ЖЭТФ, 2002, том 122, вып. 4 (10), стр. 696–699 © 2002

КОММЕНТАРИЙ К СТАТЬЕ Д. И. КАЗАКОВА И В. С. ПОПОВА

*И. М. Суслов**

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 июня 2002 г.

Статья Д. И. Казакова и В. С. Попова [1] почти полностью посвящена критике моих работ [2–4]. Поднимаемые вопросы не лишены интереса, но практически все они подробно обсуждались в моих публикациях.

PACS: 74.50.+r, 74.60.Ge, 74.25.Fy

1. В работе [1] приводятся многочисленные примеры, суть которых сводится к следующему. Если известны несколько первых членов расходящегося ряда

$$W(g) = \sum_{N=N_0}^{\infty} W_N(-g)^N \qquad (1)$$

и асимптотика W_N при $N \to \infty$, то, меняя значения неизвестных промежуточных коэффициентов, можно в широких пределах менять асимптотику суммы $W(g)$ в пределе сильной связи. На этом основании делается вывод о принципиальной невозможности восстановления асимптотики $W(g)$ на основе указанной информации.

Фактически приводить столько примеров нет необходимости, так как в [3, с. 16] делается более сильное утверждение: «по конечному числу коэффициентов и их асимптотике можно построить функцию с наперед заданным поведением на бесконечности». Далее дается рецепт выхода из ситуации: «Осмысленная постановка задачи возникает при приближенном задании всех W_N; тогда с некоторой точностью возможно восстановление $W(g)$. Поэтому необходимым этапом в решении задачи является проведение интерполяции коэффициентной функции; разумеется, это возможно лишь в предположении ее аналитичности».

Приведенные цитаты вскрывают концептуальное различие между подходом, использованным в [2–4], и позицией авторов работы [1]. Если про промежуточные коэффициенты разложения действительно ничего не известно, то восстановление асимптотики $W(g)$ невозможно. Однако гладкость коэффициентной функции позволяет (используя интерполяцию) с некоторой точностью предсказать неизвестные W_N и представить их в виде $W_N^0 + \delta W_N$, где W_N^0 — точные коэффициенты, а δW_N — малое возмущение. Коэффициенты W_N^0, по предположению, дают при больших g степенное поведение, $W(g) = W_\infty g^\alpha$, с $W_\infty \sim 1$, тогда как δW_N порождают, вообще говоря, более быстро растущую функцию g, содержащую в качестве коэффициента малый параметр. Поэтому существует область значений g, в которой истинная асимптотика $W_\infty g^\alpha$ может быть восстановлена (разумеется, с некоторой погрешностью в W_∞ и α); по мере увеличения информации о коэффициентах W_N их неопределенность δW_N уменьшается и указанная область значений g неограниченно увеличивается. Поэтому никаких принципиальных ограничений для нахождения асимптотического поведения $W(g)$ не существует: говорить о недостижимости асимптотики можно лишь в таком же смысле, как о недостижимости бесконечности. Стратегия выбора правильного интервала для обработки подробно обсуждалась в работе [3], но в несколько других терминах (см. ниже).

2. Аналитичность коэффициентной функции не является строго доказанной, однако в пользу нее имеются серьезные аргументы. Согласно Липатову [5], коэффициенты разложения по g функционального интеграла

$$W(g) = \int D\varphi \exp(-S_0\{\varphi\} - gS_{int}\{\varphi\}) \qquad (2)$$

записываются в виде

$$W_N = \int_C \frac{dg}{2\pi i g} \int D\varphi \times \\ \times \exp(-S_0\{\varphi\} - gS_{int}\{\varphi\} - N\ln g) \qquad (3)$$

*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

(C — контур в комплексной плоскости, охватывающий точку $g = 0$), и аналитичность по N имеет место при условии сходимости интегралов; интегралы сходятся по крайней мере в рамках перевального приближения, справедливого при больших N. К сожалению, таким образом не удается установить область аналитичности.

Из представления ряда (1) в виде интеграла Зоммерфельда–Ватсона следует, что в случае степенной асимптотики, $W(g) \propto g^\alpha$, точка $N = \alpha$ является крайней правой особенностью коэффициентной функции в комплексной плоскости N [3, 5, 6]. Поэтому область аналитичности может быть проконтролирована результатом: если при обработке получается $\alpha < N_0$, то коэффициентная функция аналитична для $\mathrm{Re}N > \alpha$ и предположение о ее гладкости на действительной оси при $N \geq N_0$, требуемое для интерполяции, является самосогласованным.

В ряде примеров, приведенных в [1] (см. формулы (6), (7)), аналитичность коэффициентной функции явным образом нарушена. Такие возмущения не могут возникать в результате гладкой интерполяции, и их обсуждение не актуально.

Более интересны примеры типа (9), в которых добавка к коэффициентам δW_N является целой функцией, а соответствующая зависимость от g — экспоненциальной (невозможность степенного поведения доказывается от противного). Такие возмущения действительно возникают как ошибки интерполяции и проявляются в виде экспоненциальной компоненты в коэффициентах U_N (см. [3, рис. 10]; определение U_N дано ниже). При большой величине таких ошибок результаты вообще не могут быть интерпретированы в рамках степенного закона. На этом основан предложенный в [3] метод «фильтрации» этих ошибок: способ интерполяции подбирается так, чтобы обеспечить минимальные значения χ^2 при обработке по степенному закону. В результате такие ошибки удается уменьшить настолько, что они почти не влияют на точность[1)].

В примечании 12 работы [1] упоминается проблема неоднозначности аналитического продолжения с целых точек на комплексную плоскость, возникающей из-за того, что точка $N = \infty$, вообще говоря, является особой[2)]. Однако существуют теоремы, гарантирующие единственность аналитического продолжения при условии, что особенность при $N = \infty$ является достаточно слабой (скорость роста при $|N| \to \infty$ ограничена некоторой экспонентой); при этом стандартные интерполяционные схемы автоматически сходятся к этой единственной функции [7]. Особенность приведенной коэффициентной функции в реальных полевых задачах является очень слабой: справедливо регулярное разложение по $1/N$, но с нулевым радиусом сходимости [8]; по-видимому, этого достаточно для доказательства единственности.

3. Я согласен с авторами работы [1], что при небольшом количестве информации любой метод даст неправильные результаты для асимптотики, если выход на нее окажется сильно затянутым: обработка всегда проводится в некотором конечном интервале значений g, хотя это не всегда очевидно.

Использованный в [2–4] алгоритм основан на том, что в случае степенной асимптотики, $W(g) \propto g^\alpha$, коэффициенты U_N сходящегося ряда, полученного в результате некоторой процедуры пересуммирования ряда (1), ведут себя как $N^{\alpha-1}$ в области больших N. Можно показать, что знание коэффициентов разложения с $N \leq N_{max}$ определяет сумму ряда в области $g \lesssim N_{max}$. Использованный в [3] типичный рабочий интервал $20 \leq N \leq 40$ эффективно соответствует области $20 \lesssim g \lesssim 40$. Однако я не считал, что в этой области асимптотика уже установилась, поскольку обработка проводилась не по чисто степенному закону Ag^α, а с учетом первой поправки к нему вида $A' g^{\alpha'}$. Последняя поправка воспроизводилась плохо и сильно зависела от конкретной процедуры, однако главная асимптотика оказалась очень стабильной. Поэтому результаты работы [3] эффективно соответствуют области довольно больших g. Используемая в [3] нормировка заряда выбрана из условия, что ближайшая особенность в борелевской плоскости находится на единичном расстоянии от начала координат. В этом случае характерный масштаб, на котором происходит изменение β-функции, оказывается порядка единицы и есть все основания полагать, что рабочий интервал находится в асимптотической области.

[1)] Если коэффициентная функция медленно меняется на масштабе порядка единицы и тем же свойством обладает интерполяционная кривая, то амплитуда ошибок такого рода оказывается экспоненциально малой. Действительно, экспоненциальный рост по g имеет место в случае, когда добавка к коэффициентной функции содержит осциллирующий множитель $(-1)^N = e^{i\pi N}$ (см. (9), (10) в [1]), который в этом случае является «высокочастотным»; высшие же фурье-гармоники содержатся в гладкой функции с экспоненциально малым весом.

[2)] Обычная теорема единственности относится к аналитическому продолжению с множества точек, имеющего предельную точку, лежащую в области регулярности.

В работе [9] использовались коэффициенты разложения с $N \leq 5$ и интерполяция коэффициентной функции не проводилась. Информация о промежуточных коэффициентах разложения не использовалась, и соображения работы [1] применимы к [9] в полном объеме. Не следует придавать большого значения пучку кривых, приведенных в [9] на рис. 9 и демонстрирующих 10-процентную точность для $g < 50$; эти кривые получены для некоторой фиксированной процедуры суммирования, выбранной в процессе «угадывания» асимптотики. При выборе другой асимптотики изменится процедура суммирования, что приведет к сильному изменению результатов в области больших g. В моем методе коэффициенты U_N обнаруживают ярко выраженную промежуточную асимптотику $U_N \sim N$ [3, разд. 8.3], в точности соответствующую результату [9]. Если использовать для восстановления асимптотики значения W_N с $N \leq 10$, то мой метод приводит к результатам, полностью совпадающим с [9].

В работе [6] интерполяция коэффициентной функции формально проводилась, но индекс α определялся по положению крайней правой особенности, полученной в результате построения аппроксимант Паде. Если использовать для их построения лишь известные коэффициенты разложения, то порядок аппроксимации получается довольно низким и эффективно соответствует исследованию области сравнительно небольших g. На мой взгляд, более разумно предварительно задаться некоторым пучком интерполяционных кривых и строить для каждой кривой аппроксиманты достаточно высокого порядка, а разброс результатов для разных кривых использовать как меру их неопределенности. Такой подход позволяет воспроизвести результаты [3], но с существенно большей ошибкой.

На мой взгляд, сказанное достаточно разъясняет причину расхождения результатов работ [3] и [6, 9]; дополнительное обсуждение вопроса можно найти в [3], где ему отведен специальный разд. 8.3. Замечу, что методы восстановления асимптотики, предложенные Казаковым [9, 10] и Кубышиным [6], по своему интересны и заслуживают большего внимания: расхождение результатов связано не с дефектностью этих методов, а именно с отмеченным выше концептуальным различием подходов.

4. Авторы работы [1] выражают сомнение в использованном мной методе интерполяции, которая проводилась на основе формулы

$$W_N = W_N^{as} \left\{ 1 + \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{N^2} + \dots \right\} \qquad (4)$$

путем обрыва ряда и выбора параметров A_K из соответствия с L первыми коэффициентами W_N; при этом A_1 и параметры асимптотики W_N^{as} считались известными. При небольших L этот метод является достаточно эффективным: в нуль-мерном случае точность интерполяции порядка 10^{-4} для $L = 1$ и 10^{-9} при $L = 5$; для ангармонического осциллятора имеем точность порядка 10^{-2} при $L = 5$ и 10^{-3} при $L = 9$. Для теории φ^4 ошибка интерполяции оценивается в несколько процентов; это можно сделать путем варьирования интерполяционной схемы или на основе формулы (14) работы [2].

Я никогда не утверждал, что получаемые при этом коэффициенты A_K близки к истинным[3]. Я допускаю также, что эта схема может стать неудовлетворительной при увеличении L. В идеале способ интерполяции должен быть основан на аналитических свойствах коэффициентной функции [8, разд. 6] и иметь гарантированную скорость сходимости при $L \to \infty$.

5. Некоторые замечания авторов работы [1] вводят читателя в заблуждение. Так, в разд. 3 говорится, что «вводя в расчет до 50 коэффициентов ТВ», в работе [3] удается получить для нуль-мерного случая «значение $\alpha = -0.235 \pm 0.025$, близкое к точному $\alpha = -1/4$», что «не представляется удивительным» ввиду большого количества используемых коэффициентов. Такой результат действительно получен в [3] на первом этапе тестирования (разд. 4); однако в следующем разд. 5 использование одного (!) коэффициента дает примерно такой же результат $\alpha = -(0.218\text{–}0.271)$. Этот результат опровергает центральное утверждение работы [1] о необходимости большого числа коэффициентов разложения. Количество информации, реально необходимое для восстановления асимптотики, может быть установлено лишь эмпирически, но никак не на основе общих принципов.

В разд. 3 говорится, что в работе [11] для ангармонического осциллятора получено значение $c_\infty = 1.048$ вместо $1.0603\dots$, тогда как в [3] оно получено с 10-процентной ошибкой. Однако в [11] индекс α полагался равным точному значению 1/3, тогда как в [3] он определялся в процессе обработки. При использовании точного значения α метод работы [3] дает c_∞ с относительной ошибкой $6 \cdot 10^{-3}$. Такими деталями создается впечатление, что метод работы [3]

---

[3] Это так лишь при некоторых ограничительных условиях.

ничем не лучше, чем многие другие, и никакого существенного продвижения на его основе быть не может. В связи с этим хочу подчеркнуть, что метод с самого начала заявлялся не как рекордно точный, а как «грубый» (robust), т. е. обладающей повышенной устойчивостью в неблагоприятных условиях [3, разд. 2.3][4)].

В заключение замечу, что в результатах работ [2–4] нет ничего противоестественного: из неполной информации о коэффициентах W_N извлекается неполная информация об асимптотике $W(g)$. Я ставил своей целью, чтобы неопределенность исходной информации адекватно отражалась в неопределенности результатов. Есть все основания полагать, что эта цель достигнута — результаты в пределах неопределенности не зависят от способа интерполяции. Индекс α для теории φ^4 слабо меняется при значительном сокращении информации [4]: это указывает на то, что ее достаточно. Кроме того, результаты хорошо увязываются в единую картину с существующими аналитическими оценками (см. [3, разд. 8.2] и [4, с. 214]).

[4)] Кроме того, в [1] нет ссылок, что оптимальная параметризация асимптотики (47) установлена в [3], а поправки к асимптотике в нуль-мерной теории φ^4 найдены в [8]. Результат (Б.9), полученный в Приложении Б на основе громоздких вычислений, при $K = 2$ противоречит результату работы [8] (см. формулы (8), (41)), полученному двумя разными (и почти тривиальными) способами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. И. Казаков, В. С. Попов, ЖЭТФ **122**, 675 (2002).
2. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **71**, 315 (2000).
3. И. М. Суслов, ЖЭТФ **120**, 5 (2001).
4. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **74**, 211 (2001).
5. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
6. Ю. А. Кубышин, ТМФ **58**, 137 (1984).
7. А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, Москва (1967).
8. И. М. Суслов, ЖЭТФ **117**, 659 (2000).
9. Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков, ТМФ **38**, 15 (1979).
10. Д. И. Казаков, ТМФ **46**, 227 (1981).
11. A. D. Dolgov and V. S. Popov, Phys. Lett. **79B**, 403 (1978).