать наиболее надежным. Для фиксированной реализации его погрешность меньше 0.05 для индекса α и 10% для β_∞ , что является оптимистической оценкой точности. Ошибка, связанная с неоднозначностью интерполяции, ясна из таблицы: она может достигать нескольких десятых по индексу α , тогда как значение β_∞ может отличаться от (15) в 2 - 3 раза.

Реализация $N_0 = 0$	β_∞	α	Реализация $\bar{b} = 0$	β_∞	α
$\bar{b} = 3.5$	24	0.8 - 1.3	$N_0 = 0.5$	5.4	1.1 - 1.6
$\bar{b} = 1.5$	14	1.0 - 1.1	$N_0 = 0.3$	16	0.8 - 1.2
$\bar{b} = 0$	8.1	1.0			
$\bar{b} = -1.5$	10	1.0 - 1.1	$N_0 = -0.3$	4.3	0.9 - 1.0
$\bar{b} = -2.5$	2.7	1.5 - 1.7	$N_0 = -0.5$	2.3	0.9 - 1.0

3. Обсудим поведение β -функции при конечных g . На рис.1 при $N < 10$ выделяется линейный участок $\dot{U}_N \approx 1.1(N - 1)$ (штриховая кривая), соответствующий зависимости $\beta(g) \approx 1.1g^2$, близкой к результату работ [4, 5]. Он устойчив относительно изменения b_0 и интерполяционной процедуры и может претендовать на роль истинной асимптотики, если считать результаты для $N > 10$ издержками интерполяции. В действительности это не так и устойчивость этого участка связана с характерным “провалом” приведенной коэффициентной функции F_N при $N \lesssim 10$ (вставка на рис.2). Если смоделировать этот провал, полагая $F_3 = F_4 = \dots = F_{10} = 0$, то при $N \leq 10$ для всех b_0 получается результат $\dot{U}_N = 1.5(N - 1)$, определяемый первым неисчезающим коэффициентом F_2 (см. кривую для $b_0 = \infty$): это близко к реальной ситуации⁴⁾. Для функции $\beta(g)$ такое моделирование “провала” показывает, что однопетлевой закон $1.5g^2$ затягивается до $g \sim 10$. Более точно (см. примечание 4)), в интервале $1 \lesssim g \lesssim 10$ справедлив результат работ [4, 5], приводящий к значению $\beta(g) \approx 90$ для $g = 10$ (рис.2), которое согласуется также с [14]. Асимптотика (15) хорошо сшивается с указанным значением, что является косвенным аргументом в пользу оптимистической оценки точности.

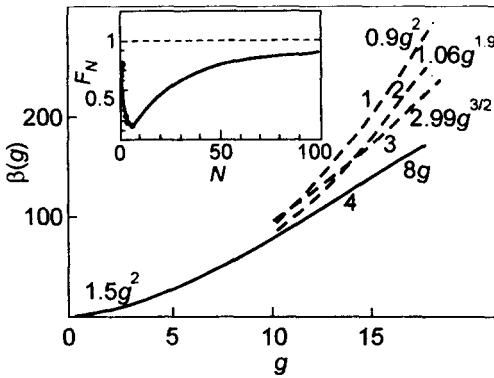


Рис.2. Качественное поведение функции Гелл-Манна – Лоу теории φ^4 ; зависимости 1, 2, 3, 4 получены соответственно в [4], [5], [14] и настоящей работе. На вставке – коэффициентная функция $F_N = \beta_N / \beta_N^{as}$ с параметризацией $\beta_N^{as} = ca^N \Gamma(N + b)$, удобной для исследования формулы (12); зависимость от способа интерполяции в этом масштабе несущественна

Хотя на основе существующей информации удается получить лишь грубую оценку функции Гелл-Манна – Лоу, можно с уверенностью утверждать, что она не имеет нуля при конечных g , а ее поведение при $g \rightarrow \infty$ совместимо с предположением о внутренней непротиворечивости теории φ^4 . Подстановка (15) в (1) приводит к зависимости $g(L) \propto L^{-\gamma}$ с $\gamma \approx 8$ при малых L , которая несколько модифицируется, если индекс α не равен 1 точно или имеется логарифмическое ветвление.

Полученные результаты позволяют понять, почему численные симуляции на решетке указывают на “тривиальность” теории φ^4 (см. [15] и ссылки там): ввиду отсутствия нуля у β -функции взаимодействие $g(L)$ всегда падает с расстоянием, а ввиду затянутости однопетлевого закона поведение неотлично от тривиального в широкой области параметров (для $g \lesssim 300$ при наиболее популярном определении заряда, когда член со взаимодействием в (4) имеет вид $g\varphi^4/4$).

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант #96-0580) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант #02-17129).

⁴⁾ Если положить $F_3 = F_4 = \dots = F_{10} = \epsilon$, то для $b_0 = b - p$ с целым p из (12) следует линейная зависимость с наклоном $1.5(1 - \epsilon/F_2)$ на интервале $p + 2 \leq N \leq 10$. Для $\epsilon = 0.2$ (см. рис.2) получается правильный наклон 1.1 и слабая зависимость от b_0 на интервале $-1 < b_0 < 10$.

-
1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, М.: Наука, 1976.
 2. Л.Н.Липатов, *ЖЭТФ* **72**, 411 (1977).
 3. J.C.Le Guillou and J.Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 95 (1977); *Phys. Rev.* **B21**, 3976 (1980).
 4. Д.И.Казаков, О.В.Тарасов, Д.В.Ширков, *ТМФ* **38**, 15 (1979).
 5. Ю.А.Кубышин, *ТМФ* **58**, 137 (1984).
 6. А.А.Владимиров, Д.В.Ширков, *УФН* **129**, 407 (1979).
 7. М.В.Садовский, *УФН* **133**, 223 (1981).
 8. И.М.Суслов, *УФН* **168**, 503 (1998).
 9. И.М.Суслов, *ЖЭТФ* **116**, 369 (1999).
 10. Ф.М.Диттес, Ю.А.Кубышин, О.В.Тарасов, *ТМФ* **37**, 66 (1978).
 11. Ю.А.Кубышин, *ТМФ* **57**, 363 (1983).
 12. И.М.Суслов, *ЖЭТФ* **117**, в печати.
 13. В.С.Попов, В.Л.Елецкий, А.В.Турбинер, *ЖЭТФ* **74**, 445 (1978).
 14. A.N.Sissakian, I.L.Solovtsov, and O.P.Solovtsova, *Phys. Lett.* **B321**, 381 (1994).
 15. A.Agodi, G.Andronico, P.Cea et al., *Mod. Phys. Lett.* **A12**, 1011 (1997); hep-ph/9702407.