ЖЭТФ, 2000, том 117, вып. 4, стр. 659–667

СТРУКТУРА ВЫСШИХ ПОПРАВОК К АСИМПТОТИКЕ ЛИПАТОВА

*И. М. Суслов**

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 ноября 1999 г.

Высокие порядки теории возмущений могут вычисляться методом Липатова, согласно которому они определяются перевальными конфигурациями — инстантонами — соответствующих функциональных интегралов. Для большинства теорий поля асимптотика Липатова имеет функциональную форму $c\,a^N\Gamma(N+b)$ (N — порядок теории возмущений), а относительные поправки к ней имеют вид ряда по степеням $1/N$. Показано, что этот ряд факториально расходится, а его далекие коэффициенты могут быть вычислены в рамках процедуры, аналогичной липатовской: K-й коэффициент разложения имеет вид const $\cdot\,(\ln(S_1/S_0))^{-K}\,\Gamma(K+(r_1-r_0)/2)$, где S_0 и S_1 — значения действия для первого и второго инстантонов рассматриваемой теории поля, а r_0 и r_1 — соответствующее им число нулевых мод; инстантоны удовлетворяют тому же уравнению, что и в методе Липатова, и предполагаются перенумерованными в порядке возрастания соответствующего им действия. Этот результат имеет универсальный характер и справедлив в любой теории поля, для которой асимптотика Липатова имеет указанный выше вид.

PACS: 74.50.+r; 74.60.Ge; 74.25.Fy; 74.72.Hs

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе Липатова [1] предложен общий метод вычисления высоких порядков теории возмущений, согласно которому они определяются перевальными конфигурациями — инстантонами — соответствующих функциональных интегралов. При своем появлении метод Липатова вызвал большой резонанс (см. сборник статей [2]), но в дальнейшем был подвергнут сомнению в связи с возможным существованием дополнительных ренормалонных вкладов [3]. В недавней работе автора [4] дано подробное обсуждение существующей аргументации в пользу ренормалонов и показана ее несостоятельность как в общефилософском, так и в математическом смысле: это устраняет препятствия для применения метода Липатова к широкому кругу задач теоретической физики.

Метод Липатова может быть использован для исследования любых величин [5], но исходным моментом является его применение к функциональным интегралам вида

$$I(g) = \int D\varphi\,\varphi^{(1)}\dots\varphi^{(M)}\times \exp\Big(-S_0\{\varphi\} - gS_{int}\{\varphi\}\Big), \qquad (1)$$

где $\varphi^{(1)},\dots,\varphi^{(M)}$ — некоторая выборка $\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_M}$ из множества переменных интегрирования φ_i, входящих в символ $D\varphi$. Коэффициенты разложения I_N интеграла (1) по константе связи g определяются интегралом Коши,

$$I_N = \oint_C \frac{dg}{2\pi i}\,\frac{I(g)}{g^{N+1}}, \qquad (2)$$

в котором при больших N может быть использован метод перевала. Функциональная форма асимптотики Липатова имеет вид

$$I_N = c\,a^N\Gamma(N+b), \quad N\to\infty, \qquad (3)$$

а относительные поправки к ней имеют вид регулярного разложения по $1/N$:

$$I_N = ca^N\Gamma(N+b)\times \left\{1+\frac{A_1}{N}+\frac{A_2}{N^2}+\dots+\frac{A_K}{N^K}+\dots\right\}. \qquad (4)$$

*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Вычисление поправок к асимптотике дает существенную информацию о коэффициентах разложения и является альтернативой к прямым диаграммным вычислениям низших порядков: вместо вычисления, например, четвертого или пятого порядка [6, 7] более экономичным может оказаться вычисление A_1 или A_2. В настоящее время первые поправки к асимптотике вычислены лишь в теории φ^4 [8] и в нескольких квантовомеханических задачах [9, 10].

В настоящей работе изучается поведение коэффициентов A_K при больших K. Теоретически этот вопрос совершенно не исследован, и единственная доступная информация получена численными методами: для ряда теории возмущений в задаче об ангармоническом осцилляторе Бендер и Ву [9] нашли первые 10 коэффициентов A_K:

$$\begin{aligned} &A_1 = -1.3194444, && A_6 = -2808.09, \\ &A_2 = -1.9385609, && A_7 = -2.995 \cdot 10^4, \\ &A_3 = -7.0142876, && A_8 = -3.65 \cdot 10^5, \\ &A_4 = -40.118943, && A_9 = -4.4 \cdot 10^6, \\ &A_5 = -305.5223, && A_{10} = -1 \cdot 10^8. \end{aligned} \tag{5}$$

Быстрый рост этих коэффициентов указывает на расходимость ряда в (4).

Другой пример, который может быть легко исследован, — это нуль-мерный предел теории φ^4. В этом случае функциональный интеграл фактически сводится к однократному,

$$I(g) = \int_0^\infty d\varphi\, \varphi^M \exp\left(-\varphi^2 - g\varphi^4\right), \tag{6}$$

и его коэффициенты разложения вычисляются в явном виде:

$$I_N = \frac{2^{M/2}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(N+\dfrac{M+3}{4}\right)\Gamma\left(N+\dfrac{M+1}{4}\right)}{\Gamma(N+1)} (-4)^N. \tag{7}$$

Выделяя асимптотику при $N \to \infty$ и представляя результат в виде (4), получим для коэффициентов A_K при $K \to \infty$ (см. Приложение) результат

$$A_K = \operatorname{Re} \frac{2\left(1+e^{\pi i M}\right)}{(2\pi i)^{K+1}} \Gamma(K), \tag{8}$$

по функциональной форме аналогичный асимптотике Липатова (3), но с комплексными параметрами a и c.

В настоящей работе будет показано, что факториальная расходимость ряда в (4) имеет место и в общем случае, причем для асимптотики A_K удается получить универсальный результат (см. формулу (47)), справедливый для любой теории поля с асимптотикой Липатова вида (3).

2. ПРОСТОЙ ПРИМЕР И КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА

Качественные моменты, возникающие при вычислении асимптотики A_K, удобно продемонстрировать на примере вычисления поправок к формуле Стирлинга:

$$\Gamma(N+1) = \sqrt{2\pi N} e^{-N} N^N \times \left\{1+\frac{A_1}{N}+\frac{A_2}{N^2}+\ldots+\frac{A_K}{N^K}+\ldots\right\}. \tag{9}$$

Результат хорошо известен для прологарифмированной формы выражения (9): в этом случае удается найти общий член ряда, называемого рядом Стирлинга [11]. Вычисляя экспоненту от ряда Стирлинга с помощью алгебры факториальных рядов [5], легко найти асимптотику A_K:

$$A_K = -\operatorname{Re} \frac{2\Gamma(K)}{(2\pi i)^{K+1}}, \quad K \to \infty. \tag{10}$$

Покажем, как получается этот результат в рамках используемого ниже метода.

Пользуясь определением гамма-функции и делая замены $x \to Nx$ и $t = \ln x$, имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(N+1) &= \int_0^\infty dx\, x^N e^{-x} = N e^{-N} N^N \times \\ &\times \int_0^\infty dx\, \exp\{-N[x-1-\ln x]\} = \\ &= N e^{-N} N^N \int_{-\infty}^\infty dt\, e^t \exp\left\{-N\left[e^t-1-t\right]\right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

При больших N условие перевала имеет вид $e^t - 1 = 0$, так что имеется множество перевальных точек $t_s = 2\pi i s$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, лежащих на мнимой оси (рис. 1*a*). Контур интегрирования в (11) проходит через перевальную точку $t = 0$ и удовлетворяет всем условиям применимости метода перевала [12]; поэтому его деформации не требуется и на другие перевальные точки можно не обращать внимания. Вычисление интеграла в перевальном приближении дает формулу Стирлинга.

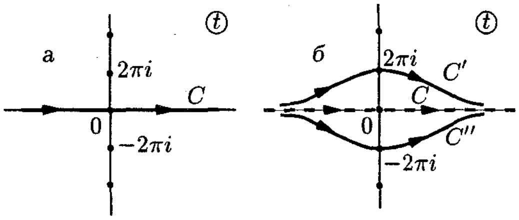

Рис. 1. *а*) Перевальные точки и контур интегрирования в интеграле (11). *б*) При вычислении асимптотики A_K требуется деформация контура, так как точка $t = 0$ соответствует не перевалу, а сингулярности

Формально выделяя асимптотику, положим тождественно

$$\Gamma(N+1) = \sqrt{2\pi N} e^{-N} N^N F(1/N) \tag{12}$$

и, делая замену

$$\epsilon = 1/N, \tag{13}$$

для введенной нами функции $F(\epsilon)$ имеем

$$F(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^t \exp\left\{-\frac{e^t - 1 - t}{\epsilon}\right\}. \tag{14}$$

Разложение (14) в ряд по ϵ дает искомые коэффициенты A_K, которые вычисляются аналогично (2):

$$A_{K-1} = \oint_C \frac{d\epsilon}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^t \exp\left\{-\frac{e^t - 1 - t}{\epsilon} - K \ln \epsilon\right\}. \tag{15}$$

Это — точное выражение, которое при больших K можно вычислять в перевальном приближении. Условия перевала приводят к множеству решений

$$t_s = 2\pi i s, \quad \epsilon_s = -\frac{t_s}{K}, \quad s - \text{целое}, \tag{16}$$

так что в комплексной плоскости t перевальные точки формально оказываются теми же самыми, что и при вычислении главной асимптотики. Однако для значения подынтегральной функции в s-й перевальной точке легко получить оценку

$$\sim \exp\{-K - K \ln \epsilon_s\} \sim t_s^{-K} K!, \tag{17}$$

из которой ясно, что решение с $s = 0$ в действительности соответствует не перевалу, а сингулярности[1)].

[1)] Решения (16) выписаны в предположении $\epsilon \neq 0$, которое нарушается для $s = 0$. Аналогичное замечание нужно сделать в отношении нижеследующей формулы (38).

Поэтому контур интегрирования по t не может проходить через точку $t = 0$, а должен быть деформирован и проведен через одну из соседних перевальных точек, $2\pi i$ или $-2\pi i$ (рис. 1*б*), что в силу (17) и дает требуемую асимптотику $A_K \sim (2\pi)^{-K} K!$ (см. (10))[2)].

Аналогичная ситуация имеет место и в общем случае. При вычислении коэффициентов A_K в перевальном приближении уравнение инстантона оказывается таким же, как при вычислении асимптотики Липатова. Однако использование того же решения, что и в последнем случае, приводит (за счет дополнительного интегрирования по ϵ) не к перевалу, а к сингулярности. Поэтому возникает необходимость рассмотрения других решений инстантонного уравнения, которые могут быть пронумерованы в порядке возрастания соответствующего им действия. Если асимптотика Липатова определяется первым инстантоном — с наименьшим действием, — то главный вклад в асимптотику A_K дает второй инстантон.

3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Вычисление асимптотики Липатова (3) оказывается достаточно громоздким, если ставить целью нахождение всех ее параметров a, b, c. Если же ограничиться определением только параметров a и b, то возможны простые структурные вычисления, сводящиеся к формальному разложению вблизи перевала и выделению зависимости от N. Мы продемонстрируем такие вычисления на примере теории φ^4; фактически, однако, явный вид действия нам не потребуется, а будут использоваться лишь характерные для него свойства однородности

$$S_0(\lambda\varphi) = \lambda^2 S_0(\varphi), \quad S_{int}(\lambda\varphi) = \lambda^4 S_{int}(\varphi). \tag{18}$$

Аналогичные свойства однородности имеют место в других теориях поля, и с небольшими модификациями излагаемая ниже схема сохраняется в общем случае.

Согласно (1), (2) коэффициенты разложения даются формулой

[2)] Фактически контур интегрирования по ϵ в (15) удобно провести чуть правее мнимой оси, огибая левую полуплоскость по бесконечно удаленному контуру; при этом для $\operatorname{Im}\epsilon < 0$ контур интегрирования по t смещается вверх и проводится через точку $2\pi i$, тогда как для $\operatorname{Im}\epsilon > 0$ он смещается вниз и проводится через точку $-2\pi i$.

$$I_{N-1} = \oint\limits_C \frac{dg}{2\pi i} \int D\varphi\, \varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(M)} \times \\ \times \exp\left(-S_0\{\varphi\} - gS_{int}\{\varphi\} - N\ln g\right). \qquad (19)$$

Введем в рассмотрение новую переменную

$$\phi = \varphi\sqrt{g} \qquad (20)$$

и положим

$$S\{\phi\} = S_0\{\phi\} + S_{int}\{\phi\}. \qquad (21)$$

В терминах переменной ϕ условия перевала имеют вид

$$S'\{\phi_c\} = 0, \quad g_c = \frac{S\{\phi_c\}}{N}, \qquad (22)$$

а разложение выражения в экспоненте (19) до квадратичных членов по $\delta\phi = \phi - \phi_c$ и $\delta g = g - g_c$ дает

$$-N - N\ln g_c - \frac{N}{2}\frac{(\delta\phi, S''\{\phi_c\}\delta\phi)}{S\{\phi_c\}} - \frac{N}{2g_c^2}(\delta g)^2. \quad (23)$$

Мы используем символическую запись, обозначая одним и двумя штрихами первую и вторую функциональные производные и понимая их соответственно как вектор и линейный оператор; переменные интегрирования φ_i, входящие в символ $D\varphi$, понимаются как компоненты вектора φ. Учитывая, что в силу (20)

$$\delta\phi = \sqrt{g_c}\left(\delta\varphi + \frac{\delta g}{2g_c}\varphi_c\right), \quad \delta\varphi = \varphi - \varphi_c, \qquad (24)$$

и сдвигая начало отсчета $\delta\varphi$, имеем

$$I_{N-1} = e^{-N} g_c^{-N+1-M/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \int D\varphi\, \phi_c^{(1)} \ldots \phi_c^{(M)} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\delta\varphi, S''\{\phi_c\}\delta\varphi) + \frac{N}{2}t^2\right), \qquad (25)$$

где мы положили $\delta g = i g_c t$.

Сделаем линейную замену $\delta\varphi \to \hat{S}\delta\varphi$ с $\det\hat{S} = 1$, диагонализующую матрицу оператора $S''\{\phi_c\}$, и положим

$$D\varphi = D'\varphi \prod_{i=1}^{r} d\tilde{\varphi}_i, \qquad (26)$$

где мы выделили r переменных интегрирования (отмечаемых тильдой), которые соответствуют нулевым собственным значениям оператора $S''\{\phi_c\}$ и фактически не входят в экспоненту (25). Для корректного интегрирования по нулевым модам под интеграл (25) вводится разложение единицы

$$1 = \prod_{i=1}^{r} \int d\lambda_i \delta\left(\lambda_i - f_i\{\varphi\}\right), \qquad (27)$$

где λ_i — коллективные переменные. Примером такой переменной является центр инстантона x_0, определяемый как

$$\int d^d x |\varphi(x)|^4 (x - x_0) = 0, \qquad (28)$$

для которого интегрирование типа (27) имеет вид

$$1 = \int d^d x_0\, \delta\left(x_0 - \frac{\int d^d x|\varphi(x)|^4 x}{\int d^d x|\varphi(x)|^4}\right). \qquad (29)$$

При введении коллективных переменных (в качестве которых могут выступать также «ориентация» инстантона, его радиус и т. д. [5]) можно ограничиться однородными функциями $f_i\{\varphi\}$ (ср. с (29)), причем степень однородности без ограничения общности можно считать равной нулю: если $f_i\{\mu\varphi\} = \mu^p f_i\{\varphi\}$, то замена $\lambda_i \to \mu^p \lambda_i$ исключает множитель μ^p из (27). Линеаризуем аргументы δ-функций в (27) вблизи перевальной конфигурации,

$$1 = \prod_{i=1}^{r} \int d\lambda_i\, \delta\left(\lambda_i - f_i\{\varphi_c\} - (f_i'\{\varphi_c\}, \delta\varphi)\right) = \\ = \prod_{i=1}^{r} \int d\lambda_i \delta\left(\lambda_i - f_i\{\phi_c\} - \sqrt{g_c}(f_i'\{\phi_c\}, \delta\varphi)\right), \qquad (30)$$

и выберем инстантон так, чтобы $\lambda_i - f_i\{\phi_c\} = 0$ (так, в (28) этому соответствует выбор решения симметричного относительно точки $x = 0$); тогда ϕ_c становится функцией λ_i. Подставляя (26), (30) в (25) и устраняя δ-функции интегрированием по $\delta\tilde{\varphi}_i$, имеем

$$I_{N-1} = e^{-N} g_c^{-N+1-(M+r)/2} \det[f'\{\phi_c\}]_P \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \int D'\varphi \int \prod_{i=1}^{r} d\lambda_i\, \phi_c^{(1)}(\lambda_i) \ldots \phi_c^{(M)}(\lambda_i) \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left[(\delta\varphi, S''\{\phi_c\}\delta\varphi) - Nt^2\right]\right), \qquad (31)$$

где $f'\{\phi_c\}$ — оператор, матрица которого составлена из столбцов $f_i'\{\phi_c\}$, а $[\ldots]_P$ — его проекция на подпространство нулевых мод. Интеграл по $D'\varphi$ и dt определяется детерминантом квадратичной формы в квадратных скобках экспоненты (31), равным $(-N)\det[S''\{\phi_c\}]_{P'}$, хотя при приведении ее к сумме квадратов следует соблюдать осторожность [13]; индексом P' отмечаем проекцию на подпространство дополнительное к подпространству нулевых мод. Проводя в (31) элементарные преобразования, получим результат вида (3), где

$$a = \frac{1}{S\{\phi_c\}}, \quad b = \frac{M+r}{2},$$

$$c = (S\{\phi_c\})^{-(M+r)/2}\,\frac{(2\pi)^{(\mathcal{N}-r-2)/2}\det[f'\{\phi_c\}]_P}{\sqrt{-\det[S''\{\phi_c\}]_{P'}}}\times$$
$$\times\int\prod_{i=1}^{r} d\lambda_i\,\phi_c^{(1)}(\lambda_i)\ldots\phi_c^{(M)}(\lambda_i), \qquad (32)$$

а $\mathcal{N}$ — число переменных интегрирования, входящих в символ $D\varphi$ (оно выпадает из ответа при переходе к отношению интегралов типа (1)).

Аналогичные структурные вычисления могут быть проведены для асимптотики коэффициентов A_K. Делая в (19) замену

$$g \to \frac{S\{\phi_c\}}{N} g \qquad (33)$$

и выделяя зависимость от N, соответствующую асимптотике (3), имеем

$$I_{N-1} = (S\{\phi_c\})^{-N+1}\exp(-N + N\ln N)\times$$
$$\times N^{(M+r-3)/2} F\left(\frac{1}{N}\right), \qquad (34)$$

где

$$F\left(\frac{1}{N}\right) = N^{-(M+r-1)/2}\oint_C \frac{dg}{2\pi i}\int D\varphi\,\varphi^{(1)}\ldots\varphi^{(M)}\times$$
$$\times\exp\left(-N\frac{S\{\phi\}}{S\{\phi_c\}g} + N - N\ln g\right)\Bigg|_{\phi=\varphi\sqrt{S\{\phi_c\}g/N}}. \qquad (35)$$

Полагая $\epsilon = 1/N$ и раскладывая $F(\epsilon)$ в ряд,

$$F(\epsilon) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1\epsilon + \tilde{A}_2\epsilon^2 + \ldots + \tilde{A}_K\epsilon^K + \ldots, \qquad (36)$$

имеем аналогично (2)

$$\tilde{A}_{K-1} = \oint_C \frac{d\epsilon}{2\pi i}\epsilon^{(M+r-1)/2}\oint_C\frac{dg}{2\pi i}\times$$
$$\times\int D\varphi\,\varphi^{(1)}\ldots\varphi^{(M)}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{\epsilon}\left[\frac{S\{\phi\}}{S\{\phi_c\}g} - 1 + \ln g\right] - \right.$$
$$\left. - K\ln\epsilon\right)\Bigg|_{\phi=\varphi\sqrt{g\epsilon S\{\phi_c\}}}. \qquad (37)$$

Коэффициенты $\tilde{A}_K$ просто связаны с искомыми коэффициентами A_K, но не совпадают с ними (см. ниже).

При больших K в (37) можно использовать метод перевала, условия которого имеют вид

$$S'\{\phi\} = 0, \quad g_c = \frac{S\{\phi\}}{S\{\phi_c\}}, \quad \epsilon_c = \frac{\ln g_c}{K}, \qquad (38)$$

а подынтегральная функция для перевальной конфигурации определяется множителем

$$\exp(-K - K\ln\epsilon_s) \sim (\ln g_c)^{-K}K! \qquad (39)$$

С учетом сделанной замены (33) первые два уравнения (38) совпадают с (22); однако использование решения

$$\phi = \phi_c, \quad g_c = 1 \qquad (40)$$

приводит в силу (39) не к перевалу, а к сингулярности. Поэтому следует искать другие решения системы первых двух уравнений (38). Для этого есть две возможности.

1. Использование других ветвей логарифма. Согласно (38), ϵ_c определяется логарифмом g_c, и потому замена $g_c \to g_c\exp(2\pi is)$ с целым s не является тождественным преобразованием: при этом $\ln g_c \to \ln g_c + 2\pi is$. Для $\phi = \phi_c$, $g_c = \exp(2\pi is)$ имеем $\epsilon_c = 2\pi is/K$, и вклад в асимптотику A_K определяется перевальными точками с $s = \pm 1$:

$$A_K \sim (2\pi)^{-K}K! \qquad (41)$$

Это в точности тот же механизм, что и при вычислении поправок к формуле Стирлинга: зависимость подынтегральной функции в (19) от g аналогична зависимости от x в (11).

2. Использование других инстантонов. Пусть ψ_c — решение уравнения $S'\{\phi\} = 0$, отличное от ϕ_c; тогда в силу (38), (39) имеем вклад в асимптотику

$$A_K \sim K!\left[\ln\frac{S\{\psi_c\}}{S\{\phi_c\}}\right]^{-K}, \qquad (42)$$

который тем больше, чем меньше $S\{\psi_c\}$. Главный вклад происходит от второго инстантона (см. конец разд. 2) и имеет нижнюю оценку

$$A_K \gtrsim (\ln 2)^{-K}K! \qquad (43)$$

Действительно, если $\phi_c(x)$ — локализованное решение уравнения $S'\{\phi\} = 0$, то заведомо имеется также решение $\psi_c(x)$, соответствующее двум бесконечно удаленным инстантонам $\phi_c(x)$, для которого $S\{\psi_c\} = 2S\{\phi_c\}$; в общем случае может существовать решение ψ_c такое, что $S\{\phi_c\} < S\{\psi_c\} < 2S\{\phi_c\}$, откуда и следует (43). Поскольку вклад (43) больше, чем (41), то в любой реальной теории поля главным является второй из указанных механизмов; первый механизм существен лишь в некоторых вырожденных случаях типа нуль-мерной теории (см. (8)), когда решение инстантонного уравнения единственно.

Раскладывая выражение в экспоненте (37) вблизи второго инстантона до квадратичных членов по $\delta\varphi$, δg, $\delta\epsilon$ и делая замены $\delta g = ig_c t$, $\delta\epsilon = i\epsilon_c\tau$, имеем

$$\tilde{A}_{K-1} = g_c \epsilon_c^{-K+(r+1)/2} \left(S\{\psi_c\}\right)^{-M/2} e^{-K} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \int D\varphi\, \psi_c^{(1)} \dots \psi_c^{(M)} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\delta\varphi, S''\{\psi_c\}\delta\varphi) - \frac{t^2}{\epsilon_c} - K\tau^2\right]\right\}. \quad (44)$$

Число нулевых мод r' для второго инстантона, вообще говоря, отлично от r; они выделяются аналогично предыдущему путем введения разложения единицы типа (27), приводя к зависимости от K вида

$$\tilde{A}_K \sim (\ln g_c)^{-K} \Gamma\left(K + \frac{r'-r}{2}\right). \quad (45)$$

Для нахождения связи $\tilde{A}_K$ с A_K подставим (36) с $\epsilon = 1/N$ в (34), сделаем замену $N \to N+1$ и воспользуемся правилом переразложения рядов, приведенным в Приложении. В результате получим

$$A_K = \frac{\tilde{A}_K}{\sqrt{2\pi c g_c}}, \quad (46)$$

где c — коэффициент, входящий в асимптотику Липатова (3) и определяемый формулой (32). Учитывая (46) и проводя в (44) тривиальные преобразования, получим

$$A_K = c_1 \left(\ln \frac{S\{\psi_c\}}{S\{\phi_c\}}\right)^{-K} \Gamma\left(K + \frac{r'-r}{2}\right), \quad (47)$$

где

$$c_1 = \left(S\{\psi_c\}\right)^{-(M+r')/2} \left(\ln \frac{S\{\psi_c\}}{S\{\phi_c\}}\right)^{(r-r')/2} \times \\ \times \frac{(2\pi)^{(\mathcal{N}-r'-4)/2} \det[f'\{\psi_c\}]_{P}^{-i}}{c\sqrt{\det[S''\{\psi_c\}]_{P'}}} \times \\ \times \int \prod_{i=1}^{r'} d\lambda_i\, \psi_c^{(1)}(\lambda_i) \dots \psi_c^{(M)}(\lambda_i). \quad (48)$$

В проведенных структурных вычислениях использовались вид функционального интеграла (1) и соотношения однородности (18), характерные для теории φ^4; соответственно, параметр M, входящий в результат (32) для b, определялся числом сомножителей в предэкспоненте (1). В других теориях поля, вообще говоря, имеется несколько полей разной природы и соотношения однородности имеют вид отличный от (18); тем не менее для широкого круга задач результат для b имеет прежний вид (32), но с другим смыслом параметра M. Однако из асимптотической формулы (47) параметр M выпадает, указывая на то, что ее применимость не ограничена теорией φ^4: это подтверждается соображениями следующего раздела.

4. ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ВЫВОД ФОРМУЛЫ (47)

В общем случае факториальные ряды имеют асимптотику с комплексными параметрами (см. (8), (10)) и коэффициенты разложения I_N определяются действительной частью некоторого комплексного выражения. Конкретизируем последнее для больших N,

$$I_N = \operatorname{Re}\left\{c a^N \Gamma(N+b)(1+\Delta_N) + \right. \\ \left. + \tilde{c}\tilde{a}^N \Gamma(N+\tilde{b}) + \dots\right\}, \quad (49)$$

учитывая асимптотику Липатова $ca^N\Gamma(N+b)$, искомые степенные поправки к ней, обозначаемые как Δ_N, и вклад следующего инстантона $\tilde{c}\tilde{a}^N\Gamma(N+\tilde{b})$; поправки к последнему и вклад высших инстантонов показаны многоточием. Вынося за скобки асимптотику Липатова, имеем

$$I_N = \operatorname{Re}\left\{c a^N \Gamma(N+b) \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \Delta_N + \frac{\tilde{c}}{c}\left(\frac{\tilde{a}}{a}\right)^N N^{\tilde{b}-b} + \dots\right]\right\}. \quad (50)$$

Полагая $\epsilon = 1/N$, видим, что последний член имеет существенную особенность при $\epsilon = 0$, которую можно связать с мнимой частью некоторого факториального ряда [5]

$$\epsilon^{-\beta} e^{-\alpha/\epsilon} = \frac{\alpha^{-\beta}}{\pi} \operatorname{Im} \sum_K \Gamma(K+\beta)\left(\frac{\epsilon}{\alpha} + i0\right)^K, \quad (51)$$

подстановка которого в (50) приводит к разложению по обратным степеням N. Естественно предположить, что выражение в квадратных скобках (50) является аналитической функцией, мнимая и действительная части которой могут входить лишь в строго определенной комбинации. Действительная часть ряда (51) много больше мнимой и должна происходить из вкладов, которые являются старшими по иерархии по сравнению с последним членом в (50); таковым может быть лишь Δ_N. Объединяя второй и третий члены в квадратных скобках (50), получим[3)]

$$I_N = \mathrm{Re}\left[ca^N\Gamma(N+b)\times \right. \\ \times\left\{1+\mathrm{const}\cdot\sum_K \Gamma(K+\tilde{b}-b)\times \right. \\ \left.\left. \times\ \frac{[\ln(a/\tilde{a})+i0]^K}{N^K}+\ldots\right\}\right]. \qquad (52)$$

Особенность в левой части (51) связана с далекими членами ряда (см. обсуждение формулы (4.10) в [5]), и выписанная в (52) форма общего члена в действительности справедлива лишь при больших K. Учитывая, что параметры a и b инстантонного вклада имеют вид (32) для широкого класса теорий поля, мы возвращаемся к результату (47), где коэффициент c_1, однако, уже не имеет конкретного вида (48).

Поясним смысл проведенных манипуляций. Как известно, разложение функции $f(\epsilon)$ в степенной ряд по ϵ имеет радиус сходимости, равный расстоянию от начала координат до ближайшей особой точки $f(\epsilon)$ на комплексной плоскости. Для факториального ряда радиус сходимости равен нулю и особенность должна находиться при $\epsilon = 0$. Характерные сингулярности, порождающие факториальные ряды, имеют вид разрезов, скачок на которых экспоненциально убывает при $|\epsilon| \to 0$ [14] (см. (51)). Из установленной выше качественной картины следует, что (а) Δ_N имеет вид факториального ряда по $1/N$; (б) расходимость этого ряда определяется вторым инстантоном; (в) вклад последнего в (50) содержит характерную сингулярность, порождающую такие ряды. Отсюда естественно заключить, что второй и третий члены в квадратных скобках (50) составляют единое целое, будучи связаны с действительной и мнимой частями одной и той же аналитической функции.

Изложенные соображения основаны лишь на том, что инстантонный вклад в асимптотику имеет функциональную форму (3). Поэтому результат (47) имеет универсальный характер: он не связан ни с конкретной теорией поля, ни с видом изучаемой величины (например, одночастичной или двухчастичной функции Грина).

[3)] В Δ_N содержатся также аналогичные вклады от высших инстантонов, которые малы по сравнению с выписанным в (52).

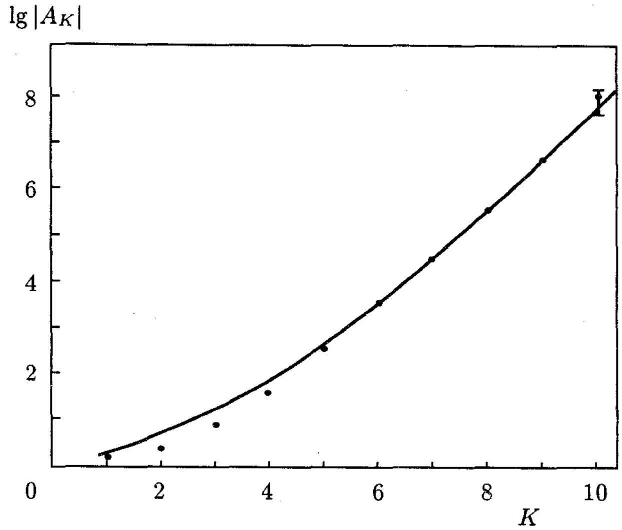

Рис. 2. Сопоставление асимптотической формулы (53) для $c_1 = -1.4$ с коэффициентами A_K, численно найденными в [9]. Значение $|A_{10}|$ приведено в [9] с одной значащей цифрой ($1\cdot 10^8$), и на рисунке указана ошибка, соответствующая интервалу $(0.5-1.5)\cdot 10^8$

5. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Применим полученные результаты к задаче об ангармоническом осцилляторе [9]. Последняя сводится к одномерной теории φ^4 [15], инстантоны в которой могут быть легко исследованы (в частности, с помощью механической аналогии [16]); локализованное решение инстантонного уравнения единственно, и все прочие решения исчерпываются мультиинстантонными конфигурациями, содержащими несколько бесконечно удаленных инстантонов. Поэтому в качестве ψ_c в (47) нужно взять двухинстантонное решение, для которого $S\{\psi_c\} = 2S\{\phi_c\}$, $r' = r+1$ (появляется лишняя нулевая мода, соответствующая движению двух инстантонов друг относительно друга). Таким образом, для ангармонического осциллятора

$$A_K = c_1\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^K \Gamma\left(K+\frac{1}{2}\right). \qquad (53)$$

Зависимость (53) можно сопоставить с результатами Бендера и Ву (5), используя c_1 как подгоночный параметр; для $c_1 = -1.4$ результаты приведены на рис. 2.

В многомерной теории φ^4 высшие инстантоны плохо исследованы. Исключение составляет четырехмерный случай, для которого в работах Ушверидзе [17] аналитически найдена бесконечная серия инстантонных решений. Второй инстантон этой серии, следующий за липатовским ($S\{\phi_c\} = 16\pi^2/3$), имеет действие $S\{\psi_c\} = 9\pi^2$, что дает для асимптотики A_K результат

$$A_K = c_1 \left(\ln\frac{27}{16}\right)^{-K} \Gamma\left(K+\frac{3}{2}\right) \qquad (54)$$

(мы учли, что $r' = r+3$, так как ввиду отсутствия у второго инстантона сферической симметрии добавляются три нулевые моды, соответствующие его поворотам в четырехмерном пространстве). К сожалению, не существует доказательства, что серия Ушверидзе исчерпывает все решения; поэтому результат (54) следует понимать как предварительный или как оценку снизу.

В работе [18] предложен метод, позволяющий находить численно всю серию высших инстантонов. Было бы желательно использовать этот метод для проверки результата (54) и для нахождения вторых инстантонов во всех актуальных теориях поля.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выражение (4) можно использовать для интерполяции коэффициентной функции, обрывая ряд на конечном числе членов и выбирая параметры A_K так, чтобы обеспечить согласование с низшими порядками теории возмущений, известными из прямых диаграммных вычислений. Такая процедура дает высокую точность и позволяет надежно оценить ошибку, но тем не менее во многих отношениях оказывается неудовлетворительной. Дело в том, что при суммировании расходящихся рядов существенны аналитические свойства коэффициентной функции [19], которые в рамках указанной процедуры воспроизводятся совершенно неправильно: коэффициентной функции навязывается кратный полюс при $N = 0$, но теряется существенная особенность при $N = \infty$, обусловленная факториальной расходимостью ряда в (4) (см. формулу (51)). Уже качественный учет функциональной формы асимптотики A_K вида $c_1 a_1^K \Gamma(K+b_1)$ позволяет выбрать базисные функции с правильным поведением при $N \to \infty$, что должно давать положительный эффект даже при неизменном числе подгоночных параметров. Количественное вычисление асимптотики позволяет определить три параметра, a_1, b_1, c_1, характеризующих коэффициентную функцию, что по эффективности соответствует вычислению трех следующих порядков теории возмущений. Вычисление a_1 и b_1 не требует работы с функциональными интегралами, а сводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений; вычисление c_1 по сложности примерно соответствует вычислению главной асимтотики Липатова. Это несопоставимо проще, чем вычисление последовательных членов ряда теории возмущений, где продвижение на каждый порядок происходит в среднем за 10 лет.

Автор признателен Л. Н. Липатову за обсуждение предварительных результатов работы и участникам семинаров в ИФП и ФИАН за интерес к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант 96-0580) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-02-17129).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод формулы (8)

Пусть имеются два разложения:

$$F_N = 1 + \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{N^2} + \ldots + \frac{A_K}{N^K} + \ldots, \qquad (\text{П.1})$$

$$F_N = 1 + \frac{B_1}{N+p} + \frac{B_2}{(N+p)^2} + \ldots + \frac{B_K}{(N+p)^K} + \ldots \qquad (\text{П.2})$$

Если второй ряд — факториальный,

$$B_K = \operatorname{Re}\left\{c\, a^K \Gamma(K+b)\right\}, \quad K \to \infty, \qquad (\text{П.3})$$

то прямым переразложением нетрудно показать, что

$$A_K = \operatorname{Re} e^{-p/a} c\, a^K \Gamma(K+b), \quad K \to \infty. \qquad (\text{П.4})$$

Проводя в (9) замену $N \to N + \beta - 1$ и используя (П.3), (П.4), получим результат

$$\Gamma(N+\beta) = N^{\beta-1}\sqrt{2\pi N} e^{-N} N^N \times \\ \times \left\{1 + \ldots - \frac{2\Gamma(K)}{N^K} \operatorname{Re}\frac{e^{-2\pi i\beta}}{(2\pi i)^{K+1}} + \ldots\right\}, \qquad (\text{П.5})$$

применение которого к соотношению (7) с использованием алгебры факториальных рядов [5] позволяет вывести формулу (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
2. *Large order behavior of perturbation theory*, ed. by J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, Amsterdam (1990).
3. G. t'Hooft, in *The whys of subnuclear physics* (Erice, 1977), ed. by A. Zichichi, Plenum Press, New York (1979).
4. И. М. Суслов, ЖЭТФ **116**, 369 (1999).
5. И. М. Суслов, УФН **168**, 503 (1998).
6. S. G. Gorishny et al., Phys. Lett. B **256**, 81 (1991). T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren, and S. A. Larin, Phys. Lett. B **400**, 379 (1997).
7. H. Kleinert et al., Phys. Lett. B **272**, 39 (1991).
8. Ю. А. Кубышин, ТМФ **57**, 363 (1983).
9. C. M. Bender and T. T. Wu, Phys. Rev. D **7**, 1620 (1973).
10. S. V. Faleev and P. G. Silvestrov, Phys. Lett. A **197**, 372 (1995).
11. Г. Б. Двайт, *Таблицы интегралов и другие математические формулы*, Наука, Москва (1977), с. 177.
12. Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, *Лекции по теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1976).
13. И. М. Суслов, ЖЭТФ **105**, 560 (1994).
14. E. B. Bogomolny, Phys. Lett. B **67**, 193 (1977).
15. E. Brezin and G. Parisi, J. Stat. Phys. **19**, 269 (1978).
16. R. Finkelstein, R. Le Lovier, and M. Ruderman, Phys. Rev. **83**, 326 (1951).
17. А. Г. Ушверидзе, ЯФ **30**, 845 (1979); **32**, 1446 (1980).
18. G. G. Leptukh and A. G. Ushveridze, J. Phys. A **14**, 3085 (1981).
19. Ю. А. Кубышин, ТМФ **58**, 137 (1984).