

Расходящиеся ряды — это изобретение дьявола ... 1)

Н. Абель, 1828

## РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

*И. М. Сулов\**

*Институт физический проблем им. П. Л. Капицы  
117334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 января 2005 г.

Многие ряды теории возмущений расходятся факториально. Их поведение в высоких порядках может быть найдено методом Липатова и определяется перевальными конфигурациями — инстантонами — соответствующих функциональных интегралов. Знание асимптотики Липатова и нескольких первых членов ряда, полученных путем прямых диаграммных вычислений, дает информацию обо всех членах ряда, суммирование которого позволяет в некотором приближении решить многие проблемы сильной связи. Этот подход демонстрируется на примере восстановления функций Гелл-Манна–Лоу теории  $\varphi^4$ , КЭД и КХД при произвольных константах связи. Представлен обзор математической теории расходящихся рядов и показано, в каком смысле понимаются ряды теории возмущений. Дан наглядный вывод асимптотики Липатова для основных задач теоретической физики. Предложено решение проблемы ренормалонных вкладов, затормозившей развитие всего направления в конце 1970-х годов. Изложены методы практического суммирования рядов теории возмущений для константы связи порядка 1 и в пределе сильной связи. Дана интерпретация борелевского интеграла для рядов, «не суммируемых по Борелю». Обсуждается вычисление высших поправок к асимптотике Липатова.

PACS: 03.65.-w, 11.10.Hi, 71.23.An

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Аргумент Дайсона: актуальные ряды теории возмущений имеют радиус сходимости, равный нулю .....	2	4. Асимптотика Липатова в разных случаях .....	9
2. Метод Липатова: количественная оценка расходимости рядов .....	2	4.1. Теория $\varphi^4$ .....	9
3. В каком смысле понимаются ряды теории возмущений? Обзор математической теории расходящихся рядов .....	4	4.2. Квантовая электродинамика .....	12
3.1. Можно ли работать с расходящимися рядами? .....	5	4.3. Другие задачи с фермионами .....	14
3.2. Принцип Эйлера .....	5	4.4. Задачи с вырожденным вакуумом .....	15
3.3. Как определить сумму ряда? .....	7	4.5. Теория Янга–Миллса и КХД .....	16
3.4. Асимптотическая трактовка расходящихся рядов .....	7	5. Ренормалоны. Проблема математического обоснования метода Липатова .....	18
3.5. Физические аргументы .....	8	5.1. Аргументация 'т Хофта .....	18
		5.2. Отсутствие ренормалонных сингулярностей в теории $\varphi^4$ .....	21
		5.3. Общий критерий отсутствия ренормалонных сингулярностей .....	22

\*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

<b>6. Практическое суммирование рядов теории возмущений</b> .....	24
6.1. Конформ-борель и другие методы.....	24
6.2. Суммирование в пределе сильной связи...	27
<b>7. Ряды, «не суммируемые по Борелю»</b> .	32
<b>8. Функции Гелл-Манна – Лоу основных квантовых теорий поля</b> .....	38
8.1. Теория $\varphi^4$ .....	38

8.2. Квантовая электродинамика.....	42
8.3. КХД .....	44
<b>9. Высшие поправки к асимптотике Липатова</b> .....	47
<b>10. Перспективы</b> .....	48
<b>Литература</b> .....	50

### 1. АРГУМЕНТ ДАЙСОНА: АКТУАЛЬНЫЕ РЯДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ИМЕЮТ РАДИУС СХОДИМОСТИ, РАВНЫЙ НУЛЮ

В стандартных руководствах по диаграммной технике [2–4] построение диаграммных рядов описывается так, как если бы эти ряды были хорошо определены. В действительности же почти все актуальные ряды теории возмущений безнадежно расходятся, имея нулевой радиус сходимости. Первый аргумент такого рода приведен Ф. Дайсоном еще в 1952 г. в отношении квантовой электродинамики [5]; мы воспроизведем его на более простых примерах.

Рассмотрим ферми-газ с точечным взаимодействием  $g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  и построим ряд теории возмущений по константе связи  $g$ . Его радиус сходимости определяется расстоянием от начала координат до ближайшей особой точки в комплексной плоскости и может быть установлен из следующих соображений. Как известно, в случае отталкивания ( $g > 0$ ) основное состояние системы является ферми-жидкостью, тогда как в случае притяжения ( $g < 0$ ) имеет место куперовская неустойчивость, приводящая к сверхпроводимости (рис. 1а). При изменении  $g$  основное состояние системы качественно меняется при прохождении точки  $g = 0$ : тем самым ближайшая особая точка находится в начале координат и радиус сходимости ряда оказывается равным нулю.

Еще более простым примером является задача о спектре квантовой частицы в потенциале

$$U(x) = x^2 + gx^4, \quad (1.1)$$

т. е. задача об одномерном ангармоническом осцилляторе. Если при  $g > 0$  система имеет хорошо определенные уровни, то при  $g < 0$  эти уровни становятся метастабильными из-за возможности ухода частицы на бесконечность (рис. 1б). Поэтому ряд теории возмущений по константе связи  $g$  расходится при любых конечных  $g$ , в чем можно убедиться с помощью прямого вычисления его коэффициен-

тов: первые 150 коэффициентов были вычислены Бендером и Ву [6], что явилось прямой демонстрацией расходимости ряда и позволило детально ее исследовать.

Однако в квантовомеханических задачах ситуация с нулевым радиусом сходимости выглядит достаточно случайной: для этого нужно специально подобрать вид потенциальной энергии и специально «плохо» определить константу связи. Напротив, в задачах квантовой теории поля такая ситуация оказывается совершенно типичной: фактически так устроены все актуальные теории с одной константой связи.

Хотя аргумент Дайсона является совершенно бесспорным, на протяжении многих лет наблюдалась тенденция к его замалчиванию или принижению его статуса — научная общественность оказалась не готовой к восприятию проблемы расходимости рядов теории возмущений.

### 2. МЕТОД ЛИПАТОВА: КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ

Новый этап начался в 1977 году, когда появился метод Липатова [7], позволяющий провести вычисление высоких порядков теории возмущений и дать количественную оценку расходимости рядов. Идея метода состоит в следующем. Если некоторая функция  $F(g)$  раскладывается в ряд по  $g$ ,

$$F(g) = \sum_{N=0}^{\infty} F_N g^N, \quad (2.1)$$

то ее коэффициенты разложения  $F_N$  могут определяться по формуле

$$F_N = \int_C \frac{dg}{2\pi i} \frac{F(g)}{g^{N+1}}, \quad (2.2)$$

где контур  $C$  охватывает точку  $g = 0$  в комплексной плоскости. Перепиывая знаменатель в виде

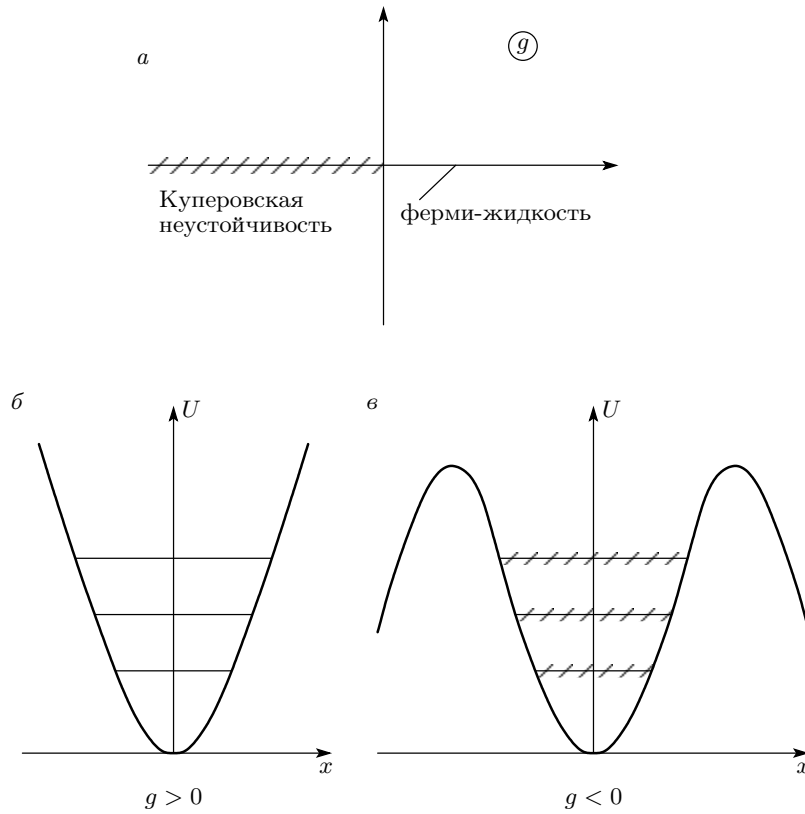


Рис. 1. К аргументу Дайсона

$\exp\{-(N+1)\ln g\}$ , мы имеем при больших  $N$  экспоненту с большим показателем, что позволяет надеяться на использование метода перевала.

Как известно, задачи, для которых используется диаграммная техника, могут быть переформулированы на языке функциональных интегралов типа

$$Z(g) = \int D\varphi \exp(-S_0\{\varphi\} - gS_{int}\{\varphi\}), \quad (2.3)$$

коэффициенты разложения имеют следующий вид:

$$Z_N = \int_C \frac{dg}{2\pi ig} \times \int D\varphi \exp(-S_0\{\varphi\} - gS_{int}\{\varphi\} - N \ln g). \quad (2.4)$$

Идея Липатова состоит в том, что перевал в (2.4) ищется не просто по  $g$ , но по  $g$  и  $\varphi$  одновременно; он существует для всех интересных случаев и реализуется на некоторой локализованной в пространстве функции  $\varphi(x)$ , называемой инстантоном. При этом оказывается, что условия применимости перевального приближения выполнены при больших  $N$

независимо от его применимости к исходному интегралу (2.3). А это в корне меняет дело: если точное вычисление функциональных интегралов, как правило, невозможно, то в перевальном приближении они всегда могут быть вычислены.

Зная коэффициенты разложения для функциональных интегралов, можно перейти к разложениям для функций Грина, вершинных частей и т. д.: это связано с тем, что для факториальных рядов существует простая алгебра, позволяющая манипулировать с ними так же просто, как с конечными выражениями ([8, разд. 5.3]). Типичная функциональная форма асимптотики Липатова для коэффициентов разложения любой величины  $F(g)$  имеет вид

$$F_N = c \Gamma(N+b) a^N, \quad (2.5)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция, а параметры  $a, b, c$  зависят от конкретной задачи. В рамках конкретной теории константа  $a$  универсальна, параметр  $b$  зависит от изучаемой величины  $F(g)$ , тогда как  $c$  содержит зависимость от внешних координат или импульсов.

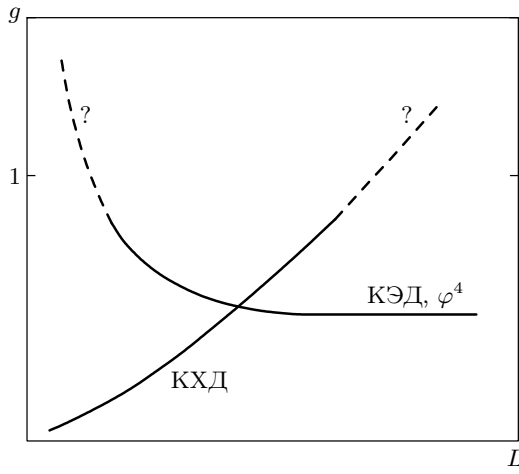


Рис. 2. Зависимость эффективного взаимодействия от масштаба расстояний в теории  $\varphi^4$ , КЭД и КХД

Знание асимптотики Липатова и нескольких первых порядков теории возмущений, полученных путем прямых диаграммных вычислений, дает информацию обо всех членах ряда. Его суммирование позволяет в некотором приближении решить многие проблемы сильной связи. Наиболее актуальной выглядит возможность восстановления функции Гелл-Манна–Лоу  $\beta(g)$ , описывающей зависимость эффективной константы связи  $g(L)$  от масштаба расстояний  $L$ :

$$-\frac{dg}{d \ln L^2} = \beta(g). \quad (2.6)$$

В релятивистских теориях разложение  $\beta(g)$  начинается с квадратичного члена,  $\beta(g) = \beta_2 g^2 + \dots$ , и при малых  $g$  из уравнения (2.6) следует известный результат [3, 9, 10]

$$g(L) = \frac{g_0}{1 - \beta_2 g_0 \ln(L^2/L_0^2)}, \quad (2.7)$$

где  $g_0$  — значение  $g(L)$  на масштабе  $L_0$ . В квантовой электродинамике (КЭД) и теории  $\varphi^4$  константа  $\beta_2$  положительна и рост  $g(L)$  происходит в области малых  $L$  (рис. 2). В квантовой хромодинамике (КХД) знак  $\beta_2$  отрицательный: поэтому взаимодействие кварков и глюонов мало в области малых  $L$  (асимптотическая свобода), но возрастает при увеличении  $L$ , указывая на тенденцию к конфайнменту (рис. 2). Принципиальный вопрос состоит в том, чем заменяется формула (2.7) в области промежуточной и сильной связи. Согласно классификации Боголюбова и Ширкова [2], рост  $g(L)$  прекращается,

если  $\beta(g)$  имеет нуль при конечных  $g$ , и продолжается до бесконечности, если  $\beta(g) \propto g^\alpha$  с  $\alpha \leq 1$  при  $g \rightarrow \infty$ . В случае же  $\beta(g) \propto g^\alpha$  с  $\alpha > 1$  ситуация может интерпретироваться двумя способами: если считать взаимодействие конечным на больших расстояниях, то теория внутренне противоречива — эффективный заряд  $g(L)$  обращается в бесконечность при некотором конечном  $L_c$  (полюс Ландау), а при  $L < L_c$  зависимость  $g(L)$  не определена; если же рассматривать теорию поля как предел решеточных теорий, то она является «тривиальной» ввиду исчезновения взаимодействия при  $L \rightarrow \infty$  («нуль заряда»). Первые попытки восстановления функции Гелл-Манна–Лоу для теории  $\varphi^4$  были предприняты в работах [11–13].

Примененный первоначально к скалярным теориям типа  $\varphi^4$  [7] метод Липатова был за короткое время обобщен на векторные поля [14], задачи с фермионами [15], скалярную электродинамику [16], теорию Янга–Миллса [17, 18], не говоря уже о большом числе квантовомеханических задач (см. сборник статей [19] и обзоры [20, 21]). На очереди были применения его к теориям, представляющим практический интерес — квантовой электродинамике [22, 23] и КХД [24–26].

Во всех рассмотренных случаях расходимость рядов теории возмущений оказалась факториальной. Если считать, что «расходящиеся ряды — это изображение дьявола», то придется признать, что творец мироздания в этом тоже участвовал: описание физической реальности приводит к появлению расходящихся рядов с какой-то потрясающей закономерностью.

### 3. В КАКОМ СМЫСЛЕ ПОНИМАЮТСЯ РЯДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ? ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

В создавшейся ситуации умение работать с расходящимися рядами должно входить в программу теоретического минимума, тогда как фактически соответствующая теория почти не известна физической аудитории. Причина этого в том, что стандартные университетские курсы математического анализа соответствуют в данном вопросе уровню середины 19-го века, когда расходящиеся ряды были практически изгнаны из математики. Ниже мы дадим краткий обзор математической теории расходящихся рядов [27].

### 3.1. Можно ли работать с расходящимися рядами?

Когда мы впервые сталкиваемся с рядами,

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N + \dots, \quad (3.1)$$

то наше естественное желание состоит в том, чтобы работать с ними как с конечными суммами. Но в общем случае это неправильно: с рядом можно обращаться как с конечной суммой, если он не просто сходится, а сходится абсолютно [28]:

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_N| + \dots < \infty. \quad (3.2)$$

Если ряд сходится, но не абсолютно, как знакопеременный гармонический ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots, \quad (3.3)$$

то в нем недопустима произвольная перестановка членов: согласно теореме Римана, путем надлежащей перестановки ряд можно просуммировать к любой наперед заданной сумме [28]. Дело в том, что сумма сходящегося ряда понимается как предел частичных сумм, который можно изменять произвольным образом, отодвигая отрицательные члены на бесконечность, а положительные приближая к нулю или наоборот.

Можно ожидать, что ситуация еще более усложнится, когда мы перейдем к рассмотрению расходящихся рядов. Это действительно так, и количество запрещенных операций при работе с расходящимися рядами еще более возрастает:

1) естественно, недопустима перестановка членов;

2) недопустима группировка членов, например,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \neq (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \neq 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \quad (3.4)$$

3) недопустимо «разбавление» ряда нулями:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots \neq a_0 + 0 + a_1 + 0 + a_2 + 0 + a_3 + 0 + \dots \quad (3.5)$$

Теперь мы подходим к центральной идее теории расходящихся рядов: непротиворечивая работа с ними в принципе возможна, но «правила игры» должны быть не такими, как при обращении с конечными суммами и сходящимися рядами, а более жесткими.

### 3.2. Принцип Эйлера

Каковы же эти новые «правила игры»? Предварительный ответ на этот вопрос дан еще Л. Эйлером, который является подлинным пионером теории расходящихся рядов. Сформулированный Эйлером принцип состоит в отказе от использования числовых рядов типа (3.1), а также рядов по произвольной системе функций<sup>1)</sup>,

$$a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_N f_N(x) + \dots, \quad (3.6)$$

и признании особой роли степенных рядов:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_N x^N + \dots \quad (3.7)$$

Существенная особенность степенных рядов состоит в наличии естественной нумерации членов, информация о которой не теряется при перестановках и других манипуляциях; поэтому со степенными рядами можно обращаться как с обычными суммами. Нетрудно видеть, что все запрещенные операции автоматически исключаются: если мы понимаем числовой ряд (3.1) как предел степенного ряда (3.7) при  $x \rightarrow 1$ , то перестановка членов, разбавление нулями и ассоциирование приводят к рядам, отличным от исходного:

$$a_1 + a_0 + a_3 + a_2 + \dots \rightarrow a_1 + a_0 x + a_3 x^2 + a_2 x^3 \dots, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} a_0 + 0 + a_1 + 0 + a_2 + 0 + a_3 + \dots &\rightarrow \\ \rightarrow a_0 + 0 \cdot x + a_1 x^2 + 0 \cdot x^3 + a_2 x^4 + & \\ + 0 \cdot x^5 + a_3 x^6 \dots, & \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \dots &\rightarrow \\ \rightarrow (a_0 + a_1) + (a_2 + a_3)x + (a_4 + a_5)x^2 + \dots & \quad (3.10) \end{aligned}$$

Глубинная причина справедливости принципа Эйлера связана с тем, что степенной ряд внутри круга сходимости сходится абсолютно и определяет аналитическую функцию, которую можно продолжать за пределы области сходимости. Поэтому вольные манипуляции со степенными рядами оправданы либо как действия над абсолютно сходящимися рядами, либо по принципу аналитического продолжения. Однако аналитическая функция может иметь несколько ветвей, информация о которых теряется при использовании расходящихся рядов. Поэтому принцип

<sup>1)</sup> Разумеется, речь идет о расходящихся рядах. Использование сходящихся разложений типа (3.6) (напр. по ортогональной системе функций) конечно же возможно.

Эйлера не является вполне замкнутым и может приводить к плохо определенным выражениям, требующим правильной интерпретации. Это создает большие проблемы при его строгом математическом обосновании. Конструктивные результаты теории расходящихся рядов [27] обычно соответствуют частичным доказательствам принципа Эйлера при различных ограничительных предположениях. Ситуация выглядит так, что этот принцип справедлив во всем параметрическом пространстве, образованном коэффициентами ряда, за исключением некоторого выколотого множества, на котором он справедлив лишь после соответствующего доопределения суммы ряда. Выколотое множество имеет сложную структуру и его трудно локализовать с помощью конечного числа теорем. По этой причине в современной математике принцип Эйлера не может быть принят безоговорочно. Но он и не отрицается, так как фактов, однозначно его опровергающих, по-видимому не существует.

По сути дела, принцип Эйлера соответствует тому, что явочным порядком принято в физике. Имеется убеждение, что формальные манипуляции со степенными рядами «на буквах» не могут привести к заведомо неправильным результатам, даже если в промежуточных вычислениях использовались расходящиеся ряды. Появление же плохо определенных выражений не является принципиальной проблемой, так как их правильная интерпретация может быть установлена из физических соображений — тем более, что у физиков имеется большой опыт по выводу всяческих «правил обхода». При этом важно соблюдать два правила: не подставлять численных значений параметра разложения  $x$  до перевода ряда в сходящуюся форму и не проводить тейлоровских разложений в заведомо сингулярных точках.

В связи с последним заметим, что расходящиеся ряды квантовой теории поля хотя и имеют нулевой радиус сходимости, но возникают из функциональных интегралов типа (2.3) в результате регулярного разложения экспоненты по константе связи  $g$  и последующей (некорректной) перестановки суммирования и интегрирования. Смысл теории суммирования в том, чтобы произвести обратную перестановку; выясняется, что ее можно сделать «в другом месте», чем обеспечивается свобода формальных манипуляций.

Может показаться, что требование пользоваться только степенными рядами является очень ограничительным. На самом деле это не так: в физических приложениях числовой ряд может возникнуть толь-

ко в результате того, что параметрам модели предписываются какие-то определенные значения. Обычно достаточно вернуться к общей постановке задачи или несколько обобщить модель, чтобы ряд оказался степенным хотя бы по одному параметру. Часто вырывают нехитрые формальные приемы. Например, если в уравнении Шредингера потенциальная энергия  $U(x)$  рассматривается как возмущение, то получаемый ряд не будет степенным; но если перед его построением формально заменить  $U(x)$  на  $gU(x)$  (имея в виду, что  $g \rightarrow 1$  в конце вычислений), то ряд окажется степенным по  $g$ .

Несколько слов о расходящихся числовых рядах (3.1). Непротиворечивые манипуляции с ними в принципе возможны [27], если (3.1) понимается как символическая запись, которую нельзя отождествлять с обычной суммой — последнее порождает парадоксы, приводимые обычно в учебниках [28]. Такие манипуляции должны производиться по специальным правилам, которые довольно искусственны и известны лишь специалистам. В своей конструктивной части эти правила возникают из принципа Эйлера, если отождествить числовой ряд (3.1) со степенным рядом (3.7) в пределе  $x \rightarrow 1$ . Такое отождествление формально всегда возможно, но нужно быть уверенным в том, что в ряде (3.1) не проводилась перестановка членов, не вычеркивались нули и т. д. Проконтролировать последнее практически невозможно, если числовой ряд не получен из известного степенного ряда. По этой причине числовые ряды практически не имеют самостоятельного значения.

Одним из вариантов применения принципа Эйлера является известное преобразование Бореля: разделив и умножив каждый член ряда на  $N!$  и вводя интеграл, определяющий гамма-функцию, получим после перестановки суммирования и интегрирования:

$$\begin{aligned} F(g) &= \sum_{N=0}^{\infty} F_N g^N = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{N!} \int_0^{\infty} dx x^N e^{-x} g^N = \\ &= \int_0^{\infty} dx e^{-x} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{N!} (gx)^N. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Степенной ряд в правой части имеет факториально улучшенную сходимость и определяет борелевский образ  $B(z)$  функции  $F(g)$ , связанный с ней интегральным преобразованием

$$F(g) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} B(gx), \quad B(z) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{N!} z^N. \quad (3.12)$$

Преобразование Бореля дает естественный способ суммирования факториально расходящихся рядов квантовой теории поля.

### 3.3. Как определить сумму ряда?

Перейдем к обсуждению современного взгляда на проблему. «Идеальную» программу формализации можно представить следующим образом.

1. Введем какое-нибудь определение суммы ряда  $S$ , которое для сходящихся рядов совпадает с обычным.

2. Рассмотрим класс преобразований  $L$ , переводящих один ряд в другой без изменения суммы:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N + \dots = S \rightarrow \\ \rightarrow b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_N + \dots = S. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3. Убедимся, что класс  $L$  достаточно широк и позволяет эффективно переводить сходящиеся ряды в расходящиеся и наоборот.

4. Опишем класс преобразований  $L$ : это и будут те новые «правила игры», которые позволят свободно манипулировать с рядами, не обращая внимание на их сходимость.

Реализована ли эта программа в современной математике? Фактически, да. Во всяком случае, описан достаточно широкий подкласс класса  $L$ , вполне достаточный для практических целей. Но, к сожалению, теория не имеет того изящного вида, который мы попытались представить. Дело в том, что проблемы возникают уже на уровне первого пункта: не удается дать определение суммы, которое было бы одинаково удобно для всех случаев — методы суммирования, удобные для сильно расходящихся рядов, оказываются неудовлетворительными для слабо расходящихся и наоборот. Поэтому принимается предельно либеральная точка зрения: формально допускаются любые определения суммы, а математика, как абстрактная наука, изучает лишь их взаимное соответствие. Выбор же конкретного определения возлагается на потребителя. Такая позиция математиков выглядит не вполне джентльменской: если потребителю известно определение суммы, то во всем остальном он разберется самостоятельно. Но эта позиция имеет под собой реальные основания (разд. 7).

В принципе известно, как решать подобные проблемы. Вспомним, как в физике вводится стандарт температуры. Здесь тоже нет единого метода измерения, охватывающего всю область температур; поэтому вводится несколько стандартов — для высоких температур, для низких, для сверхнизких и

т. д., — которые частично перекрываются и в области перекрытия дают одно и то же. Аналогичным образом можно поступить и в теории расходящихся рядов, где имеется много «хороших» методов суммирования, полностью друг с другом согласованных<sup>2)</sup>, на основе которых и естественно принять комбинированное определение суммы ряда. Фактически «хорошими» являются методы, основанные на принципе Эйлера; поэтому такой подход возвращает нас к этому принципу, но на более высоком формальном уровне и с некоторыми ограничениями.

В качестве примера приведем два возможных определения суммы.

*Определение Эйлера.* Если степенной ряд (3.7) сходится при малых  $x$ , то он определяет регулярную функцию  $f(x)$ , аналитическое продолжение которой дает сумму ряда (3.7) за пределами круга сходимости.

В физических приложениях это определение принимается без оговорок. Как уже указывалось, оно не является вполне замкнутым, так как остается вопрос о выборе ветви аналитической функции. Однако в ситуациях, когда такое определение имеет смысл, все вычисления могут быть проделаны с использованием лишь сходящихся рядов, что и устраняет указанную неопределенность. Реальная потребность в теории расходящихся рядов возникает лишь в случае нулевого радиуса сходимости, когда определение Эйлера теряет смысл.

*Определение Бореля* применимо и в последнем случае; согласно ему сумма исходного ряда в (3.11) дается формулами (3.12). Это определение согласуется с другими определениями, основанными на принципе Эйлера, и удовлетворяет всем необходимым требованиям.

### 3.4. Асимптотическая трактовка расходящихся рядов

Современная теория расходящихся рядов имеет «два источника — две составные части». Изложенное выше представляет суть теории суммирования, в законченном виде сформулированной Борелем [29]. Более широко известна асимптотическая трактовка расходящихся рядов, принадлежащая Пуанкаре [30]. Степенной ряд является асимптотическим для функции  $f(x)$ , если

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N + R_N(x), \quad (3.14)$$

<sup>2)</sup> Но существует и много «плохих», которые противоречат друг другу.

где

$$R_N(x) = O(x^{N+1}), \quad x \rightarrow 0, \quad (3.15)$$

т. е. при малых  $x$  функция  $f(x)$  хорошо аппроксимируется отрезком ряда. Асимптотическая трактовка конструктивна только при наличии малого параметра, но в этом случае является наиболее удобной — она позволяет не проводить суммирования далеких членов ряда и даже не интересоваться их поведением. Другим достоинством является возможность построения асимптотического ряда (3.6) по произвольной системе функций — при условии, что каждая из функций  $f_n(x)$  стремится к нулю быстрее, чем  $f_{n-1}(x)^3$ .

Соответствие между функциями и степенными асимптотическими рядами не является взаимно-однозначным, так как к  $f(x)$  можно добавить функцию типа  $\exp(-a/x)$ , для которой все коэффициенты ряда (3.14) равны нулю. Для рядов, сходящихся при малых  $x$ , эта неоднозначность исключается требованием аналитичности при  $x = 0$ , тогда как для рядов с нулевым радиусом сходимости такое условие наложить нельзя. На первый взгляд, это означает невозможность приписать расходящемуся ряду какую-то определенную сумму.

В действительности это не так. Смысл асимптотического равенства в том, что частичная сумма ряда  $a_0 + \dots + a_N x^N$  с некоторой точностью  $R_N(x)$  «похожа» на функцию  $f(x)$ . Ничего удивительного, что таких функций для заданной точности оказывается много. Если уменьшать допустимую величину остаточного члена  $R_N(x)$ , то множество таких функций сужается и в конечном итоге может остаться одна. Как выясняется, именно это и происходит: достаточно лишь немного ужесточить форму остаточного члена, чтобы соответствие между функциями и асимптотическими рядами стало взаимно-однозначным. Именно, вместо стандартного условия (3.15) достаточно принять так называемое сильное асимптотическое условие

$$|R_N(x)| < C_N |x|^{N+1}, \quad x \in G, \quad (3.16)$$

где  $G$  — некоторая область, содержащая точку  $x = 0$ ,  $C_N$  — специально подобранные коэффициенты. Единственную функцию, которая удовлетворяет сильному асимптотическому условию и «больше всего похожа» на асимптотический ряд, как раз

<sup>3)</sup> При  $x \geq 1$  ряду (3.6), в отличие от ряда (3.7), нельзя придать вообще никакого смысла, но это и не очень актуально: если разложение не регулярно и не использует малого параметра, то зачем им пользоваться?

и естественно считать его суммой. Согласно теореме Ватсона [27], для широкого класса расходящихся рядов эта единственная функция определяется борелевским интегралом (3.12). Таким образом, как теория суммирования, так и асимптотическая теория приходят к признанию борелевской суммы в качестве естественной суммы расходящегося ряда.

Из сказанного ясно, как решается проблема непертурбативных вкладов типа  $\exp(-a/x)$ , которая часто считается аргументом против использования рядов теории возмущений. Принятие борелевского определения суммы означает, что такие члены не должны в явном виде добавляться к борелевскому интегралу (3.12). При формальных манипуляциях со степенными рядами такие члены не возникают, если не проводить тейлоровских разложений в заведомо сингулярных точках.

### 3.5. Физические аргументы

Приведем теперь физические аргументы в пользу того, что ряды теории возмущений должны пониматься в борелевском смысле.

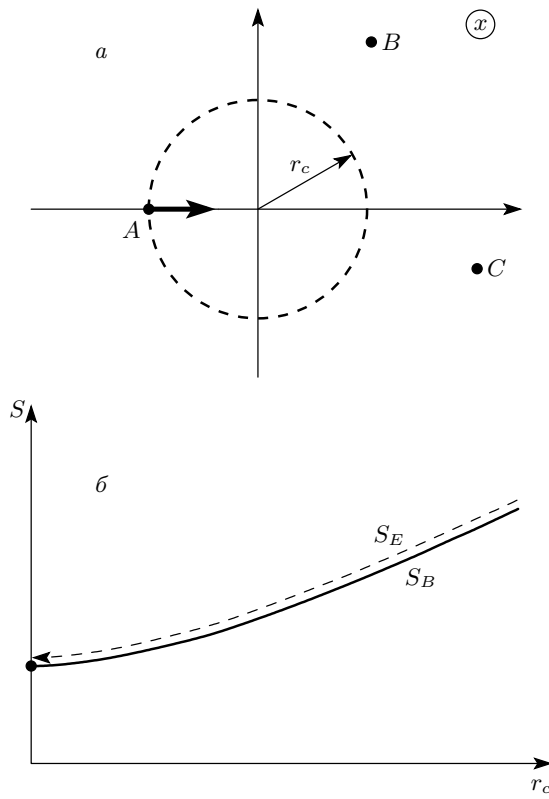
Пусть степенной ряд (3.7) имеет конечный радиус сходимости; тогда определяемая им аналитическая функция  $f(x)$  имеет особые точки  $A, B, C, \dots$ , находящиеся на конечном расстоянии от начала координат (рис. 3а). Можно доказать, что в этом случае борелевское определение суммы совпадает с эйлеровым, которое заведомо удовлетворительно для физических приложений.

Пусть одна из особых точек  $A$  приближается к началу координат. В случае полюса или степенной сингулярности это приведет к расходимости коэффициентов ряда, и при нулевом радиусе сходимости он потеряет смысл. Но существует категория сингулярностей, которые можно приближать к началу координат, не вызывая расходимости коэффициентов, — это точки ветвления с экспоненциально убывающим скачком на разрезе. Так, асимптотике Липатова (2.5) соответствует скачок на разрезе<sup>4)</sup> для функции  $F(g)$  [31, 32]:

$$\Delta F(g) = 2\pi ic \left(\frac{1}{ag}\right)^b \exp\left(-\frac{1}{ag}\right). \quad (3.17)$$

<sup>4)</sup> Соответствие между (3.17) и (2.5) можно установить, вычисляя скачок на разрезе для борелевской суммы ряда с асимптотикой коэффициентов (2.5). Другой способ вывода — записать интегральную формулу Коши для точки  $g$ , лежащей в области аналитичности, и деформировать контур интегрирования так, чтобы он проходил вокруг разреза. Тогда скачок на разрезе (3.17) порождает асимптотику (2.5) коэффициентов разложения.





**Рис. 3.** Если одна из особых точек  $A$  приближается к началу координат, то радиус сходимости  $r_c$  уменьшается ( $a$ ). При конечных  $r_c$  эйлерова сумма  $S_E$  совпадает с борелевской  $S_B$ ; при  $r_c = 0$  первая теряет смысл, тогда как вторая доопределяет ее по непрерывности ( $b$ )

При уменьшении радиуса сходимости  $r_c$  борелевская и эйлерова суммы изменяются, оставаясь равными друг другу; при  $r_c = 0$  эйлерова сумма теряет смысл, тогда как борелевская соответствует ее доопределению по непрерывности (рис. 3б).

Пределу  $r_c \rightarrow 0$  можно придать прямой физический смысл. Вернемся к задаче о ферми-газе с точечным взаимодействием, обсуждавшейся в разд. 1. Куперовская неустойчивость имеет место для произвольных  $g < 0$  лишь при температуре, равной нулю. При конечной температуре  $T$  область неустойчивости сдвигается в сторону отрицательных  $g$  на величину  $g_c$ , которая связана с температурой соотношением типа формулы БКШ,  $T \propto \exp\{-\text{const}/g_c\}$ . В результате ряд теории возмущений приобретает конечный радиус сходимости  $g_c$ , который стремится к нулю при понижении температуры. Вообще говоря, значение некоторой величины, вычисленное при строгом нуле температуры, не совпадает с ее преде-

лом при  $T \rightarrow 0$ . Физический же смысл имеет именно предел  $T \rightarrow 0$ , т. е. значение при  $T = 0$  всегда правильно доопределять по непрерывности. Именно это и делает борелевская сумма ряда.

#### 4. АСИМПТОТИКА ЛИПАТОВА В РАЗНЫХ СЛУЧАЯХ

Вычисление асимптотики Липатова (2.5) оказывается достаточно громоздким, если ставить целью нахождение всех ее параметров  $a, b, c$ . Если же ограничиться определением только ее функциональной формы, то возможны простые структурные вычисления, сводящиеся к формальному разложению вблизи перевала и выделению зависимости от  $N$ . Ниже мы продемонстрируем такие вычисления для основных задач теоретической физики.

##### 4.1. Теория $\varphi^4$

Начнем с  $n$ -компонентной теории  $\varphi^4$ , для которой действие имеет вид

$$S\{g, \varphi\} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n [\partial_\mu \varphi_\alpha(x)]^2 + \frac{1}{2} m^2 \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha^2(x) + \frac{1}{4} g \left( \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha^2(x) \right)^2 \right\} \quad (4.1.1)$$

( $d$  — размерность пространства) и рассматриваются функциональные интегралы вида

$$Z_M(g) = \int D\varphi \varphi_{\alpha_1}(x_1) \varphi_{\alpha_2}(x_2) \dots \varphi_{\alpha_M}(x_M) \times \exp(-S\{g, \varphi\}), \quad (4.1.2)$$

через которые выражаются  $M$ -точечные функции Грина

$$G_M(g) = \frac{Z_M(g)}{Z_0(g)}, \quad (4.1.3)$$

соответствующие диаграммам с  $M$  внешними концами. В дальнейшем будем использовать сокращенные обозначения для интеграла (4.1.2),

$$Z(g) = \int D\varphi \varphi^{(1)} \dots \varphi^{(M)} \exp(-S\{g, \varphi\}), \quad (4.1.4)$$

и нормировать его на аналогичный интеграл с  $M = 0, g = 0$ , включая множитель  $Z_0(0)^{-1}$  в символ  $D\varphi$ . Фактически явный вид действия нам не требуется, а будут использоваться лишь характерные

для него свойства однородности, позволяющие записать его в виде

$$S\{g, \varphi\} = \frac{S\{\phi\}}{g}, \quad \text{где } \varphi = \frac{\phi}{\sqrt{g}}. \quad (4.1.5)$$

Начнем с конечномерного интеграла типа (4.1.4), когда  $D\varphi = d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_m$ , и введем обозначения

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_m \end{pmatrix}, \quad S'\{\phi\} = \begin{pmatrix} \partial S / \partial \phi_1 \\ \partial S / \partial \phi_2 \\ \dots \\ \partial S / \partial \phi_m \end{pmatrix}, \quad (4.1.6)$$

$$S''\{\phi\} = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right\|,$$

которые позволяют записывать все выражения по аналогии с однократным интегралом. При переходе к бесконечному числу интегрирований  $S'\{\phi\}$  и  $S''\{\phi\}$  перейдут в первую и вторую функциональные производные, понимаемые соответственно как вектор и линейный оператор.

Согласно разд. 2, коэффициенты разложения даются формулой

$$Z_N = \oint_C \frac{dg}{2\pi i g} \int D\varphi \varphi^{(1)} \dots \varphi^{(M)} \times \exp\left(-\frac{S\{\phi\}}{g} - N \ln g\right), \quad (4.1.7)$$

а условия перевала имеют вид

$$S'\{\phi_c\} = 0, \quad g_c = \frac{S\{\phi_c\}}{N}. \quad (4.1.8)$$

Разложение выражения в экспоненте (4.1.7) до квадратичных членов по  $\delta\phi = \phi - \phi_c$  и  $\delta g = g - g_c$  дает

$$-N - N \ln g_c - \frac{N}{2} \frac{(\delta\phi, S''\{\phi_c\}\delta\phi)}{S\{\phi_c\}} - \frac{N}{2g_c^2} (\delta g)^2. \quad (4.1.9)$$

Учитывая, что

$$\delta\phi = \sqrt{g_c} \left( \delta\varphi + \frac{\delta g}{2g_c} \varphi_c \right), \quad \delta\varphi = \varphi - \varphi_c, \quad (4.1.10)$$

и сдвигая начало отсчета  $\delta\varphi$ , имеем

$$Z_N = e^{-N} g_c^{-N-M/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \int D\varphi \phi_c^{(1)} \dots \phi_c^{(M)} \times \exp\left(-\frac{1}{2} (\delta\varphi, S''\{\phi_c\}\delta\varphi) + \frac{N}{2} t^2\right), \quad (4.1.11)$$

где мы положили  $\delta g = ig_c t$ , так как перевальная точка проходится в вертикальном направлении. Вычисление гауссова интеграла дает

$$Z_N = \frac{\text{const}}{\sqrt{-\det[S''\{\phi_c\}]}} S\{\phi_c\}^{-N} \times \Gamma\left(N + \frac{M}{2}\right), \quad (4.1.12)$$

и воспроизводится функциональная форма асимптотики Липатова (2.5).

Результат (4.1.12) не зависит от числа интегрирований  $m$  и в принципе остается справедливым при  $m \rightarrow \infty$ , т. е. при переходе к функциональному интегралу. Однако в реальном функциональном интеграле всегда имеются нулевые моды, связанные с симметрией действия,  $S\{\phi\} = S\{\hat{L}\phi\}$ , относительно некоторой непрерывной группы преобразований, определяемых оператором  $\hat{L}$ ; тогда если  $\phi_c$  — инстантон (т. е. решение уравнения  $S'\{\phi_c\} = 0$ ), то и  $\hat{L}\phi_c$  — тоже инстантон ( $S'\{\hat{L}\phi_c\} = 0$ ). Ввиду непрерывности группы преобразований существует оператор  $\hat{L}$ , сколь угодно близкий к единичному,  $\hat{L}_\epsilon = 1 + \epsilon \hat{T}$ , откуда легко заключить, что  $\hat{T}\phi_c$  есть собственный вектор оператора  $S''\{\phi_c\}$ , соответствующий нулевому собственному значению. Поэтому  $\det[S''\{\phi_c\}] = 0$  и результат (4.1.12) расходится. Эта расходимость в действительности фиктивна и связана лишь с неприменимостью гауссова приближения для интегрирования по нулевым модам.

Для корректного интегрирования по последним вводятся коллективные переменные  $\lambda_i$ , которые формальным образом определяются для произвольной конфигурации  $\varphi$  и являются ее функционалами,  $\lambda_i = f_i\{\varphi\}$ . Примером такой переменной является центр инстантона  $x_0$ , который можно определить условием

$$\int d^d x \varphi^4(x) (x - x_0) = 0, \quad (4.1.13)$$

так что

$$x_0 = \frac{\int d^d x \varphi^4(x) x}{\int d^d x \varphi^4(x)}. \quad (4.1.14)$$

Интегрирование по коллективным переменным вводится путем внесения под интеграл (4.1.11) разложения единицы

$$1 = \prod_{i=1}^r \int d\lambda_i \delta(\lambda_i - f_i\{\varphi\}), \quad (4.1.15)$$

где функционалы  $f_i\{\varphi\}$  можно выбрать<sup>5)</sup> однородными по  $\varphi$  со степенью однородности равной нулю (ср. с (4.1.14)). Линеаризуем аргументы  $\delta$ -функций в (4.1.15) вблизи перевальной конфигурации,

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{i=1}^r \int d\lambda_i \delta(\lambda_i - f_i\{\varphi_c\} - (f'_i\{\varphi_c\}, \delta\varphi)) = \\ &= \prod_{i=1}^r \int d\lambda_i \delta(\lambda_i - f_i\{\phi_c\} - \\ &\quad - \sqrt{g_c}(f'_i\{\phi_c\}, \delta\varphi)) , \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

и выберем инстантон так, чтобы  $\lambda_i - f_i\{\phi_c\} = 0$  (так в (4.1.14) этому соответствует выбор решения, симметричного относительно точки  $x = x_0$ ); тогда  $\phi_c$  становится функцией  $\lambda_i$ . т.е.  $\phi_c \equiv \phi_\lambda$ . Сделаем линейную замену  $\delta\varphi \rightarrow \hat{S}\delta\varphi$  с  $\det \hat{S} = 1$ , диагонализующую матрицу оператора  $S''\{\phi_c\}$ , и положим

$$D\varphi = D'\varphi \prod_{i=1}^r d\tilde{\varphi}_i , \quad (4.1.17)$$

где мы выделили  $r$  переменных интегрирования (отмечаемых тильдой), которые соответствуют нулевым собственным значениям оператора  $S''\{\phi_c\}$  и фактически не входят в экспоненту (4.1.11). Подставляя (4.1.16, 4.1.17) в (4.1.11), устраняя  $\delta$ -функции интегрированием по  $\delta\tilde{\varphi}_i$  и вычисляя гауссов интеграл по  $D'\varphi$ , имеем

$$\begin{aligned} Z_N &= c S_0^{-N} \Gamma\left(N + \frac{M+r}{2}\right) , \\ S_0 &= S\{\phi_c\} , \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{S_0^{-(M+r)/2}}{(2\pi)^{1+r/2}} \sqrt{\frac{\det S''\{0\}}{\det[S''\{\phi_c\}]_{P'}}} \frac{1}{\det[f'\{\phi_c\}]_P} \times \\ &\quad \times \int \prod_{i=1}^r d\lambda_i \phi_\lambda^{(1)} \dots \phi_\lambda^{(M)} , \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

где  $f'\{\phi_c\}$  — оператор, матрица которого составлена из столбцов  $f'_i\{\phi_c\}$ , индексы  $P$  и  $P'$  отмечают проектирование на подпространство нулевых мод и подпространство, дополнительное к нему<sup>6)</sup>. При фактическом вычислении константы  $c$  возникают ультрафиолетовые расходимости, которые, как обычно,

<sup>5)</sup> Фактически результаты не зависят от конкретного вида функционалов [33] и существенна лишь их линейная независимость.

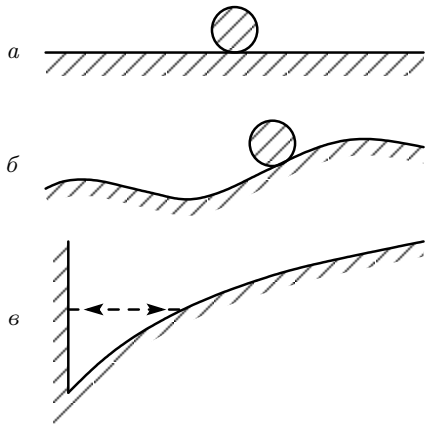
<sup>6)</sup> В некоторых случаях  $\det[f'\{\phi_c\}]_P$  зависит от коллективных переменных и должен вноситься под интеграл по  $d\lambda_i$ .

устраняются перенормировкой массы и заряда. Общая схема таких перенормировок разработана Брезаном и Паризи [8, 34]. Конкретные значения параметров асимптотики (4.1.18) могут быть найдены в работах [7, 14, 34, 35], а наиболее общие формальные результаты — в работах [36–38].

Согласно (4.1.18) на каждую степень свободы, соответствующую нулевым модам, приходится  $1/2$  в аргументе гамма-функции. Это напоминает классический закон равномерного распределения и при ближайшем рассмотрении в точности ему соответствует. Действительно, классическая статистическая сумма  $Z$  определяется конфигурационным интегралом от  $\exp(-H/T)$  и при увеличении числа колебательных степеней свободы  $r_{osc}$  на единицу происходит замена  $Z \rightarrow ZT^{1/2}$ , что дает дополнительный вклад  $1/2$  в теплоемкость [39]. Интересующий нас интеграл (4.1.4) определяется экспонентой  $\exp(-S\{\phi\}/g)$ , и константа связи  $g$  играет роль температуры. Увеличение на единицу числа нулевых мод  $r$  соответствует уменьшению на единицу  $r_{osc}$  и дает замену  $Z \rightarrow Zg^{-1/2}$ ; при вычислении асимптотики Липатова множитель  $g^{-1/2}$  оценивается в перевальной точке  $g_c \sim 1/N$  (см. (4.1.8)), что приводит к замене  $Z_N \rightarrow Z_N N^{1/2}$  и добавлению  $1/2$  в аргумент гамма-функции. В теории  $\varphi^4$  при  $d < 4$  полное число нулевых мод равно  $r = d + n - 1$ , из которых  $d$  соответствуют трансляциям инстантона, а  $(n - 1)$  — его вращениям в векторном пространстве. В безмассовой четырехмерной теории к ним добавляется дилатационная мода, соответствующая изменению радиуса инстантона и связанная с масштабной инвариантностью.

Закон равномерного распределения может нарушаться при наличии мягких мод, которые связаны с приближенными симметриями системы. Тогда некоторые степени свободы в первом приближении выглядят как нулевые моды (рис. 4а), но при более точном рассмотрении соответствуют движению в медленноменяющемся потенциальном рельефе (рис. 4б), который может сводиться к колебаниям в неаналитическом минимуме (рис. 4в); тогда их вклад в аргумент гамма-функции оказывается отличным от нуля и  $1/2$ .

Проблема, возникающая при наличии мягких мод, состоит в том, что инстантон  $\phi_c$  является лишь приближенным решением уравнения  $S'\{\phi\} = 0$ , тогда как точного решения может вообще не существовать. Поэтому при разложении действия вблизи  $\phi_c$  возникают линейные по  $\delta\phi$  члены, требующие аккуратного исключения. Введем коллективную переменную  $z$ , характеризующую положение в медлен-



**Рис. 4.** Мягкие моды в первом приближении выглядят как нулевые (а), но при более точном рассмотрении соответствуют движению в медленноменяющемся потенциале (б), который может сводиться к неаналитическому минимуму (в)

меняющемся потенциале (рис. 4б), которая формальным образом определяется для произвольной инстантонной конфигурации и является ее функционалом,  $z = f\{\phi\}$ . Идея состоит в поиске экстремума действия при дополнительном условии (констрейнте)  $f\{\phi\} = \text{const}$ , т. е. фиксированном значении  $z$ , и последующем интегрировании по  $z$ . Тогда инстантон определяется уравнением

$$S'\{\phi_c\} - \mu f'\{\phi_c\} = 0 \quad (4.1.20)$$

( $\mu$  — множитель Лагранжа), а интегрирование по  $z$  вводится путем внесения под функциональный интеграл разложения единицы

$$1 = \int dz \delta(z - f\{\phi\}) = \int dz \delta(z - f\{\phi_c\} - (f'\{\phi_c\}, \delta\phi)) . \quad (4.1.21)$$

Выбирая инстантон из условия  $z = f\{\phi_c\}$ , получим

$$Z(g) = \int D\varphi \varphi^{(1)} \dots \varphi^{(M)} \times \exp \left\{ -\frac{S\{\phi_c\} + (S'\{\phi_c\}, \delta\phi) + \frac{1}{2}(\delta\phi, S''\{\phi_c\}\delta\phi)}{g} \right\} \times \int dz \delta(-(f'\{\phi_c\}, \delta\phi)) , \quad (4.1.22)$$

и линейные по  $\delta\phi$  члены в экспоненте устраняются  $\delta$ -функцией ввиду условия (4.1.20). Поскольку  $\phi_c$  является функцией  $z$ , после интегрирования по  $D\varphi$

остается нетривиальный интеграл по  $z$ , который и соответствует движению в медленноменяющемся потенциале (рис. 4б). Заметим, что преобразования (4.1.20)–(4.1.22) ни к чему не обязывают и при желании любая степень свободы может быть объявлена мягкой модой; разумеется, это имеет смысл лишь в случаях, когда есть сомнения в справедливости гауссова приближения.

Примерами мягких мод являются дилатации в массивной четырехмерной или  $(4-\epsilon)$ -мерной теории  $\varphi^4$  [37, 38] и изменение расстояния между элементарными инстантонами в двухинстантонной конфигурации (разд. 4.4 и разд. 9). Из сказанного ясно, что в общем случае параметр  $b$ , определяющий сдвиг аргумента гамма-функции, содержит вклад от внешних линий ( $M/2$ ), нулевых мод ( $r/2$ ) и дополнительный вклад  $\nu$ , связанный с мягкими модами.

## 4.2. Квантовая электродинамика

Простейший (вакуумный) функциональный интеграл для квантовой электродинамики имеет вид

$$Z = \int DAD\bar{\psi}D\psi \exp \left\{ -\int d^4x \left[ \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(i\gamma_\nu \partial_\nu - m + e\gamma_\nu A_\nu)\psi \right] \right\} , \quad (4.2.1)$$

где  $A_\nu$  — вектор-потенциал, а  $\bar{\psi}$  и  $\psi$  — фермионные поля, построенные с использованием так называемых грассмановых переменных. Последние являются абстрактными объектами, для которых формальным образом определены алгебраические операции [40, 41], и наличие их в экспоненте не позволяет прямо использовать обычную схему метода Липатова. Выход из ситуации [15] основан на том, что действие квадратично по фермионным полям, а взятие гауссова интеграла является одной из элементарных операций в грассмановой алгебре — он равен детерминанту соответствующей квадратичной формы:

$$Z = \int DA \det(i\gamma_\nu \partial_\nu - m + e\gamma_\nu A_\nu) \times \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \right\} . \quad (4.2.2)$$

Записывая  $\det(\dots)$  как  $\exp\{\ln \det(\dots)\}$ , получим эффективное действие, содержащее только вектор-потенциал  $A_\nu$ , к которому уже можно применить метод Липатова.

Детерминант оператора является слишком сложным объектом, чтобы с ним можно было конструктивно работать, и в конце 70-х годов [22, 23] были

затрачены большие усилия для приведения его к более удобной форме. Трудность состояла в том, что нужно было установить общие свойства перевальной конфигурации, еще не имея удобного выражения для эффективного действия [22]. Было установлено, что для перевальной конфигурации величина  $eA_\nu(x)$  велика и можно воспользоваться асимптотикой детерминанта при  $e \rightarrow i\infty$ , так как максимальная скорость роста достигается при чисто мнимых  $e$  [20]

$$\begin{aligned} \det(i\gamma_\nu\partial_\nu - m + e\gamma_\nu A_\nu) &= \\ &= \exp\left\{\frac{e^4}{12\pi^2} \int d^4x (A_\nu^2)^2\right\}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Результат (4.2.3) не является калибровочно-инвариантным и справедлив лишь для узкого множества калибровок, выбранных из условия, чтобы вектор-потенциал изменялся на том же характерном масштабе, что и физическое электромагнитное поле, которое предполагается квазиклассическим<sup>7)</sup>. Фактически указанная калибровка близка к лоренцевой, в чем можно убедиться, рассматривая конфигурации, обладающие достаточно высокой симметрией [20, 23].

С учетом (4.2.3) в (4.2.2) возникает функциональный интеграл с эффективным действием ( $g = e^2/4\pi$  — постоянная тонкой структуры)

$$\begin{aligned} S_{eff}\{A\} &= \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{4}{3}g^2 (A_\nu^2)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

для которого асимптотика теории возмущений может быть найдена в перевальном приближении. Структура асимптотики определяется свойствами однородности для действия, которые аналогичны таковым для теории  $\varphi^4$  при использовании  $g^2$  в качестве константы связи. Согласно разд. 4.1 общий член асимптотики имеет вид  $cS_0^{-N}\Gamma(N+b)g^{2N}$ , где  $S_0$  — инстантонное действие. Фактически разложение происходит по произвольным целым (а не только четным) степеням  $g$  и замена  $N \rightarrow N/2$  дает результат  $cS_0^{-N/2}\Gamma(N/2+b)g^N$  для вклада  $N$ -го порядка. Справедливость указанной формальной замены связана с тем, что прямое разложение (4.2.2) по последнему члену в (4.2.4) некорректно, так как функциональное интегрирование будет затрагивать конфигурации, для которых результат (4.2.4) несправедлив. Вычисление должно проводиться методом

<sup>7)</sup> Общая схема вывода результатов типа (4.2.3) иллюстрируется в разд. 4.3 на более простом примере.

перевала, который дает непрерывную функцию от  $N$ , а тот факт, что она должна браться в целых или полуцелых точках, является внешним условием.

С учетом значения инстантонного действия для далеких коэффициентов разложения интеграла (4.2.1) имеем [14, 15]

$$Z_N = \text{const } S_0^{-N/2} \Gamma\left(\frac{N+r}{2}\right), \quad S_0 = \frac{4\pi^3}{3^{3/2}}, \quad (4.2.5)$$

где полное число нулевых мод  $r$  равно 11: в него входят 4 трансляции, масштабное преобразование и 6 четырехмерных вращений (инстантон по симметрии соответствует твердому телу неправильной формы).

Изложенную схему можно применить для исследования других величин [42]. Наиболее общая вершина в КЭД, содержащая  $M$  фотонных и  $2L$  электронных линий, определяется функциональным интегралом

$$\begin{aligned} Z_{M,L} &= \int DAD\bar{\psi}D\psi A(x_1) \dots \\ &\dots A(x_M) \psi(y_1)\bar{\psi}(z_1) \dots \psi(y_L)\bar{\psi}(z_L) \times \\ &\times \exp\left\{-\int d^4x \left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{\psi}(i\gamma_\nu\partial_\nu - m + e\gamma_\nu A_\nu)\psi\right]\right\}. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Интегрирование по фермионным полям дает

$$\begin{aligned} Z_{M,L} &= \int DA A(x_1) \dots \\ &\dots A(x_M) G(y_1, z_1) \dots G(y_L, z_L) \times \\ &\times \det(i\gamma_\nu\partial_\nu - m + e\gamma_\nu A_\nu) \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2\right\} + \dots, \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

где  $G(x, x')$  — функция Грина оператора Дирака

$$(i\gamma_\nu\partial_\nu - m + e\gamma_\nu A_\nu) G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (4.2.8)$$

а многоточием показаны члены с другими спариваниями  $\psi(y_i)$  и  $\bar{\psi}(z_k)$ . Функциональная форма результата может быть найдена путем описанных выше структурных вычислений, сводящихся к размерному анализу. Легко показать, что для перевальной конфигурации  $e_c \sim N^{-1/4}$ ,  $A_c(x) \sim N^{1/2}$ ; для установления размерности  $G(x, x')$  выпишем вытекающее из (4.2.8) уравнение Дайсона

$$\begin{aligned} G(x, x') &= G_0(x - x') - \\ &- \int d^4y G_0(x - y) e\gamma_\nu A_\nu(y) G(y, x'). \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Чтобы выяснить структуру решения, рассмотрим скалярный аналог (4.2.9) и предположим, что функция  $A_\nu(x)$  сильно локализована вблизи  $x = 0$ ; тогда в интеграле можно положить  $G(y, x') \approx G(0, x')$ , после чего уравнение легко решается:

$$G(x, x') = G_0(x - x') - \frac{G_0(-x') \int d^4 y G_0(x - y) e \gamma_\nu A_\nu(y)}{1 + \int d^4 y G_0(-y) e \gamma_\nu A_\nu(y)}. \quad (4.2.10)$$

Ввиду  $e A_\nu(x) \sim N^{1/4}$  и конечности предела (4.2.10) при  $e \rightarrow \infty$  имеем  $G(x, x') \sim N^0$ ; естественно ожидать, что этот результат имеет общий характер и не связан со сделанными предположениями. Вклад  $N$ -го порядка для интеграла (4.2.6) имеет вид

$$\text{const} \left( \frac{3^{3/2}}{4\pi^3} \right)^{N/2} \Gamma \left( \frac{N + r + M}{2} \right) (-g)^N \quad (4.2.11)$$

для четных  $M$  и с лишним множителем  $e N^{1/4}$  для нечетных  $M$ .

### 4.3. Другие задачи с фермионами

В качестве примера других задач с фермионами рассмотрим взаимодействие Юкавы [15], к которому почти без изменений сводится описание электрон-фононного взаимодействия в металле:

$$Z = \int D\varphi D\bar{\psi} D\psi \exp \left\{ - \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \bar{\psi} (i\gamma_\nu \partial_\nu + M) \psi + \lambda \bar{\psi} \varphi \psi \right] \right\}. \quad (4.3.1)$$

Интегрирование по фермионам дает

$$Z = \int D\varphi \det (i\gamma_\nu \partial_\nu + M + \lambda\varphi) \times \exp \left\{ - \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right] \right\}. \quad (4.3.2)$$

Преобразование фермионного детерминанта начнем с решения аналогичной задачи для детерминанта оператора Шредингера, нормированного на детерминант невозмущенной задачи (такая нормировка всегда возникает из-за нормировки функционального интеграла на вакуумный интеграл невзаимодействующей теории)

$$D(z) = \frac{\det [-\Delta - E + zV(x)]}{\det [-\Delta - E]} = \det \left[ 1 + z \frac{V(x)}{-\Delta - E} \right]. \quad (4.3.3)$$

Нетрудно показать, что

$$D(z) = \prod_s \left( 1 + \frac{z}{\mu_s} \right), \quad (4.3.4)$$

где  $\mu_s$  — собственные значения задачи

$$\{-\Delta - E - \mu_s V(x)\} e_s(x) = 0. \quad (4.3.5)$$

Число электронных состояний  $s$  с энергией меньше  $E$  в квазиклассическом потенциале  $-\mu V(x)$  может быть найдено методом Томаса–Ферми; вводя локальный фермиевский импульс

$$p(x) = \sqrt{E + \mu V(x)} \approx [\mu V(x)]^{1/2}, \quad (4.3.6)$$

имеем

$$s = \int n(x) d^d x = \int \frac{K_d}{d} p^d(x) d^d x \approx \int \frac{K_d}{d} [\mu V(x)]^{d/2} d^d x, \quad (4.3.7)$$

где  $n(x)$  — локальная плотность электронов,  $K_d$  — площадь единичной сферы в  $d$ -мерном пространстве, деленная на  $(2\pi)^d$ . Поскольку значение  $\mu_s$  в (4.3.5) соответствует условию, что ниже энергии  $E$  находится ровно  $s$  электронов, соотношение (4.3.7) определяет асимптотику  $\mu_s$  при больших  $s$ :

$$s = A \mu_s^{d/2}, \quad A = \frac{K_d}{d} \int [V(x)]^{d/2} d^d x. \quad (4.3.8)$$

Теперь легко оценить величину (4.3.4) при больших  $z$ :

$$\begin{aligned} \ln D(z) &= \sum_{s \sim 1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{z}{\mu_s} \right) \approx \\ &\approx A \frac{d}{2} \int_{\sim A^{-2/d}}^{\infty} d\mu_s \mu_s^{d/2-1} \ln \left( 1 + \frac{z}{\mu_s} \right) \approx \\ &\approx A \frac{d}{2} z^{d/2} \int_0^{\sim z A^{2/d}} \frac{dx}{x^{1+d/2}} \ln(1+x) \approx \\ &\approx A z^{d/2} \frac{\pi}{\sin(\pi d/2)}. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

При  $d < 2$  верхний предел интегрирования можно считать бесконечным, после чего интеграл вычисляется путем замены  $x \rightarrow ax$  под логарифмом и последующего дифференцирования по параметру  $a$ . Подстановка  $K_d = 2^{1-d} \pi^{-d/2} / \Gamma(d/2)$  дает окончательный результат

$$D(z) = \exp \left\{ - \frac{\Gamma(-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \int d^d x [zV(x)]^{d/2} \right\}. \quad (4.3.10)$$

Как известно, оператор Дирака получается путем факторизации оператора Клейна–Гордона, который после виковского разворота сводится к оператору Шредингера

$$-\Delta + m^2 = (i\gamma_\nu \partial_\nu + m) (-i\gamma_\nu \partial_\nu + m). \quad (4.3.11)$$

Аналогичное соотношение имеет место при замене  $m$  на  $\lambda\varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  — медленноменяющаяся функция. Нетрудно показать, что при больших  $\lambda$

$$\begin{aligned} \det \left( \frac{i\gamma_\nu \partial_\nu + M + \lambda\varphi}{i\gamma_\nu \partial_\nu + M} \right) &\approx \\ &\approx \sqrt{\det \left( \frac{-\Delta + \lambda^2 \varphi^2(x)}{-\Delta} \right)} \approx \\ &\approx \exp \left\{ -\frac{\Gamma(-d/2)}{2(4\pi)^{d/2}} \int d^d x [\lambda\varphi(x)]^d \right\} \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

и в (4.3.2) возникает эффективное действие

$$S_{eff} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\Gamma(-d/2)}{2(4\pi)^{d/2}} g^{d/2} \varphi^d(x) \right], \quad (4.3.13)$$

где  $g = \lambda^2$  — эффективная константа связи, по которой происходит разложение интеграла (4.3.1).

При  $2 \leq d < 4$  и  $d \geq 4$  расходимость интеграла в (4.3.9) устраняется путем перенормировки массы и заряда, в результате чего  $\ln(1+x)$  заменяется соответственно на  $\ln(1+x) - x$  и  $\ln(1+x) - x + x^2/2$ . Интеграл вычисляется путем замены  $x \rightarrow ax$  в последних величинах и последующего дифференцирования по параметру  $a$ ; получаемый результат для  $d \neq 2, 4$  формально совпадает с (4.3.13). При  $d = 2$  и  $d = 4$  следует учитывать конечность верхнего предела в последнем интеграле (4.3.9), после чего он вычисляется с логарифмической точностью.

Эффективное действие (4.3.13) приводится к виду

$$S_{eff}\{g, \varphi\} = \frac{S\{\phi\}}{g^{1/\alpha}}, \quad (4.3.14)$$

где

$$\phi = \varphi g^{1/2\alpha}, \quad \alpha = \frac{d-2}{d},$$

а интеграл для коэффициентов разложения заменами  $\tilde{g} = g^{1/\alpha}$ ,  $\tilde{N} = \alpha N$  приводится к виду, характерному для теории  $\varphi^4$ . Соответственно результат отличается от последней заменой  $N \rightarrow \alpha N$ :

$$Z_N = c S_0^{-\alpha N} \Gamma(\alpha N + b). \quad (4.3.15)$$

#### 4.4. Задачи с вырожденным вакуумом

Особую категорию задач представляют собой задачи с вырожденным вакуумом, для которых вычисление асимптотики Липатова имеет существенную специфику.

В качестве простейшего примера рассмотрим одномерный изинговский ферромагнетик, основное состояние которого двукратно вырождено: все его спины могут быть направлены вверх или вниз. Задача об экстремуме действия кроме двух указанных вакуумов имеет решение типа доменной стенки (рис. 5а), которое является примером топологического инстантона, соответствующего переходу между двумя вырожденными вакуумами. Связанная с этим проблематика обусловлена тем, что: а) вклад топологических инстантонов в асимптотику коэффициентов разложения оказывается чисто мнимым, что указывает в каком-то смысле на их несущественность; б) обычно в подобных задачах имеются теоремы об отсутствии других нетривиальных классических решений.

Чтобы разобраться в этом вопросе, снимем вырождение между вакуумами, приложив магнитное поле, ориентированное вдоль оси ферромагнетика. Тогда одиночные возбуждения типа доменной стенки возникать не могут — им соответствует бесконечно большой (в пределе бесконечного объема) проигрыш в энергии — но они могут возникать в виде пары «инстантон–антиинстантон» (рис. 5б). Если взаимодействие между компонентами пары соответствует отталкиванию, то существует равновесное расстояние между ними; при увеличении магнитного поля оно уменьшается и возникает локализован-

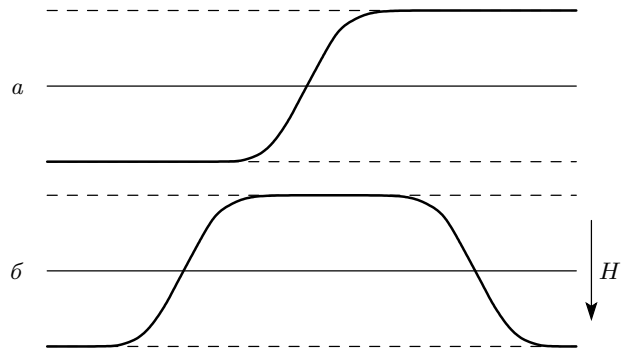


Рис. 5. Доменная стенка — пример топологического инстантона, возникающего в задачах с вырожденным вакуумом (а); при снятии вырождения перевальная конфигурация определяется инстантон–антиинстантонной парой (б)

ный инстантон, характерный для метода Липатова. При уменьшении магнитного поля расстояние между компонентами пары увеличивается и возрастают его флуктуации, так что в пределе точного вырождения пара распадается на свободные инстантон и антиинстантон.

Сильные флуктуации расстояния между компонентами пары приводят к тому, что условия применимости перевального приближения в методе Липатова оказываются довольно жесткими и соответствуют не  $N \gg 1$ , а  $N \gg 1/\epsilon$ , где  $\epsilon$  — малый параметр, характеризующий различие между вакуумами. С другой стороны, при  $1 \ll N \ll 1/\epsilon$  возникает промежуточная асимптотика, практически не зависящая от  $\epsilon$ , которая в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  превращается в истинную асимптотику вырожденной задачи. Из сказанного ясно, что для нахождения последней асимптотики можно вообще не рассматривать случай строгого вырождения  $\epsilon = 0$ . При любых же конечных  $\epsilon$  одиночные инстантоны не существуют и, следовательно, не дают вклада в асимптотику теории возмущений, которая определяется инстантон–антиинстантонной парой.

Изложенная физическая картина получена Брезаном, Паризи и Зинн-Жюстином [43] в результате рассмотрения квантовомеханической задачи о двухъямном потенциале. Можно ожидать, что аналогичная ситуация имеет место для других задач с вырожденным вакуумом, из которых наибольший интерес представляет теория Янга–Миллса.

#### 4.5. Теория Янга–Миллса и КХД

Топологический инстантон в теории Янга–Миллса был найден в работе Белавина и др. [44], что явилось первым указанием на вырождение вакуума в КХД. Перевальное вычисление функционального интеграла вблизи одноинстантонной конфигурации было произведено 'т Хофтом [45] для полей Янга–Миллса с  $SU(2)$ -симметрией, взаимодействующих с фермионами и скалярными частицами; обобщение на произвольную  $SU(N_c)$ -симметрию было дано в [46]. Липатов, Бухвостов, Малков [18] исследовали перевальные конфигурации для полей Янга–Миллса, взаимодействующих со скалярным полем; изменяя соотношение между двумя константами связи, входящими в теорию, оказалось возможным непрерывно перейти от инстантона, соответствующего теории  $\varphi^4$ , к перевальной конфигурации для чистой теории Янга–Миллса и убедиться, что она соответствует инстантон–антиинстантонной паре; тем самым изложенная выше физическая карти-

на была прослежена применительно к данной ситуации. Богомольный и Фатеев [17] воспользовались результатом 'т Хофта [45] для одиночного инстантона и вычислили вклад в асимптотику теории возмущений от инстантон–антиинстантонной конфигурации для полей Янга–Миллса с  $SU(2)$ -симметрией. Асимптотика Липатова в реальной КХД вычислялась Балицким [24] и Фалеевым и Сильвестровым [25, 26]. Ниже мы изложим общую схему таких вычислений.

Начнем с правила комбинирования инстантонов [33], которое сформулируем для функционального интеграла

$$Z_M(g) = \int DA A^{(1)} A^{(2)} \dots A^{(M)} \times \exp(-S\{A, g\}), \quad (4.5.1)$$

где  $A^{(i)}$  — бозонное поле, а индекс  $i$  включает в себя как координатные, так и внутренние степени свободы. Пусть путем замены  $A \rightarrow B/g$  действие  $S\{A, g\}$  приводится к виду  $S\{B\}/g^2$ , а уравнение  $S'\{B\} = 0$  имеет инстантонное решение  $B_c$ . Следуя схеме разд. 4.1, нетрудно показать, что одноинстантонный вклад в  $Z_M(g)$  имеет структуру

$$Z_M^{(1)}(g) = c_0 g^{-M-r} e^{-S_0/g^2} \times \int \prod_{i=1}^r d\lambda_i B_\lambda^{(1)} B_\lambda^{(2)} \dots B_\lambda^{(M)}, \quad (4.5.2)$$

где  $S_0 = S\{B_c\}$ ,  $r$  — число нулевых мод,  $\lambda_i$  — соответствующие им коллективные переменные, а  $B_\lambda$  — зависящая от них инстантонная конфигурация.

Если в качестве  $B_c$  взять комбинацию  $B_\lambda + B_{\lambda'}$  двух элементарных инстантонов, то соответствующий двухинстантонный вклад представится в виде суммы членов

$$Z_{LL'}(g) = c_0^2 g^{-M-2r} e^{-2S_0/g^2} \times \int \prod_{i=1}^r d\lambda_i d\lambda'_i B_\lambda^{(1)} \dots B_\lambda^{(L)} B_{\lambda'}^{(1)} \dots B_{\lambda'}^{(L')} \times \exp\left(-\frac{S_{int}(B_\lambda, B_{\lambda'})}{g^2}\right) \quad (4.5.3)$$

с  $L + L' = M$ . Взаимодействие инстантонов  $S_{int}(B_\lambda, B_{\lambda'})$  введено соотношением

$$S\{B_\lambda + B_{\lambda'}\} \equiv S\{B_\lambda\} + S\{B_{\lambda'}\} + S_{int}(B_\lambda, B_{\lambda'}), \quad (4.5.4)$$

и в пренебрежении им правая часть (4.5.3) есть просто произведение двух выражений типа (4.5.2) с



$M = L$  и  $M = L'$ . Экспонента ограничивает взаимодействие инстантонов условием  $S_{int}(B_\lambda, B_{\lambda'}) \lesssim g^2$ , и при малых  $g$  в предэкспоненте оно не существенно; это позволяет пренебречь перекрытием  $B_\lambda$  и  $B_{\lambda'}$ . В результате в сумме по  $L$  и  $L'$  остаются лишь члены с  $L = M$ ,  $L' = 0$  и  $L = 0$ ,  $L' = M$ , которые очевидно равны. Возникающий множитель 2 сокращается с комбинаторным множителем  $1/2!$ , который нужно ввести, ввиду того что конфигурации, отличающиеся перестановкой инстантонов, учитываются дважды. В результате двухинстантонный вклад имеет вид

$$Z_M^{(2)}(g) = c_0^2 g^{-M-2r} e^{-2S_0/g^2} \times \int \prod_{i=1}^r d\lambda_i d\lambda'_i B_\lambda^{(1)} \dots B_{\lambda'}^{(M)} \times \exp\left(-\frac{S_{int}(B_\lambda, B_{\lambda'})}{g^2}\right), \quad (4.5.5)$$

чем и определяется правило комбинирования инстантонов: помимо информации, содержащейся в (4.5.2), требуется знать взаимодействие инстантонов в области, где оно мало.

В релятивистских масштабнo-инвариантных теориях удобно явно выделить в (4.5.2) интегрирование по радиусу  $\rho$  и центру  $x_0$  инстантона [41], понимая под  $\lambda_i$  лишь внутренние степени свободы,

$$Z_M^{(1)}(g) = c_H g^{-M-r} e^{-S_0/g^2} \int \prod_i d\lambda_i \int d^4 x_0 \times \int d\rho \rho^{-M-5} e^{\nu \ln \mu \rho} B_\lambda(y_1) \dots B_\lambda(y_M), \quad (4.5.6)$$

где  $y_i = (x_i - x_0)/\rho$ ,  $\nu = -\beta_2 S_0$ ,  $\beta_2$  — первый не исчезающий коэффициент разложения функции Гелл-Манна–Лоу,  $\mu$  — импульс в точке нормировки, а член  $\exp(\nu \ln \mu \rho)$  однозначно извлекается из предэкспоненты требованием перенормируемости [41]. Формула (4.5.6) согласуется с результатом 'т Хофта для полей Янга–Миллса с  $SU(N_c)$ -симметрией ( $S_0 = 8\pi^2$ ,  $r = 4N_c$ ,  $\nu = (11N_c - 2N_f)/3$ ) [45, 46] и (после замены  $g^2 \rightarrow g$ ) с соответствующими результатами для теории  $\varphi^4$  [7, 14, 37].

Лагранжиан КХД имеет вид

$$L = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \sum_f \bar{\psi}_f \hat{D} \psi_f + \partial_\mu \bar{\omega}^a (\partial_\mu \omega^a - \bar{g} f^{abc} \omega^b A_\mu^c),$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \bar{g} f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (4.5.7)$$

$$\hat{D} = i\gamma_\mu (\partial_\mu - i\bar{g} A_\mu^a T^a),$$

где  $A_\nu^a$ ,  $\psi_f$ ,  $\omega^a$  — глюонные, кварковые и духовые поля,  $T^a$  и  $f^{abc}$  — генераторы фундаментального представления и структурные константы алгебры Ли,  $\alpha$  — параметр калибровки, индекс  $f$  нумерует сорта кварков, число которых равно  $N_f$ . Наиболее общий функциональный интеграл для КХД содержит в предэкспоненте  $M$  глюонных,  $2L$  духовых и  $2K$  кварковых полей

$$Z_{MLK} = \int DAD\bar{\omega}D\omega D\bar{\psi}D\psi A(x_1) \dots \dots A(x_M) \omega(y_1) \bar{\omega}(\bar{y}_1) \dots \omega(y_L) \bar{\omega}(\bar{y}_L) \times \times \psi(z_1) \bar{\psi}(\bar{z}_1) \dots \psi(z_K) \bar{\psi}(\bar{z}_K) \times \times \exp(-S\{A, \bar{\omega}, \omega, \bar{\psi}, \psi\}), \quad (4.5.8)$$

где мы опускаем векторные индексы, не существенные для наших целей. После замены  $A \rightarrow B/\bar{g}$  евклидово действие принимает вид

$$S\{A, \bar{\omega}, \omega, \bar{\psi}, \psi\} \rightarrow \frac{S\{B\}}{\bar{g}^2} + \int d^4 x \left[ \bar{\omega} \hat{Q} \omega + \sum_f \bar{\psi}_f \hat{D} \psi_f \right] \quad (4.5.9)$$

и интегрирование по фермионным полям дает

$$Z_{MLK} = (1/\bar{g})^M \int DA B(x_1) \dots \dots B(x_M) G(y_1, \bar{y}_1) \dots G(y_L, \bar{y}_L) \times \times \tilde{G}(z_1, \bar{z}_1) \dots \tilde{G}(z_K, \bar{z}_K) \det \hat{Q} \left( \det \hat{D} \right)^{N_f} \times \times \exp\{-S\{B\}/\bar{g}^2\} + \dots, \quad (4.5.10)$$

где  $G$  и  $\tilde{G}$  — функции Грина операторов  $\hat{Q}$  и  $\hat{D}$ , а многоточием показаны члены с другими спариваниями. Существенно, что  $S\{B\}$ ,  $G$  и  $\tilde{G}$  не зависят от  $\bar{g}$ . Функциональный интеграл (4.5.10) определяется янг-миллсовским действием и одноинстантонный вклад для него может быть выписан аналогично (4.5.2). Асимптотика теории возмущений определяется инстантон–антиинстантонной конфигурацией, вклад которой строится аналогично (4.5.5). Взаимодействие инстантонов определяется конформным параметром  $\xi$  [24]

$$S_{int} = -h \xi, \quad \xi = \frac{\rho_I^2 \rho_A^2}{(R^2 + \rho_I^2 + \rho_A^2)^2}, \quad (4.5.11)$$

где  $\rho_I$  и  $\rho_A$  — радиусы инстантона и антиинстантона,  $R$  — расстояние между их центрами,  $h = h(\lambda, \lambda')$  зависит от их ориентации в изотопическом пространстве. Далее нужно учесть, что

$\det \hat{D}\{B_\lambda + B_{\lambda'}\} \neq \det \hat{D}\{B_\lambda\} \det \hat{D}\{B_{\lambda'}\}$ , так как  $\det \hat{D}\{B_\lambda\}$  отличен от нуля лишь при учете конечности массы кварка, тогда как  $\det \hat{D}\{B_\lambda + B_{\lambda'}\}$  определяется взаимодействием инстантонов и остается конечным в безмассовом пределе [24],

$$\det \hat{D}\{B_\lambda + B_{\lambda'}\} = \text{const } \xi^{3/2}. \quad (4.5.12)$$

Выделяя в явном виде интегрирование по радиусам и центрам инстантонов и переходя к импульсному представлению, получим для инстантон–антиинстантонного вклада

$$\begin{aligned} Z_{MLL'}^{(IA)} &= \frac{\text{const}}{\bar{g}^{M+2r}} e^{-2S_0/g^2} \int \prod_i d\lambda_i d\lambda'_i \times \\ &\times \int d\rho \rho^{3M+6L+5L'-5} e^{2\nu \ln \mu \rho} \langle B_\lambda \rangle_{\rho p_1} \dots \langle B_\lambda \rangle_{\rho p_M} \times \\ &\times \langle G_\lambda \rangle_{\rho k_1, \rho k'_1} \dots \langle G_\lambda \rangle_{\rho k_L, \rho k'_L} \langle \tilde{G}_\lambda \rangle_{\rho q_1, \rho q'_1} \dots \\ &\dots \langle \tilde{G}_\lambda \rangle_{\rho q_{L'}, \rho q'_{L'}} \times \\ &\times \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi^{1+\nu/2-3N_f/2}} e^{-h(\lambda, \lambda') \xi / \bar{g}^2} + \dots, \quad (4.5.13) \end{aligned}$$

где  $\langle B \rangle_k$ ,  $\langle G \rangle_{k, k'}$ ,  $\langle \tilde{G} \rangle_{k, k'}$  — фурье-компоненты  $B(x)$ ,  $G(x, x')$ ,  $\tilde{G}(x, x')$ ,  $\rho \equiv \rho_I$ . Здесь учтено, что главный вклад происходит от области  $R \sim \rho_A \gg \rho_I$ , и использовано соотношение (18) работы [21].

Согласно рецепту работы [17], последний интеграл заменяется своим скачком на разрезе, после чего (4.5.13) дает скачок на разрезе полной величины  $Z_{MLL'}$ :

$$\begin{aligned} \Delta Z_{MLL'}(\bar{g}) &= i \text{const} \left( \frac{1}{\bar{g}} \right)^{M+2r+\nu-3N_f} \times \\ &\times \exp \left( -\frac{2S_0}{\bar{g}^2} \right), \quad (4.5.14) \end{aligned}$$

где учтена независимость  $B_\lambda$ ,  $G_\lambda$ ,  $\tilde{G}_\lambda$  от  $\bar{g}$  и предположена сходимости всех интегралов<sup>8)</sup>. Используя связь скачка на разрезе с асимптотикой коэффициентов разложения (см. (3.17)), получим для вклада  $N$ -го порядка в  $Z_{MLL'}$  [17, 24, 47]

$$\begin{aligned} [Z_{MLK}]_N \bar{g}^{2N} &= \text{const} (16\pi^2)^{-N} \times \\ &\times \Gamma \left( N + \frac{M}{2} + 4N_c + \frac{11(N_c - N_f)}{6} \right) \bar{g}^{2N} \quad (4.5.15) \end{aligned}$$

<sup>8)</sup> Для кваркового коррелятора интеграл по  $\rho$  содержит расходимости, способ устранения которых в [24, 25] вызывает сомнения [48]. При  $M \geq 1$  этот интеграл сходится.

для четных  $M$  и с лишним множителем  $\bar{g}N^{1/2}$  для нечетных  $M$ . Структура результата соответствует обсуждавшейся в разд. 4.1: в аргументе гамма-функции член  $M/2$  связан с количеством внешних линий,  $4N_c$  есть половина числа нулевых мод, а  $11(N_c - N_f)/6$  есть дополнительный вклад мягкой моды, соответствующей изменению расстояния между инстантоном и антиинстантоном. Значения  $\text{const}$  для отдельных частных случаев получены в [17, 24, 25].

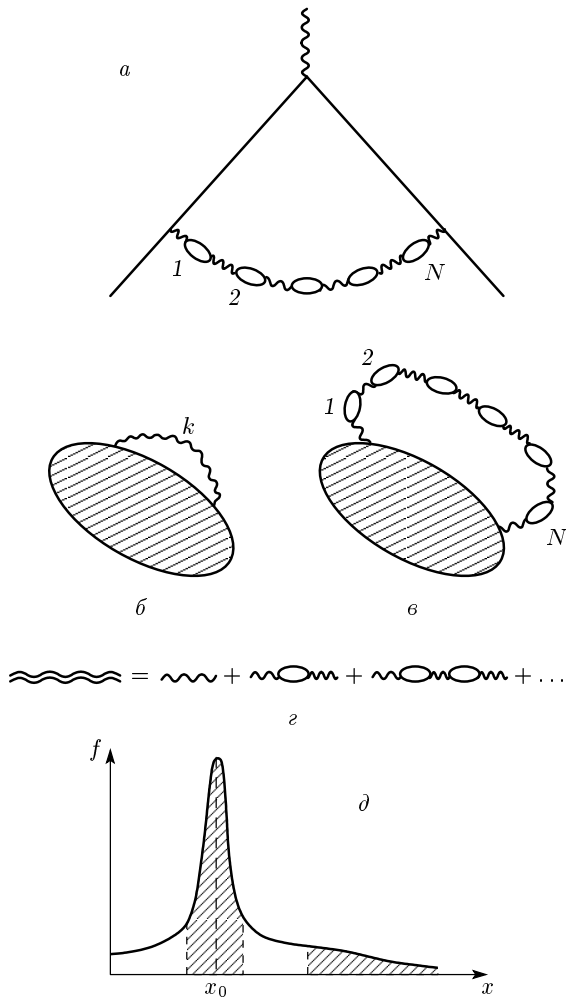
## 5. РЕНОРМАЛОНЫ. ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБОСНОВАНИЯ МЕТОДА ЛИПАТОВА

### 5.1. Аргументация 'т Хофта

Появление метода Липатова вызвало большой резонанс, и за короткое время он был применен практически ко всем актуальным задачам теоретической физики (см. сборник статей [19]). Однако уже в 1977 году зародилось направление, ставящее под сомнение метод Липатова. Оно берет начало с работы Лаутрупа [49], которая содержала следующее любопытное замечание. Естественная интерпретация результата Липатова (2.5) состоит в том, что имеется факториально большое число диаграмм одинакового порядка  $(ag)^N$ . Однако в общем случае такая интерпретация неправильна — существуют примеры отдельных диаграмм  $N$ -го порядка, имеющих величину порядка  $N!$ , — это диаграммы, содержащие длинные цепочки петель (рис. 6а). Такие факториальные вклады отдельных диаграмм получили название «ренормалонов», так как они возникают лишь в перенормируемых теориях<sup>9)</sup>: приведенный в [49] пример (рис. 6а) относился к квантовой электродинамике, но аналогичные диаграммы существуют в КХД и четырехмерной теории  $\varphi^4$ . Строго говоря, из замечания Лаутрупа ничего не следовало: метод Липатова основан на формальном вычислении функционального интеграла (2.4) и ни в коей мере не опирается на статистический анализ диаграмм. Поэтому естественно ожидать, что ренормалонные вклады уже учтены в инстантонном результате (2.5).

Однако вскоре 'т Хофт [50] делает утверждение, что ренормалоны дают независимый механизм расходимости ряда теории возмущений и не учитываются в асимптотике Липатова. Аргументация 'т Хофта основана на обсуждении аналитических свойств

<sup>9)</sup> Имеются в виду теории с бегущей константой связи, которые характеризуются логарифмической ситуацией. В суперперенормируемых теориях ренормалонов нет.



**Рис. 6.** а) Пример диаграммы для квантовой электродинамики, дающей вклад порядка  $N!$  в  $N$ -м порядке теории возмущений [49]. Более широкий класс ренормалонных диаграмм получается путем выделения в произвольной диаграмме для КЭД внутренней фотонной линии (б) и вставки в нее цепочки электронных петель (в). з) Всевозможные вставки в фотонную линию соответствуют «одеванию» взаимодействия. д) Пример функции, для которой условия применимости метода перевала формально выполнены, но его использование дает неправильный результат

борелевских образов; его актуальность ясна из того, что для функции с коэффициентами разложения  $ca^N \Gamma(N+b)$  борелевский образ имеет особенность в точке  $z = 1/a$ ,

$$B(z) = \sum_N ca^N N^{b-1} z^N \sim (1-az)^{-b}, \quad (5.1)$$

$za \rightarrow 1,$

т. е. параметр  $a$  асимптотики Липатова (2.5) определяет положение одной из особенностей в борелевской плоскости. 'Т Хофт приходит к этому результату другим путем, без ссылок на метод Липатова. Используя возможность приведения действия к форме  $S\{\phi\}/g$  (разд. 4), можно переписать типичный функциональный интеграл и определение борелевского образа (3.12) в виде

$$Z(g) = \int D\phi \exp\left(-\frac{S\{\phi\}}{g}\right), \quad (5.2)$$

$$Z(g) = \int_0^\infty dx e^{-x/g} B(x), \quad (5.3)$$

где опускаются множители типа  $g^n$ , которые сокращаются при переходе к функциям Грина, определяемым отношением двух функциональных интегралов. Тогда борелевский образ интеграла (5.2) имеет вид

$$B(z) = \int D\phi \delta(z - S\{\phi\}) = \oint_{z=S\{\phi\}} \frac{d\sigma}{|S'\{\phi\}|}, \quad (5.4)$$

где  $|S'\{\phi\}|$  — модуль вектора, введенного в (4.1.6), а последнее интегрирование проводится по гиперповерхности  $z = S\{\phi\}$ . Если  $\phi_c(x)$  — инстантон, то  $S'\{\phi_c\} = 0$  и борелевский образ (5.4) имеет особенность в точке  $z = S\{\phi_c\}$ , которая для инстантона с наименьшим действием  $S_0$  совпадает с  $1/a$ . Кроме того, имеются сингулярности в точках  $mS_0$ , отвечающие конфигурациям, содержащим  $m$  бесконечно удаленных элементарных инстантонов, и сингулярности, соответствующие инстантонам другой формы. Если считать, что особенность при  $z = S_0$  — ближайшая к началу координат, то воспроизводится результат (2.5) метода Липатова. Однако 'т Хофт допускает существование сингулярностей, отличных от инстантонных: в этом случае асимптотика коэффициентов разложения может определяться одной из них, ближайшей к началу координат.

В качестве возможного механизма возникновения новых сингулярностей 'т Хофт рассматривает ренормалоны. Возьмем произвольную диаграмму для квантовой электродинамики и выделим в ней линию виртуального фотона с импульсом  $k$  (рис. 6б): ей соответствует интегрирование по области больших импульсов типа

$$\int d^4k k^{-2n}, \quad (5.5)$$

где  $n$  — целое; если считать все перенормировки выполненными, то интеграл сходится и  $n \geq 3$ . При

вставке в фотонную линию  $N$  электронных петель (рис. 6в) под интегралом возникает дополнительный множитель  $\ln^N(k^2/m^2)$  ( $m$  — масса электрона), приводящий после интегрирования к результату  $\sim N!$ . Произвольные вставки в фотонную линию соответствуют «одеванию» взаимодействия и приводят к замене константы взаимодействия  $g_0$  на бегущую константу связи  $g(k^2)$  (рис. 6з), которая появляется под интегралом (5.5). Просуммируем последовательность диаграмм типа рис. 6в: это соответствует использованию для функции Гелл-Манна–Лоу однопетлевого приближения  $\beta(g) = \beta_2 g^2$  и дает известный результат

$$g(k^2) = \frac{g_0}{1 - \beta_2 g_0 \ln(k^2/m^2)}. \quad (5.6)$$

После интегрирования по области  $k^2 \gtrsim m^2$  имеем

$$\begin{aligned} & \int d^4 k k^{-2n} g(k^2) = \\ & = g_0 \sum_N \int d^4 k k^{-2n} \left( \beta_2 g_0 \ln \frac{k^2}{m^2} \right)^N \sim \\ & \sim g_0 \sum_N N! \left( \frac{\beta_2}{n-2} \right)^N g_0^N, \quad (5.7) \end{aligned}$$

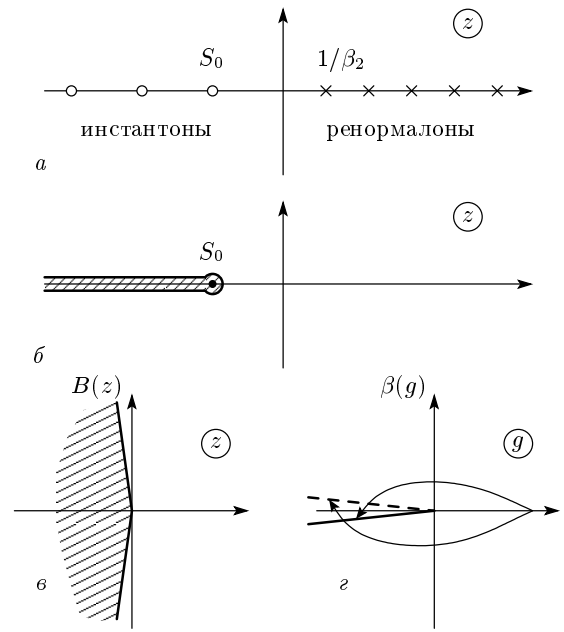
что после суммирования по методу Бореля дает ренормалонные сингулярности в точках<sup>10)</sup>

$$z_n = \frac{n-2}{\beta_2}, \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (5.8)$$

борелевской плоскости  $z$ . В теории  $\varphi^4$  и КЭД инстантонные особенности лежат на отрицательной полуоси, а ренормалонные — на положительной (рис. 7а); в КХД — наоборот. Из приведенного рассуждения ясно, что факториальные вклады отдельных диаграмм возникают в любой теории поля, для которой разложение  $\beta$ -функции начинается с квадратичного члена.

Нетрудно видеть, что аргументация 'т Хофта в отношении ренормалоннов оставляет без ответа главные вопросы: почему можно придавать значение отдельным последовательностям диаграмм, которые при  $N \rightarrow \infty$  составляют бесконечно малую долю их полного числа? Как решается проблема двойного счета, т. е. откуда известно, что ренормалонны уже не учтены в инстантонном вкладе (2.5)? Однако общая постановка вопроса о возможности вкладов неинстантонной природы в асимптотику коэффициентов

<sup>10)</sup> Аналогичные сингулярности с  $n = 0, -1, -2, \dots$  возникают от интегрирования по области малых импульсов («инфракрасные ренормалонны»).



**Рис. 7.** а) Картина сингулярностей для теории  $\varphi^4$ , представленная 'т Хофтом [50]. б) Область аналитичности согласно результатам работы [48]. Из аналитичности  $B(z)$  при  $|\arg z| < \pi/2 + \delta$  (б) следует аналитичность  $\beta(g)$  при  $|\arg g| < \pi + \delta$  (з), т. е. на всем физическом листе римановой поверхности

разложения имеет смысл: она вскрывает пробел в математической обоснованности метода Липатова. Действительно, пусть функция  $f(x)$  имеет резкий максимум в точке  $x_0$  и медленный «хвост» при больших  $x$  (рис. 6д), так что вклады в интеграл  $\int f(x) dx$  от окрестности максимума и области хвоста сравнимы. Исследование интеграла на перевал обнаружит точку максимума  $x_0$  и (при условии его достаточной резкости) формальную применимость метода перевала; однако вычисление интеграла в перевальном приближении будет ошибочным, так как будет потерян вклад хвоста. Если такие хвосты имеются в интеграле (2.4), то метод Липатова может оказаться неверным.

Практическое отсутствие неперевальных методов вычисления функциональных интегралов делает невозможным прямое исследование вклада возможных хвостов, и аргументацию 'т Хофта трудно опровергнуть. Тем не менее в известном смысле она «неестественна»: для любого интеграла типа (5.2) конечной кратности можно доказать, что а) при  $g \rightarrow 0$  он определяется перевальными точками [51] (согласно (4.1.8)  $g_c \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ ) и б) все особенности в борелевской плоскости связаны с экстре-

мурами действия (аргументация 'т Хофта, основанная на (5.4), является необходимой и достаточной). Поэтому ренормалонные сингулярности могут возникать лишь в пределе бесконечного числа интегрирований. Однако конструктивные аргументы в пользу их существования являются довольно слабыми и при ближайшем рассмотрении не выдерживают критики [48]. Дальнейшие исследования показали, что суммирование более сложных последовательностей диаграмм приводит к сильной перенормировке ренормалонного вклада и делает полностью неопределенным общий коэффициент перед ним [52]; фактически невозможно утверждать, что он не обращается в нуль. Таким образом, существование ренормалонных сингулярностей не является доказанным, что признается самими активными сторонниками этого направления [53].

Несмотря на это, точка зрения 'т Хофта сразу же стала общепринятой [54–60]. В значительной мере это связано с тем, что ренормалонный механизм формулируется на диаграммном языке, удобном для практических приложений. Не представляет проблемы вставить цепочку петель в любую диаграмму и исследовать качественные последствия расходимости ряда теории возмущений для любого изучаемого явления. Синтез же инстантонных результатов с диаграммными вычислениями хотя и возможен (см. [8]), но оказывается довольно громоздким. Разумеется, использование концепции ренормалоннов в качестве «модели» не вызывает возражений — тем более, что можно указать четкие предположения, при которых это оправдано (разд. 5.3). Но, к сожалению, это сильно затормозило реальное исследование высоких порядков теории возмущений: лекция 'т Хофта [50] посеяла сомнения в справедливости метода Липатова, и интерес к нему резко упал: так, до сих пор не вычислена полноценная асимптотика теории возмущений в КЭД и КХД, хотя все принципиальные вопросы решены еще в конце 70-х годов.

## 5.2. Отсутствие ренормалонных сингулярностей в теории $\varphi^4$

В работе [48] исследованы борелевские образы теории  $\varphi^4$  и доказана их аналитичность в комплексной плоскости с разрезом от первой инстантонной особенности до бесконечности (рис. 7б), что соответствует гипотезе Ле Гийо и Зинн-Жюстина [35], лежащей в основе одного из эффективнейших методов суммирования — «конформ-бореля» (разд. 6.1). Сопоставление с картиной 'т Хофта (рис. 7а) пока-

зывает, что все инстантонные особенности поглощаются разрезом, а ренормалонные сингулярности отсутствуют.

Идея работы [48] основана на использовании модифицированного преобразования Бореля, при котором  $N!$  заменяется на  $\Gamma(N + b_0)$  с произвольным  $b_0$ ,

$$F(g) = \int_0^\infty dx e^{-x} x^{b_0-1} B(gx), \quad (5.9)$$

$$B(g) = \sum_{N=0}^\infty \frac{F_N}{\Gamma(N + b_0)} g^N,$$

(преобразование Бореля–Леруа). Нетрудно доказать, что область аналитичности для всех борелевских образов одинакова и ее достаточно установить при каком-то фиксированном  $b_0$ . Практически удобен выбор  $b_0 = 1/2$ , так как в этом случае получается простой результат для борелевского образа экспоненты,

$$F(g) = e^{-g} \rightarrow B(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ e^{2i\sqrt{z}} + \text{c. c.} \right\}, \quad (5.10)$$

сохраняющий ее экспоненциальную форму. Это позволяет записать явное выражение для борелевского образа функционального интеграла (2.3):

$$B(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int D\varphi \exp(-S_0\{\varphi\}) \times \left[ \exp\left(2i\sqrt{zS_{int}\{\varphi\}}\right) + \text{c. c.} \right], \quad (5.11)$$

используя которое, нетрудно установить область аналитичности при  $m^2 > 0$  для любого конечномерного интеграла типа (2.3), т. е. функционального интеграла, определенного на решетке конечного размера.

Предельный переход к бесконечному объему системы возможен после определения функций Грина и переходу к отношению двух интегралов типа (2.3). Этот предел не является сингулярным для систем, находящихся вне точек фазовых переходов, так как конечность корреляционного радиуса позволяет провести разбиение на квазинезависимые подсистемы; для теории  $\varphi^4$  это обеспечивается уже использованным условием  $m^2 > 0$ .

Переход к континуальному пределу является тривиальным при отсутствии ультрафиолетовых расходимостей, что соответствует условию  $d < 2$ . При наличии ультрафиолетовых расходимостей доказательство включает следующие этапы:

а) установление области аналитичности  $B(z)$  для конечного параметра обрезания  $\Lambda$  при использовании регуляризации фейнмановского типа;

б) установление области аналитичности для борелевского образа функции Гелл-Манна – Лоу и аномальных размерностей, определенных в схеме обрезания; эти функции содержат лишь слабую зависимость от  $\Lambda$ , исчезающую при  $\Lambda \rightarrow \infty$ ;

в) доказательство неизменности области аналитичности в процессе перенормировки заряда;

г) переход к перенормированным вершинам и ренормгрупповым функциям в других схемах ренормировки.

Обсудим тонкий момент в доказательстве, недостаточно освещенный в [48]. Любая величина, определяемая рядом теории возмущений, является функцией затравочного заряда  $g_B$  и параметра обрезания  $\Lambda$ . При переходе к перенормированному заряду  $g$  возникает функция  $F(g, \Lambda)$ , содержащая остаточную зависимость от  $\Lambda$ , но в силу перенормируемости имеющая конечный предел  $F(g)$  при  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Аналогично, ее борелевский образ  $B(z, \Lambda)$  имеет конечный предел  $B(z)$ . В [48] строго доказана аналитичность  $B(z, \Lambda)$  при конечных  $\Lambda$  в комплексной плоскости  $z$  с разрезом от первой инстантонной особенности до бесконечности. Аналитичность  $B(z)$  в той же области имеется при условии равномерной сходимости (теорема Вейерштрасса [61]), которая имеет место в случае ограниченности  $B(z, \Lambda)$  (принцип компактности регулярных функций [62]). Поэтому конечности предела по  $\Lambda$  достаточно для доказательства регулярности  $B(z)$ . К сожалению, перенормируемость теории строго доказана лишь в рамках теории возмущений, т. е. не для самих функций  $F(g, \Lambda)$ ,  $B(z, \Lambda)$ , а для их коэффициентов разложения по  $g$  и  $z$ . Доказательство в [48] предполагает конечность пределов на уровне функций, и в этом смысле является неполным. Однако конечность указанных пределов требуется для фактического существования перенормируемости и должна рассматриваться как необходимое для нее физическое условие. Оно тесно связано с необходимостью доопределения функциональных интегралов, которая обсуждается ниже (разд. 5.3).

### 5.3. Общий критерий отсутствия ренормалонных сингулярностей

Четырехмерная теория  $\varphi^4$  считается типичным представителем «ренормалонных» теорий, и обнаруженное в ней отсутствие ренормалонных сингулярностей ставит под сомнение концепцию ренормалонов в целом. Оказывается возможным прояснить ситуацию с ренормалонами в произвольной теории поля [63]. Вернемся к примеру квантовой электродинамики и рассмотрим простейший класс ренормалон-

ных диаграмм, получаемый всевозможными вставками в фотонную линию (рис. 6б, в). Заметим, что при известной  $\beta$ -функции не представляет проблемы просуммировать все такие диаграммы: для этого достаточно решить уравнение Гелл-Манна – Лоу

$$\frac{dg}{d \ln k^2} = \beta(g) = \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \dots \quad (5.12)$$

с начальным условием  $g(k^2) = g_0$  при  $k^2 = m^2$  и исследовать разложение по  $g_0$  для интеграла типа (5.7).

Решение уравнения (5.12) имеет вид

$$F(g) = F(g_0) + \ln \frac{k^2}{m^2}, \quad \text{где} \quad F(g) = \int \frac{dg}{\beta(g)}, \quad (5.13)$$

и с учетом поведения  $F(g)$  при малых  $g$  можно записать

$$F(g) = -\frac{1}{\beta_2 g} + f(g), \quad \text{где} \quad \lim_{g \rightarrow 0} g f(g) = 0. \quad (5.14)$$

Формально разрешая (5.13) относительно  $g$ , имеем

$$g(k^2) = F^{-1} \left\{ -\frac{1}{\beta_2 g_0} + f(g_0) + \ln \frac{k^2}{m^2} \right\}. \quad (5.15)$$

Правая часть регулярна в точке  $g_0 = 0$  и может быть разложена в ряд по степеням  $g_0$ . Структура ряда имеет вид

$$g = \sum_{N=1}^{\infty} A_N \left\{ \frac{g_0}{r(x)} \right\}^N, \quad x = \beta_2 \ln \frac{k^2}{m^2}, \quad (5.16)$$

где  $r(x)$  — радиус сходимости, а коэффициенты  $A_N$  зависят от  $N$  степенным образом. Радиус сходимости определяется расстоянием до особенности, ближайшей к началу координат.

Если  $z_c$  — особая точка функции  $F^{-1}(z)$ , то особые точки по переменной  $g_0$  в (5.15) определяются уравнением

$$z_c = -\frac{1}{\beta_2 g_0} + f(g_0) + \ln \frac{k^2}{m^2} \quad (5.17)$$

или

$$g_0 x - 1 = \beta_2 g_0 [z_c - f(g_0)]. \quad (5.18)$$

Если величина  $z_c$  конечна, то при больших  $x$  уравнение (5.18) имеет корень  $g_0 \approx 1/x$ , лежащий в области малых  $g_0$ , где правая часть (5.18) несущественна в силу (5.14); тем самым имеется особенность в точке  $g_c \approx 1/x$ , и ряд (5.16) принимает вид

$$\begin{aligned} g(k^2) &= \sum_{N=1}^{\infty} A_N (g_0 x)^N = \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} A_N \left( \beta_2 \ln \frac{k^2}{m^2} \right)^N g_0^N, \quad (5.19) \end{aligned}$$

что после подстановки в интеграл (5.7) дает сингулярности в точках (5.8) (при больших  $N$  интеграл определяется большими  $k$ , которым соответствуют большие  $x$ ). Если же  $z_c = \infty$ , то уравнение (5.17) не имеет решений для  $g_0 \sim 1/x$  и разложение типа (5.19) возможно лишь с коэффициентами  $A_N$ , убывающими быстрее любой экспоненты: ренормалонный вклад оказывается заведомо меньше инстантонного, а особенности в борелевской плоскости не возникают.

Если функция  $z = F(g)$  регулярна в точке  $g_0$  и  $F'(g_0) \neq 0$ , то в некоторой окрестности  $g_0$  существует обратная функция  $g = F^{-1}(z)$ , которая также является регулярной. Поэтому особые точки функции  $F^{-1}(z)$  суть  $z_c = F(g_c)$ , где всевозможные  $g_c$  определяются условием

$$F'(g_c) = 0 \quad \text{или} \quad F'(g_c) \text{ не существует.} \quad (5.20)$$

Резюмируя, приходим к следующему выводу. Ренормалонные сингулярности имеют место, если существует хотя бы одна точка  $g_c$  (включая  $g_c = \infty$ ), для которой выполнено условие (5.20) и  $z_c = F(g_c) < \infty$ ; в противном случае ренормалонных сингулярностей нет.

Переформулируя результаты в терминах самой  $\beta$ -функции, приходим к следующему. Ренормалонные сингулярности отсутствуют, если:

- а)  $\beta$ -функция достаточно медленно меняется на бесконечности,  $\beta(g) \sim g^\alpha$  с  $\alpha \leq 1$ ;
- б) сингулярности  $\beta(g)$  в конечных точках  $g_c$  являются достаточно слабыми, так что функция  $1/\beta(g)$  неинтегрируема в  $g_c$  (например,  $\beta(g) \sim (g - g_c)^\gamma$  с  $\gamma \geq 1$ ). При нарушении хотя бы одного из условий (а, б) имеются сингулярности в точках (5.8).

Исследование более сложных классов ренормалонных диаграмм возможно на основе общего уравнения ренормгруппы в форме Каллана–Симанчика [63] и приводит к аналогичным выводам: можно установить необходимые и достаточные условия существования ренормалонных сингулярностей, но (при использовании информации только из ренормализационной группы) нельзя сделать никаких однозначных утверждений.

Теперь вспомним, что ряд теории возмущений для  $\beta$ -функции является факториально расходящимся, что связано с существованием разреза в комплексной плоскости  $g$ , исходящего из начала координат. Поэтому точки  $g = 0$  и  $g = \infty$  являются точками ветвления, а функция  $\beta(g)$  представляется борелевским интегралом

$$\beta(g) = \int_0^\infty dz e^{-z} B(gz) = g^{-1} \int_0^\infty dz e^{-z/g} B(z). \quad (5.21)$$

Предположим, что борелевский образ  $B(z)$  имеет степенное поведение на бесконечности<sup>11)</sup>  $B(z) \propto z^\alpha$  (тогда  $\beta(g) \propto g^\alpha$ ) и регулярен в области  $|\arg z| < \pi/2 + \delta$ ,  $\delta > 0$  (рис. 7а). Тогда функция  $\beta(g)$  регулярна при  $|\arg g| < \pi + \delta$  (рис. 7з), что означает отсутствие особенностей при конечных  $g$  на физическом листе римановой поверхности. В этом случае поведение  $\beta$ -функции на бесконечности ( $\beta(g) \sim g^\alpha$  с  $\alpha \leq 1$ ) дает условие отсутствия ренормалонных сингулярностей.

Полученный критерий может быть конструктивно использован следующим образом. Согласно 'т Хофту (рис. 7а), в теории  $\varphi^4$  и КЭД инстантонные особенности расположены на отрицательной полуоси, тогда как возможные ренормалонные сингулярности — на положительной. Предположим, что ренормалонные сингулярности отсутствуют: тогда а) условие регулярности  $\beta(g)$  при конечных  $g$  (рис. 7в, з) выполнено; б) асимптотика коэффициентов разложения  $\beta_N$  определяется ближайшей инстантонной особенностью и может быть найдена методом Липатова; в) борелевский интеграл хорошо определен и ряд теории возмущений для  $\beta(g)$  допускает однозначное суммирование, что позволяет определить ее поведение на бесконечности. Если рост  $\beta$ -функции оказывается более быстрым, чем  $g^\alpha$  с  $\alpha > 1$ , то исходное предположение неверно и от противного доказано существование ренормалонных сингулярностей. Если же оказывается, что  $\beta(g) \sim g^\alpha$  с  $\alpha \leq 1$ , то предположение о несущественности ренормалонных является самосогласованным. Аналогичные рассуждения для КХД справедливы после изменения знака  $g$  и  $z$ .

Намеченная программа по восстановлению  $\beta$ -функций была выполнена в работах [42, 47, 64, 65] и обсуждается в разд. 8. Для теории  $\varphi^4$  и КЭД индекс  $\alpha$  близок к единице, а для КХД — существенно меньше, поэтому (в пределах неопределенности результатов) самосогласованное исключение ренормалонных сингулярностей оказывается возможным. Более того, для теории  $\varphi^4$  и КЭД имеются аргументы в пользу точного равенства  $\alpha = 1$ . Так или иначе,  $\beta$ -функции в этих теориях являются знакопостоянными, и условие несущественности ренормалонных совпадает с условием их внутренней непротиворечивости.

<sup>11)</sup> Это предположение несущественно и рассуждения можно провести без ограничения общности.

Единственной теорией поля, в которой существование ренормалонных сингулярностей считается твердо установленной, является  $O(n)$ -симметричная сигма-модель в пределе  $n \rightarrow \infty$  [53]. В этом случае однопетлевая  $\beta$ -функция оказывается точной и  $\beta(g) \propto g^2$  при всех  $g$ , так что  $\alpha = 2$  и самосогласованное исключение ренормалонов оказывается невозможным; однако в четырехмерном случае эта теория внутренне противоречива. Любопытно, что обрыв ряда для  $\beta$ -функции на любом конечном числе членов немедленно создает ренормалонные сингулярности: это показывает невозможность решения проблемы ренормалонов в рамках петлевого разложения [56, 57].

Заметим, что возможность существования ренормалонных сингулярностей делает функциональные интегралы плохо определенными. Классическое определение функционального интеграла через теорию возмущений является дефектным ввиду расходимости разложения в ряд по константе связи; для его конструктивного суммирования нужно знать аналитические свойства в борелевской плоскости (разд. 6), которые являются неопределенными, пока не установлено, существуют ли ренормалонные сингулярности. Можно сомневаться и в корректности определения функционального интеграла как многомерного интеграла на решетке: решеточная теория может принципиально отличаться от континуальной, так как ренормалонные вклады определяются областью сколь угодно больших импульсов. Возникает тупиковая ситуация: решение проблемы ренормалонов требует исследования функциональных интегралов, а последние плохо определены из-за нерешенности проблемы ренормалонов. Предлагаемая схема самосогласованного исключения ренормалонных сингулярностей является, по-видимому, единственным возможным выходом из положения. При этом континуальная теория по определению понимается как предел решеточных теорий<sup>12)</sup>.

<sup>12)</sup> Подобная философия содержится уже в самом понятии перенормируемости. Реально строится эффективная теория для малых импульсов, применимость которой ограничивается сверху параметром  $\Lambda$ , и считается, что тот же масштаб определяет существенную область интегрирования. Перенормируемость состоит в возможности предельного перехода  $\Lambda \rightarrow \infty$  без разрушения структуры теории. Проконтролировать же реальный вклад импульсов, больших  $\Lambda$ , в рамках эффективной теории невозможно: всегда можно предположить, что на больших импульсах сидит какой-нибудь «чертик», который обеспечивает существенный вклад в физические величины, но убегает при увеличении  $\Lambda$ . Любопытно, что физическая реализация такого «чертика» возникает в теории перехода Андерсона, где его роль играет вклад решеточного инстантонного минимума [8, 36, 37].

## 6. ПРАКТИЧЕСКОЕ СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим проблему практического суммирования степенного ряда

$$W(g) = \sum_{N=0}^{\infty} W_N(-g)^N, \quad (6.1)$$

коэффициенты которого имеют асимптотику  $ca^N \Gamma(N+b)$  и предполагаются заданными численно. В этом разделе ограничимся рядами со знакопеременной асимптотикой, в соответствии с чем выделяем из коэффициентов множитель  $(-1)^N$  и считаем, что  $a = -1/S_0 > 0$ , как это имеет место в теории  $\varphi^4$ .

### 6.1. Конформ-борель и другие методы

Понимая сумму ряда (6.1) в борелевском смысле (разд. 3), будем пользоваться модифицированным преобразованием Бореля (5.9),

$$W(g) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{b_0-1} B(gx), \quad (6.2)$$

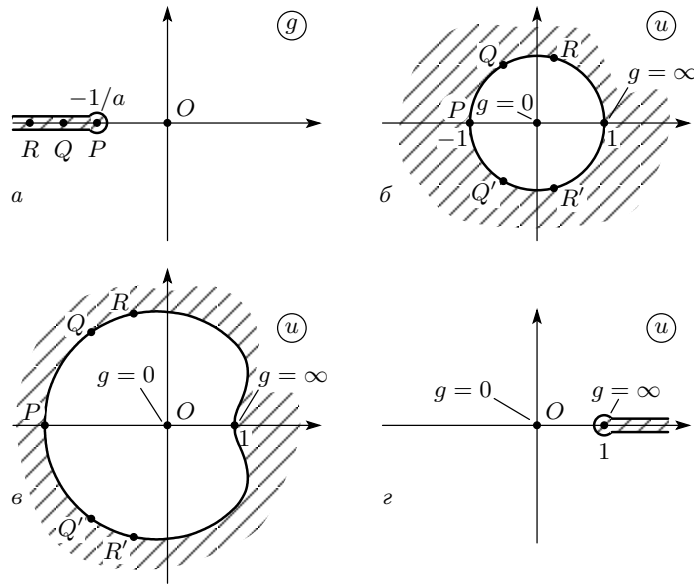
$$B(z) = \sum_{N=0}^{\infty} B_N(-z)^N, \quad B_N = \frac{W_N}{\Gamma(N+b_0)},$$

где произвольный параметр  $b_0$  удобно использовать для оптимизации процедуры суммирования [35]. Для борелевского образа  $B(z)$  предполагаем аналитические свойства, характерные для теории теории  $\varphi^4$  (разд. 5.2), — т. е. аналитичность в комплексной плоскости  $z$  с разрезом от  $-1/a$  до  $-\infty$  (рис. 8а). Ряд для  $B(z)$  сходится в круге  $|z| < 1/a$  и для проведения интегрирования в (6.2) требуется его аналитическое продолжение, которое при коэффициентах  $W_N$ , заданных численно, представляет некоторую проблему. Ее элегантное решение, предложенное Ле Гийо и Зинн-Жюстеном [35], состоит в использовании конформного преобразования  $z = f(u)$ , отображающего плоскость с разрезом на единичный круг  $|u| < 1$  (рис. 8б): тогда переразложение  $B(z)$  в ряд по  $u$

$$B(z) = \sum_{N=0}^{\infty} B_N(-z)^N \Big|_{z=f(u)} \rightarrow B(u) = \sum_{N=0}^{\infty} U_N u^N \quad (6.3)$$

при любых  $z$  дает сходящийся ряд. Действительно, все возможные особые точки  $P, Q, R, \dots$





**Рис. 8.** Борелевский образ аналитичен в комплексной плоскости с разрезом  $(-\infty, -1/a)$  (а) и его область аналитичности можно конформно отобразить на единичный круг (б). Если ограничиться аналитическим продолжением на положительную полуось, то допустимо конформное преобразование на любую область, для которой точка  $u = 1$  является ближайшей к началу координат из всех граничных точек (в); при экстремальной форме такого преобразования отображение происходит на плоскость с разрезом  $(1, \infty)$  (г)

функции  $B(z)$  лежат на разрезе, а их образы  $P, Q, Q', R, R', \dots$  — на границе круга  $|u| = 1$ , так что второй ряд в (6.3) сходится при всех  $|u| < 1$ ; но внутренность круга  $|u| < 1$  находится во взаимно-однозначном соответствии с областью аналитичности в плоскости  $z$ . Конформное отображение определяется формулами

$$z = \frac{4}{a} \frac{u}{(1-u)^2} \quad \text{или} \quad u = \frac{(1+az)^{1/2} - 1}{(1+az)^{1/2} + 1}, \quad (6.4)$$

откуда легко найти связь  $U_N$  и  $B_N$ :

$$U_0 = B_0, \quad U_N = \sum_{K=1}^N B_K \left(-\frac{4}{a}\right)^K \times \\ \times C_{N+K-1}^{N-K} \quad (N \geq 1), \quad (6.5)$$

где  $C_N^K$  — биномиальные коэффициенты.

Ввиду степенного поведения  $B(z)$  на бесконечности борелевский интеграл (6.2) быстро сходится, и его верхний предел может быть выбран конечным в соответствии с желаемой точностью. Тогда параметр  $u$  ограничен сверху величиной  $u_{max} < 1$ , и второй ряд в (6.3) сходится. Авторы [35] действуют не вполне корректно, подставляя разложение по  $u = u(z)$  в борелевский интеграл (6.2) и интегрируя: перестановка суммирования и интегрирования не является безобидной, что делает сходимость алгоритма неочевидной и в принципе может приводить к ее

потере. Тем не менее сходимость имеется и в таком подходе, так как асимптотика коэффициентов  $U_N$  оказывается степенной (см. [65, разд. 2.1])<sup>13)</sup>. При увеличении  $b_0$  осциллирующий характер асимптотики меняется на монотонный, что лежит в основе методики определения погрешности, использованной в [35].

Если известно  $N_m$  первых коэффициентов ряда (6.1), то формула (6.5) определяет столько же первых коэффициентов сходящегося ряда в (6.3). Для  $g \sim 1$  существенные значения  $u$  оказываются порядка нескольких десятых, что позволяет получить неплохую точность уже при небольших  $N_m$ . Погрешность суммирования определяется формулой

$$\delta W(g) \propto \exp \left\{ -3(N_m^2/ag)^{1/3} \right\}, \quad ag \lesssim N_m^2, \quad (6.6)$$

из которой ясны возможности продвижения в область сильной связи — максимально достижимые значения  $g$  имеют порядок  $N_m^2$ . Изложенная схема использовалась для вычисления критических индек-

<sup>13)</sup> Для нахождения асимптотики  $U_N$  вклады, найденные в [65], нужно просуммировать по всем сингулярностям, число которых в общем случае бесконечно. Учитывая конечность этой суммы при любом фиксированном  $N = N_0$ , легко доказать, что при  $N \rightarrow \infty$  она определяется членом, содержащим максимальную степень  $N$ .

сов теории фазовых переходов [35] и позволила определить их с точностью до третьего знака.

Другой способ аналитического продолжения основан на построении паде-аппроксимант [66]: функция  $B(z)$  аппроксимируется отношением полиномов  $P_M(z)/Q_L(z)$  степени  $M$  и  $L$ , коэффициенты которых подобраны так, чтобы воспроизводить известные первые члены разложения (6.1). Сходимость диагональных ( $M = L$ ) и квазидиагональных ( $M \approx L$ ) аппроксимант к искомой функции при  $M \rightarrow \infty$  доказана для широкого класса функций, но в общем случае является достаточно медленной. При конечных же  $M$  и  $L$  использование паде-аппроксимации навязывает борелевскому образу вполне определенное (и в общем неправильное) поведение на бесконечности. В результате получается неправильная асимптотика  $W(g)$  при  $g \rightarrow \infty$ , что по непрерывности индуцирует некоторую ошибку при  $g \sim 1$ . Поэтому результаты, получаемые при различном выборе паде-аппроксимант, несколько различаются, и применение метода связано с известной долей субъективизма. Ситуация меняется, если для  $W(g)$  известна асимптотика сильной связи: тогда поведение паде-аппроксимант на бесконечности может быть согласовано с асимптотикой  $B(z)$ , что позволяет получить равномерную по  $g$  точность. При наличии достаточно длинного разложения асимптотика сильной связи может быть «прошупана» по скорости сходимости, как это сделано в классической работе [66]. Кроме того, можно использовать информацию о сингулярности в точке  $-1/a$  и выбор процедуры подчинить требованию, чтобы все полюсы паде-аппроксимант располагались на отрицательной полуоси — тогда этот метод использует ту же информацию, что и описанный выше «конформ-борель». Первые вычисления критических индексов проводились этим методом [66] и дали результаты, практически совпадающие с [35]. Метод Паде–Бореля предпочтительно использовать в случаях, когда аналитические свойства  $B(z)$  неизвестны — тогда построение паде-аппроксимант дает информацию о расположении первых сингулярностей.

В многозарядных задачах вместо аппроксимант Паде могут использоваться аппроксиманты Чисхолма [67], представляющие собой рациональные функции от нескольких переменных. Более эффективный подход к таким задачам основан на построении так называемого резольвентного ряда [68]: в этом случае все заряды умножаются на вспомогательный параметр  $\lambda$ , по которому строятся обычные паде-аппроксиманты, а в конце вычислений полагается

$\lambda = 1$ . Такой метод полностью сохраняет симметрию исходной задачи и не приводит к потере информации при проектировании на любые подпространства зарядов меньшей размерности [69, 70]. Более сложная последовательность аппроксимант строится при использовании  $\epsilon$ -алгоритма Винна [71], основанного на «сильном» преобразовании Бореля (разд. 7). Суммирование по Зоммерфельду–Ватсону [13] основано на аналитических свойствах не борелевских образов, а их коэффициентных функций. Более общая форма «конформ-бореля» использовалась в работе [12]. Последние два метода дают принципиальную возможность «угадать» асимптотику сильной связи, систематическому исследованию которой посвящен следующий раздел.

Отдельное направление связано с использованием вариационной теории возмущений [72, 73], которая позволяет сформулировать интерполяционную схему между областями слабой и сильной связи, если о последней имеется доступная информация. Для проблемы критических индексов такая информация состоит в характере приближения к неподвижной точке ренормгруппы и может быть выражена в терминах сильной связи путем разложения по затравочному (а не перенормированному) заряду. В результате расходящийся ряд теории возмущений преобразуется в сходящуюся последовательность аппроксимаций, что обеспечивает точность, сопоставимую с конформ-борелем [74]. К сожалению, в этом подходе не использованы явно факт расходимости ряда и его асимптотика Липатова. Информация о последней может быть использована лишь косвенно путем интерполяции коэффициентной функции: принятая Клейнертом попытка такого рода [75] не привела к увеличению точности, что побудило его выступить с утверждением о несущественности информации о высоких порядках. Разумеется, такое утверждение не может быть правильным в общем случае: точное задание коэффициентов разложения эквивалентно точному заданию функции, поэтому любое увеличение информации при надлежащем использовании должно приводить к повышению точности. Конкретный результат Клейнерта связан лишь с тем, что интерполяция, осуществляемая вариационной схемой, не хуже, чем результат интерполяции коэффициентной функции.

Приложение расходящихся рядов к вычислению критических индексов основано на использовании уравнения ренормгруппы в форме Каллана–Симанчика, в которое помимо функции Гелл-Манна–Лоу  $\beta(g)$  входят ренормгрупповые функции  $\eta(g)$  и  $\eta_d(g)$  [34, 76, 77] (так называемые аномальные раз-

мерности). Если  $g^*$  — нетривиальный нуль функции  $\beta(g)$ , то значения аномальных размерностей в этой точке определяют критические индексы  $\eta$  и  $\nu$ ,  $\eta(g^*) = \eta$ ,  $\eta_4(g^*) = 1/\nu - 2 + \eta$ , тогда как остальные индексы определяются с помощью известных соотношений [39]. Ренормгрупповые функции вычисляются в виде рядов по  $g$ , которые могут быть просуммированы перечисленными методами.

На основе такого подхода достигнут большой прогресс в описании критического поведения различных систем. Критические индексы для  $O(n)$ -симметричной теории  $\varphi^4$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) были вычислены в пионерских работах [35, 66] для размерностей пространства  $d = 3$  и  $d = 2$  на основе соответственно шестипетлевых и четырехпетлевых разложений. В дальнейшем они были распространены на большие  $n$  и высшие константы связи [78, 79], что позволило, в частности, оценить вычислительные возможности  $1/n$ -разложения. Позже были найдены и использованы для уточнения критических индексов семипетлевые вклады в ренормгрупповые функции при  $d = 3$  [75, 80] и пятипетлевые вклады для  $d = 2$  [81, 82]. В последних работах были обнаружены систематические отклонения результатов пересуммирования от известных точных значений критических индексов. Интерпретация их как проявление неаналитических вкладов в ренормгрупповые функции [81, 82], на наш взгляд, является несколько преждевременной.

При учете кубической анизотропии возникает двухзарядный вариант  $n$ -компонентной теории  $\varphi^4$  в соответствии с наличием в действии двух инвариантов четвертого порядка. При  $n = 3$  эта модель описывает кубические кристаллы, а при  $n = 0$  — слабонеупорядоченные изинговские ферромагнетики, в чем можно убедиться, выполняя усреднение по конфигурациям примесей с помощью метода реплик [83]. Вычисление коэффициентов разложения и суммирование ренормгрупповых рядов для этих систем производились в работах [69, 84–86] в четырех- [69, 84], пяти- [85] и шестипетлевым [86, 87] приближениях (см. также [88, 89]).

Шестипетлевые разложения получены и для других двухзарядных моделей:  $mn$ -модели, описывающей некоторые магнитные и структурные фазовые переходы, а при  $m = 0$  — критическое поведение  $n$ -компонентных примесных магнетиков [87], и для  $O(m) \times O(n)$ -симметричной модели, отвечающей так называемым киральным фазовым переходам [90]. Суммирование полученных рядов [90–93] позволило выяснить структуру фазовых портретов уравнений ренормгруппы и характер устойчивости нетривиаль-

ных неподвижных точек. Еще более сложные — трехзарядные — варианты теории  $\varphi^4$  возникают при описании сверхпроводников с нетривиальным спариванием, многоподрешеточных антиферромагнетиков, структурных фазовых переходов, сверхтекучих переходов в нейтронной жидкости и т.п. Некоторые из них изучены в трех-, четырех- и шестипетлевым приближениях в работах [70, 94–96]. Недавно были найдены и отсуммированы пятипетлевые разложения для двумерных киральной [97], кубической и  $mn$ -моделей [82]. Наконец, путем суммирования трех- и четырехпетлевых разложений исследовалась критическая динамика чистой и примесной моделей Изинга [98, 99], а также, в более низких приближениях, эффекты дальнего действия [100] и нарушение репличной симметрии [101].

Заметим, что вместо рядов по константе связи, построенных для физической размерности пространства, можно суммировать расходящиеся  $\epsilon$ -разложения, полученные для формальной задачи о фазовом переходе в  $(4 - \epsilon)$ -мерном пространстве [77, 102, 103]. Четырехпетлевые разложения для  $O(n)$ -симметричной теории [104], просуммированные в [105], были продолжены до пятипетлевого уровня [106] и суммировались в [80]. В работе [107] получены пятипетлевые разложения для кубической модели, на основе которых в [108] выведены пятипетлевые  $\sqrt{\epsilon}$ -разложения для критических индексов примесной модели Изинга; их суммирование обсуждалось в [108–110].

Детальное обсуждение современного состояния теории критических явлений, базирующейся на многопетлевых ренормгрупповых разложениях, и обширную библиографию можно найти в недавних обзорах [89, 96, 111].

## 6.2. Суммирование в пределе сильной связи

При продвижении в область сильной связи возникает существенная зависимость результатов от процедуры суммирования, которая допускает различные вариации. Для анализа возникающих неопределенностей желательно установить прямую связь асимптотики  $W(g)$  в пределе сильной связи со значениями коэффициентов  $W_N$ . Мы решим эту задачу в предположении степенного характера асимптотики

$$W(g) = W_\infty g^\alpha, \quad g \rightarrow \infty, \quad (6.7)$$

на адекватность которого указывают все модели, допускающие анализ и близкие к реальным задачам теории поля. Поставленная задача имеет решение в рамках стандартной процедуры «конформ-бореля»

(разд. 6.1) [65], но более эффективный алгоритм возникает при использовании модифицированного конформного преобразования.

Если договориться отображать  $z = 0$  в  $u = 0$ , а  $z = \infty$  в  $u = 1$ , то формула (6.4) дает единственное конформное преобразование, которое позволяет проводить аналитическое продолжение борелевского образа на произвольные комплексные  $z$ . Однако последнее не является обязательным: для проведения интегрирования в (6.2) достаточно аналитического продолжения на положительную полуось. Поэтому допустимо конформное преобразование на любую область, для которой точка  $u = 1$  является ближайшей к началу координат из всех граничных точек (рис. 8в): второй ряд в (6.3) будет сходиться при  $|u| < 1$  и в частности — на интервале  $0 < u < 1$ , который является образом положительной полуоси.

Преимущество такого конформного преобразования связано с тем, что расходимость перерасложенного ряда в (6.3) определяется ближайшей особой точкой  $u = 1$ , связанной с особенностью  $W(g)$  при  $g \rightarrow \infty$ , и асимптотика коэффициентов  $U_N$  определяется параметрами асимптотики (6.7). Запишем  $U_N$  в терминах  $B(u)$ ,

$$U_N = \oint_C \frac{du}{2\pi i} \frac{B(u)}{u^{N+1}}, \quad (6.8)$$

и деформируем контур  $C$ , охватывающий точку  $u = 0$ , так, чтобы он проходил вокруг разрезов, проведенных от всех особых точек до бесконечности. Тогда легко показать, что асимптотика  $U_N$  при больших  $N$  определяется ближайшей особой точкой  $u = 1$ . Чтобы уменьшить вклады других особых точек  $P, Q, Q', \dots$ , их желательно отодвинуть подальше. Это приводит нас к экстремальной форме преобразования, соответствующей отображению на плоскость с разрезом  $(1, \infty)$  (рис. 8з)

$$z = \frac{u}{a(1-u)}, \quad (6.9)$$

для которого легко найти связь  $U_N$  и  $B_N$ :

$$U_0 = B_0, \quad U_N = \sum_{K=1}^N \frac{B_K}{a^K} (-1)^K C_{N-1}^{K-1} \quad (N \geq 1). \quad (6.10)$$

Асимптотика  $U_N$  при больших  $N$  имеет вид

$$U_N = U_\infty N^{\alpha-1}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (6.11)$$

$$U_\infty = \frac{W_\infty}{a^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(b_0 + \alpha)} \quad (6.12)$$

и определяется параметрами асимптотики (6.7). В результате мы приходим к простому алгоритму: вычисляя по заданным  $W_N$  коэффициенты  $B_N$  согласно (6.2), пересчитывая их в  $U_N$  согласно (6.10) и проводя при больших  $N$  обработку по степенному закону (6.11), мы определяем параметры  $W_\infty$  и  $\alpha$  асимптотики (6.7).

При практическом использовании алгоритма возникают проблемы, связанные с ростом случайных ошибок. Если коэффициенты  $W_N$  заданы с относительной точностью  $\delta$  (ошибка вычисления или округления), то случайная ошибка в  $U_N$  обнаруживает катастрофический рост

$$\delta U_N \sim \delta \cdot 2^N. \quad (6.13)$$

При вычислениях с двойной компьютерной точностью ( $\delta \sim 10^{-14}$ )  $\delta U_N$  становится порядка единицы при  $N \approx 45$ , что ограничивает точность восстановления асимптотики (6.7) уровнем  $\sim 1\%$ .

К счастью, влияние гладких ошибок носит совершенно другой характер, и можно говорить о своеобразной «супер-устойчивости» алгоритма (в том смысле, что ошибка на выходе оказывается меньше, чем ошибка на входе). Линейное преобразование (6.10) обладает замечательным свойством

$$\sum_{K=1}^N K^m (-1)^K C_{N-1}^{K-1} = 0 \quad (6.14)$$

для  $m = 0, 1, \dots, N-2$ , и добавление к величине  $B_K/a^K$  (имеющей степенное поведение по  $K$ ) произвольного полинома  $P_m(K)$  вообще не влияет на асимптотику  $U_N$ . Аналогичное свойство имеет место для широкого класса гладких функций, которые хорошо аппроксимируются полиномами: так, замена  $B_K/a^K \rightarrow B_K/a^K + f(K)$ , где  $f(K)$  — целая функция с быстро убывающими коэффициентами ряда Тейлора, дает изменение  $U_N$ , быстро убывающее с ростом  $N$ . В реальных задачах известно несколько первых коэффициентов  $W_N$  и их асимптотика, тогда как промежуточные коэффициенты определяются интерполяцией. Ошибки интерполяции являются гладкими и можно надеяться на их несущественность даже при их большой величине. Таким образом, изложенный алгоритм оказывается идеально приспособленным к наиболее актуальной постановке задачи.

При обработке  $U_N$  на степенную зависимость может быть использована стандартная процедура минимизации  $\chi^2$  [112], а выбор рабочего интервала  $N_{min} \leq N \leq N_{max}$  проводится из следующих соображений. Верхний предел  $N_{max}$  выбирается из условия  $\delta U_N \sim U_N$ , так как точки с большими  $N$  уже не содержат информации; этот выбор не очень критичен,

так как при минимизации  $\chi^2$  автоматически дискриминируются точки с большой статистической ошибкой. Нижний предел  $N_{min}$  определяется требованием, чтобы величина  $\chi^2$  принимала «нормальные» значения; это исключает систематическую ошибку, связанную с тем, что зависимость  $U_N$  еще не стала асимптотической (6.11).

Ограниченность сверху используемых значений  $N$  приводит к существенной зависимости результатов от произвольного параметра  $b_0$  (см. (6.2)), так как он определяет скорость выхода на асимптотику. Чтобы сориентироваться в этом вопросе, учтем поправки к асимптотике (6.7), считая их степенными:

$$W(g) = W_\infty g^\alpha + W'_\infty g^{\alpha'} + W''_\infty g^{\alpha''} \dots \quad (6.15)$$

Соответственно для  $U_N$  получим аналогично (6.11), (6.12):

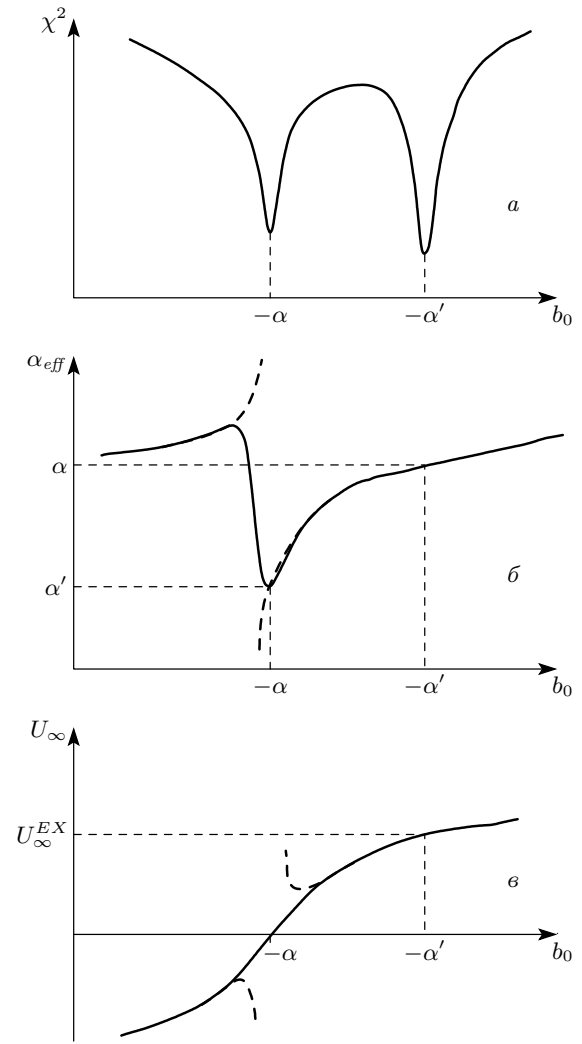
$$U_N = \frac{W_\infty}{a^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(b_0 + \alpha)} N^{\alpha-1} + \frac{W'_\infty}{a^{\alpha'} \Gamma(\alpha') \Gamma(b_0 + \alpha')} N^{\alpha'-1} + \dots \quad (6.16)$$

Пренебрежем для начала поправками к (6.16), показанными многоточием. Формальная обработка (6.16) по степенному закону (6.11) дает неплохие результаты, так как в двойном логарифмическом масштабе функция (6.16) меняется плавно и хорошо аппроксимируется прямой линией; при этом, однако, получаются некоторые эффективные значения  $\alpha$  и  $U_\infty$ .

Заметим, что из-за полюсов гамма-функции первый член в (6.16) обращается в нуль при  $b_0 = -\alpha$ , а второй — при  $b_0 = -\alpha'$ ; при этих значениях  $b_0$  возникают чисто степенные законы  $U_N \propto N^{\alpha'-1}$  и  $U_N \propto N^{\alpha-1}$ , в результате чего качество обработки возрастает и  $\chi^2$  резко падает. Поэтому при изменении  $b_0$  должна наблюдаться следующая картина (рис. 9): величина  $\chi^2$  имеет резкие минимумы при  $b_0 = -\alpha'$  и  $b_0 = -\alpha$ ; эффективный индекс  $\alpha_{eff}$  в окрестности точки  $b_0 = -\alpha$  «проваливается» до  $\alpha'$ , а вне ее близок к  $\alpha$ , достигая точного равенства  $\alpha_{eff} = \alpha$  при  $b_0 = -\alpha'$ ; эффективный параметр  $U_\infty$  при  $b_0 = -\alpha'$  соответствует точному значению  $W_\infty$ , а в окрестности  $b_0 = -\alpha$  проходит через нуль, причем наклон линейного участка вблизи корня

$$U_\infty \approx \frac{W_\infty}{a^\alpha \Gamma(\alpha)} (b_0 + \alpha) \quad (6.17)$$

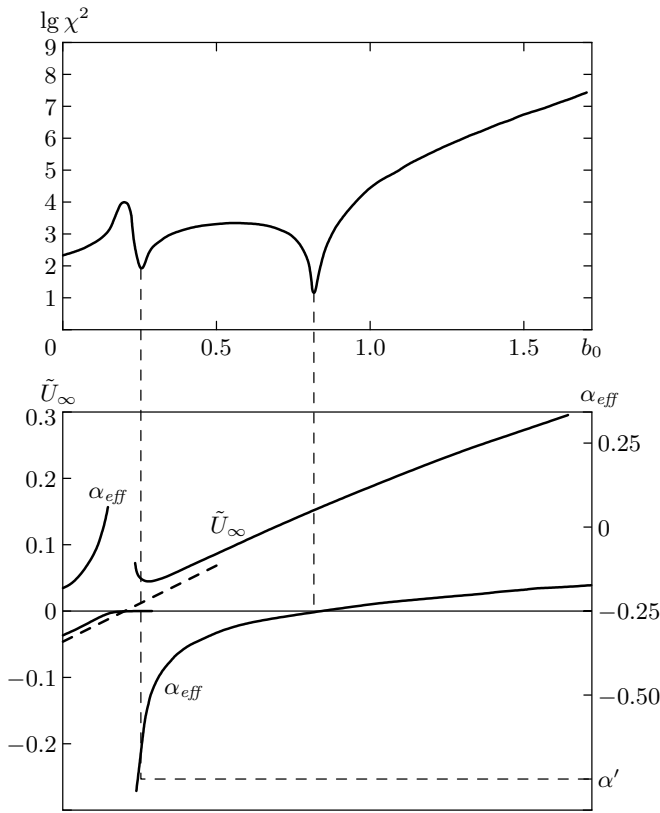
дает оценку  $W_\infty$ , не очень чувствительную к погрешностям в  $\alpha$ . Влияние отброшенных в (6.16) членов приводит лишь к малым возмущениям описанной картины.



**Рис. 9.** Теоретические зависимости  $\chi^2$ ,  $\alpha_{eff}$  и  $U_\infty$  от  $b_0$  в пренебрежении поправками к (6.16), показанными многоточием. При обработке путем логарифмирования зависимости часто оказываются разрывными (штрихи) [65]

Из сказанного вытекает возможность различных оценок индекса  $\alpha$ : 1) по значению  $\alpha_{eff}$  в первом минимуме  $\chi^2$  (принимая нумерацию минимумов со стороны больших  $b_0$ ); 2) по положению второго минимума  $\chi^2$ ; 3, 4) по смене знака  $U_\infty$ ; технически эта оценка проводилась в двух вариантах — с использованием обработки путем логарифмирования или обработки с фиксированным индексом  $\alpha$ , приближенное значение которого бралось из предыдущих оценок.

Несколько оценок получается и для  $W_\infty$ : 1) по значению  $U_\infty$  в первом минимуме  $\chi^2$ ; 2, 3) по наклону линейного участка зависимости  $U_\infty(b_0)$  вблизи ее



**Рис. 10.** Зависимости  $\chi^2$ ,  $\alpha_{eff}$  и  $\tilde{U}_\infty$  от  $b_0$  для интеграла (6.18) при обработке в интервале  $24 \leq N \leq 50$ . Штрихом показана зависимость  $\tilde{U}_\infty(b_0)$  вблизи корня при обработке с фиксированным значением индекса  $\alpha = -0.25$

корня при обработке с фиксированным индексом  $\alpha$ ; последний варьируется в пределах разброса значений, полученных указанными выше способами, что дает верхнюю и нижнюю оценку  $W_\infty$ .

Можно показать, что различие между несколькими оценками  $\alpha$  и  $W_\infty$  имеет тот же порядок величины, что и отклонение каждой из них от точного значения; это дает способ определения погрешности результатов. Наличие нескольких оценок имеет большое значение: если две оценки по случайным причинам могут оказаться близкими, приводя к заниженной величине прогнозируемой ошибки, то случайное сближение трех или четырех оценок представляется маловероятным.

Проиллюстрируем сказанное на примере интеграла

$$W(g) = \int_0^\infty d\varphi \exp(-\varphi^2 - g\varphi^4), \quad (6.18)$$

который можно рассматривать как нульмерный ана-

лог функционального интеграла теории  $\varphi^4$ . Его асимптотика при  $g \rightarrow \infty$  имеет вид (6.7) с параметрами  $\alpha = -1/4$ ,  $W_\infty = \Gamma(1/4)/4$ , а поправки к ней имеют вид ряда по степеням  $g^{-1/2}$ . При использовании коэффициентов  $W_N$ , заданных с двойной компьютерной точностью ( $\delta \sim 10^{-14}$ ), получены зависимости<sup>14)</sup>, показанные на рис. 10, из которых получают оценки

$$\alpha = -0.235 \pm 0.025, \quad W_\infty = 0.908 \pm 0.025, \quad (6.19)$$

$$\alpha' = -0.75 \pm 0.08,$$

в хорошем согласии с точными значениями

$$\alpha = -0.25, \quad W_\infty = 0.9064\dots, \quad (6.20)$$

$$\alpha' = -0.75.$$

Для проверки интерполяционной устойчивости алгоритма воспользуемся возможностью записать коэффициенты разложения в виде<sup>15)</sup>

$$W_N = ca^N \Gamma(N+b) \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{N^2} + \dots + \frac{A_K}{N^K} + \dots \right\}, \quad (6.21)$$

так как относительные поправки к асимптотике Липатова имеют вид регулярного разложения по  $1/N$ . Это представление удобно использовать для интерполяции коэффициентной функции, обрывая ряд на конечном числе членов и выбирая параметры  $A_K$  из соответствия с несколькими первыми коэффициентами  $W_N$ . При использовании для интерполяции параметров асимптотики Липатова, первой поправки к ней  $A_1/N$  и одного коэффициента  $W_1$  [65] получается результат  $\alpha = -0.245 \pm 0.027$ ,  $W_\infty = 0.899 \pm 0.014$ , практически совпадающий с (6.20). Его погрешность по-прежнему определяется ошибками округления, хотя ошибки интерполяции имеют величину на 10 порядков больше.

В качестве второго примера рассмотрим задачу об основном состоянии  $E_0(g)$  ангармонического осциллятора (1.1), которая может быть сведена к одномерной теории  $\varphi^4$ . При использовании коэффициентов  $W_N$ , вычисленных в работе [6] с точностью  $\delta \sim 10^{-12}$ , получаются результаты для параметров асимптотики [65]

<sup>14)</sup> По техническим причинам здесь и в дальнейшем приводятся коэффициенты  $\tilde{U}_N = U_N \Gamma(b_0 + N_0)$ , нормированные так, чтобы иметь постоянный предел при  $b_0 \rightarrow \infty$ ;  $N_0$  — нижний предел суммирования в (6.5), который может отличаться от единицы, если несколько первых членов ряда (6.1) равны нулю. Аналогично,  $\tilde{U}_\infty = U_\infty \Gamma(b_0 + N_0)$ .

<sup>15)</sup> Часто возникающие вопросы, связанные с аналитичностью коэффициентной функции и ее интерполяцией, обсуждаются в нашем комментарии [113] к работе [114].

$$\alpha = 0.317 \pm 0.032, \quad W_\infty = 0.74 \pm 0.14, \quad (6.22)$$

которые согласуются с точными значениями  $\alpha = 0.3333\dots$ ,  $W_\infty = 0.6679\dots$  и показывают адекватную оценку ошибки.

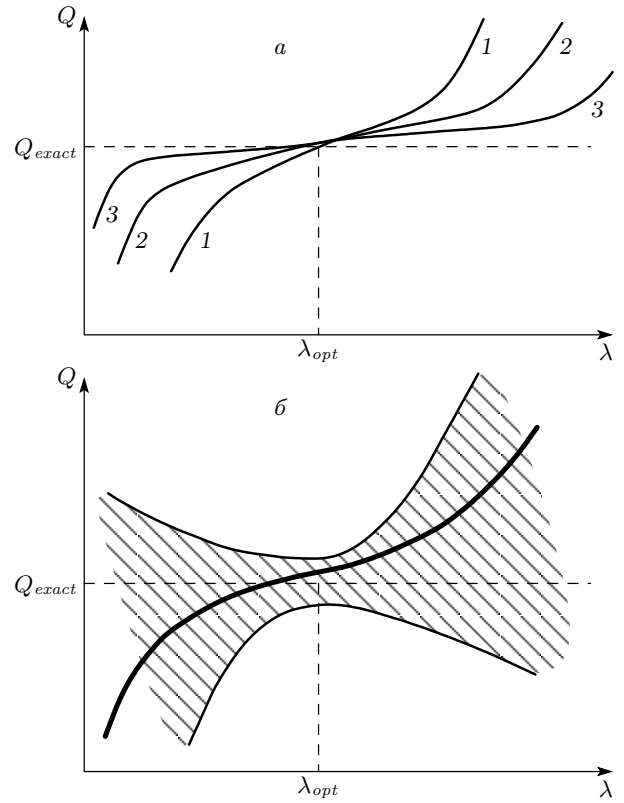
Наличие надежной оценки ошибок позволяет по-новому подойти к проблеме оптимизации процедуры суммирования. На абстрактном уровне оптимизация состоит в том, что вводится некоторая вариация процедуры суммирования, характеризуемая произвольным параметром  $\lambda$ , который затем выбирается из соображений лучшей сходимости алгоритма. Например, исходный ряд (6.1) можно возвести в степень  $\lambda$  и суммировать переразложенный ряд

$$W(g)^\lambda = \tilde{W}_0 - \tilde{W}_1 g + \tilde{W}_2 g^2 - \dots + \tilde{c} a^N \Gamma(N+b)(-g)^N + \dots, \quad (6.23)$$

который по свойствам аналогичен исходному (меняется лишь параметр  $c$  асимптотики Липатова [8]). Теоретически использование ряда (6.23) ничем не хуже, чем использование ряда (6.1), и значение любой величины  $Q$ , полученной в результате суммирования, не должно зависеть от  $\lambda$ . В условиях ограниченной информации о ряде (6.1) зависимость  $Q$  от  $\lambda$  возникает, но с увеличением информации становится все более слабой. В общем случае равномерная по  $\lambda$  сходимости не имеет места и приближенное значение  $Q$  близко к точному лишь в области некоторого «плато» (рис. 11а), при удалении от которого отклонения быстро нарастают; по мере увеличения информации плато расширяется и уплощается (см., например, [115]). Ясно, что наилучшая сходимость достигается в центре плато, но выбор этого «центра» не всегда очевиден: плато может быть асимметричным или плохо выраженным, его центр может сдвигаться в процессе сходимости и т. д. Поэтому выбор оптимального  $\lambda$ , а следовательно, наилучшего приближения для  $Q$ , является весьма субъективными.

На наш взгляд, проблема оптимизации может быть решена объективно. Дело в том, что от  $\lambda$  зависит не только приближенное значение  $Q$ , но и ошибка его определения; если эта ошибка оценена правильно, то точное значение  $Q_{exact}$  должно быть совместимо с приближенными результатами при любых  $\lambda$  (рис. 11б): тем самым снимается проблема фиктивной зависимости  $Q$  от  $\lambda$ . Если такая «идеальная» ситуация достигнута, то выбор оптимального значения  $\lambda$  сводится к выбору результата с минимальной погрешностью.

Процедуру оптимизации логично проводить на стадии интерполяции, так как все неопределенно-



**Рис. 11.** а) Любая величина  $Q$ , полученная в результате суммирования ряда, теоретически не зависит от оптимизационного параметра  $\lambda$ , но в условиях ограниченной информации такая зависимость возникает. При увеличении информации эта зависимость эволюционирует от кривой 1 к кривым 2, 3 и т. д. Оптимальное значение  $\lambda$  лежит вблизи центра плато. б) От  $\lambda$  зависит не только приближенное значение  $Q$  (сплошная кривая), но и ошибка его определения (коридор ошибок заштрихован); при правильной оценке ошибки точное значение  $Q_{exact}$  должно быть совместимо со всеми данными. В показанной «идеальной» ситуации выбор оптимального значения  $\lambda$  сводится к выбору результата с минимальной погрешностью

сти результатов в конечном счете связаны с неточным знанием коэффициентов  $W_N$ . Если переписать (6.21) в эквивалентной форме

$$W_N = ca^N N^{\tilde{b}} \Gamma(N+b-\tilde{b}) \left\{ 1 + \frac{\tilde{A}_1}{N-\tilde{N}} + \frac{\tilde{A}_2}{(N-\tilde{N})^2} + \dots + \frac{\tilde{A}_K}{(N-\tilde{N})^K} + \dots \right\} \quad (6.24)$$

и проводить интерполяцию путем обрыва ряда и

подбора коэффициентов  $\tilde{A}_K$ , то возникает множество реализаций интерполяционной процедуры, характеризуемое двумя параметрами,  $\tilde{b}$  и  $\tilde{N}$ . Оптимизация по  $\tilde{b}$  проводится из теоретических соображений [65] и дает  $\tilde{b} = b - 1/2$ , что соответствует параметризации асимптотики Липатова в виде  $ca^N N^{b-1/2} \Gamma(N + 1/2)$ . Оптимизация по  $\tilde{N}$  продемонстрирована в [65] на примере ряда для ангармонического осциллятора при использовании интерполяции по первым 9 коэффициентам. Грубая оптимизация проводилась по зависимостям  $\chi^2$  от  $\tilde{N}$  для нескольких фиксированных значений  $b_0$ , которые имеют минимумы в узком интервале значений  $\tilde{N} = -(5.0-5.5)$ , что определяет множество интерполяций, совместимых со степенным законом для асимптотики  $W(g)$ . Затем проводилась систематическая обработка с определением параметров  $\alpha$  и  $W_\infty$ ; «идеальная» картина, ожидаемая согласно рис. 11б, получалась при расширении коридора ошибок для  $\alpha$  в 1.3 раза, а для  $W_\infty$  — в 1.1 раза, что допустимо ввиду порядкового характера оценки ошибок. Если выбрать значения  $\alpha$  и  $W_\infty$ , совместимые со всем массивом данных, и минимизировать одностороннюю ошибку, то получается результат

$$\alpha = 0.38 \pm 0.05, \quad W_\infty = 0.52 \pm 0.12, \quad (6.25)$$

отличие которого от точного адекватно оценивается его погрешностью.

Если информации о коэффициентах  $W_N$  достаточно для восстановления асимптотики  $W(g)$ , то суммирование ряда (6.1) при произвольных  $g$  не составляет проблемы: первые коэффициенты  $U_N$  вычисляются по формуле (6.10), а далее их можно продолжить согласно асимптотике  $U_\infty N^{\alpha-1}$ ; тем самым известны все коэффициенты сходящегося ряда (6.3). Ошибка суммирования определяется точностью восстановления асимптотики  $U_N$ , которую будем характеризовать величиной  $\Delta$ ; в действительности она зависит от  $N$  логарифмически, но в ограниченном интервале может считаться постоянной. Если ввести характерный масштаб  $N_c$ , на котором относительная ошибка сравнивается с  $\Delta$ , и принять аппроксимацию

$$\frac{\delta U_N}{U_N} = \begin{cases} 0, & N < N_c, \\ \Delta, & N \geq N_c, \end{cases} \quad (6.26)$$

то для точности суммирования получим

$$\frac{\delta W(g)}{W(g)} \sim \begin{cases} \Delta, & ag \gtrsim N_c \\ \Delta \exp\{-2(N_c/ag)^{1/2}\}, & ag \lesssim N_c. \end{cases} \quad (6.27)$$

При простом суммировании ряда с использованием  $N_m$  известных коэффициентов точность суммирования дается формулой (6.27) с  $N_c = N_m$ ,  $\Delta \sim 1$  и оказывается хуже, чем (6.6). Однако интерполяционная устойчивость алгоритма позволяет получать  $\Delta \ll 1$  и  $N_c \gg N_m$  уже при небольших  $N_m$  [65].

## 7. РЯДЫ, «НЕ СУММИРУЕМЫЕ ПО БОРЕЛЮ»

Как ясно из разд. 3, определение суммы факториального ряда не может существенно отличаться от борелевского (т.е. должно быть борелевским или эквивалентным ему), так как иначе непротиворечивая работа с расходящимися рядами оказывается невозможной. Тем не менее в литературе часто говорят о рядах, «не суммируемых по Борелю». Такая терминология является крайне неудачной и используется в двух ситуациях.

Первая ситуация связана с рядами, коэффициенты которых растут существенно быстрее, чем  $N!$ . В этом случае стандартное преобразование (3.11) неэффективно, но можно использовать «сильное» преобразование Бореля

$$\begin{aligned} F(g) &= \sum_{N=0}^{\infty} F_N g^N = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{\Gamma(kN+1)} \int_0^{\infty} dx x^{kN} e^{-x} g^N = \\ &= \int_0^{\infty} dx e^{-x} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{\Gamma(kN+1)} (gx^k)^N, \quad (7.1) \end{aligned}$$

позволяющее суммировать ряды с коэффициента-



ми, растущими как  $(N!)^k$  с произвольным конечным  $k^{16}$ .

Вторая ситуация более нетривиальна и связана с факториальными рядами, имеющими знакопостоянные коэффициенты. Как ясно из простого примера

$$F(g) = \sum_{N=0}^{\infty} a^N N! g^N = \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x}}{1-agx}, \quad (7.2)$$

$ag > 0,$

в этом случае особые точки  $B(z)$  лежат на положительной полуоси и через них проходит контур интегрирования в (3.12). Борелевский интеграл оказывается плохо определенным и возникает проблема его правильной интерпретации: так, контур интегрирования в (7.2) можно провести выше или ниже особой точки  $x = 1/ag$  или понимать интеграл в смысле главного значения.

Чтобы получить все множество возможных интерпретаций, запишем определение гамма-функции в виде

$$\Gamma(z) = \sum_i \gamma_i \int_{C_i} dx e^{-x} x^{z-1}, \quad \sum_i \gamma_i = 1, \quad (7.3)$$

где  $C_1, C_2, \dots$  — произвольные контуры, исходящие из начала координат и уходящие на бесконечность в правой полуплоскости. Тогда преобразование Бореля приводит к результату

$$F(g) = \sum_i \gamma_i \int_{C_i} dx e^{-x} x^{b_0-1} B(gx), \quad (7.4)$$

где контуры  $C_i$  перестают быть эквивалентными из-за особенностей борелевского образа  $B(z)$  и не

<sup>16)</sup> В связи с последним может возникнуть вопрос: почему такие сильные преобразования мы не используем вообще во всех случаях? Если речь идет о формально точных вычислениях, то все определяется соображениями аналитического удобства — можно пользоваться любым преобразованием, позволяющим довести вычисления до конца. Что касается приближенных вычислений, то использование сильных методов суммирования далеко не столь желательно, как может казаться. Как известно из математики, нетривиальность функции определяется характером и расположением ее особенностей. При сильном преобразовании (7.1) борелевский образ является целой функцией и имеет одну сложно устроенную особую точку, находящуюся на бесконечности. Но именно последний факт (устроена сложно, а находится далеко) и доставляет практические неудобства: особую точку почти невозможно исследовать, тогда как ее влияние не становится более слабым. По этой причине удобно как раз наиболее слабое преобразование Бореля, когда борелевский образ имеет особенности в конечной части комплексной плоскости и уже их расположение дает существенную информацию о функции (разд. 6).

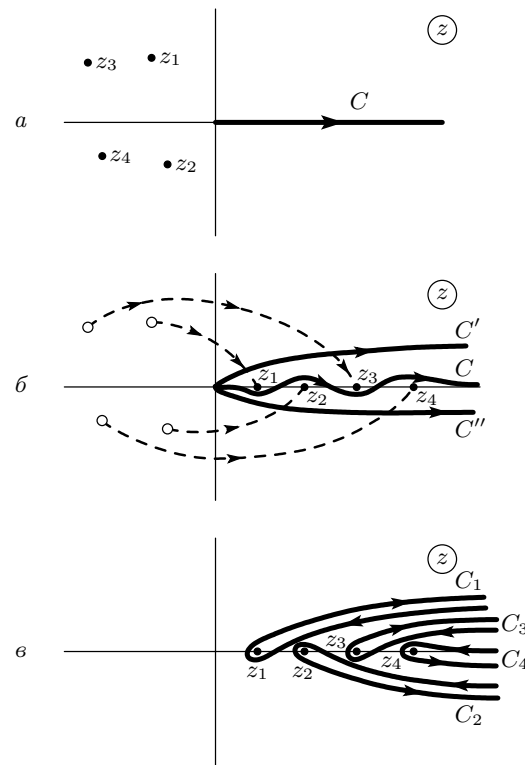


Рис. 12. К борелевской несуммируемости

могут быть совмещены с положительной полуосью, как это было возможно в (7.3). Выбор интерпретации определяется параметрами  $\gamma_i$ , если в множество  $\{C_i\}$  включены все неэквивалентные контуры.

Нахождение правильной интерпретации борелевского интеграла невозможно без дополнительной информации о математическом объекте, представленном расходящимся рядом. На этом основании в литературе преобладает нигилистическая точка зрения на возможность восстановления физических величин из их пертурбативных разложений [116, 117]. Однако значение указанной информации не нужно переоценивать. На наш взгляд, в основу интерпретации следует положить принцип аналитичности по параметрам модели, который практически всегда справедлив в физических приложениях.

Пусть при некоторых значениях параметров все особенности  $z_i$  борелевского образа лежат в левой полуплоскости (рис. 12a). Тогда для факториальных рядов с асимптотикой коэффициентов  $ca^N \Gamma(N+b)$  борелевский интеграл (3.12) является единственной аналитической функцией, удовлетворяющей сильно-асимптотическому условию в секторе  $|\arg g| \leq \pi$ ,  $|g| < g_0$  при любом  $g_0$  ([21, разд. 8.1]), т. е. на всем физическом листе римановой поверхности. Поэто-

му выбор контура интегрирования  $C$  вдоль положительной полуоси является в этом случае безусловно правильным (рис. 12а). Пусть в результате изменения параметров особенности борелевского образа переходят на положительную полуось и ситуация становится «борелевски несуммируемой»; для сохранения аналитичности по параметрам модели особые точки не должны пересекать контур  $C$ , и его следует деформировать так, как на рис. 12б. Следовательно, для правильной интерпретации борелевского интеграла все параметры  $\gamma_i$  в формуле (6.4), кроме одного, равны нулю.

Интерпретация в смысле главного значения соответствует полусумме интегралов по контурам  $C'$  и  $C''$ . Ее отличие от правильной интерпретации определяется полусуммой интегралов по контурам  $C_i$ , охватывающим особые точки  $z_i$  (рис. 12в). Интеграл по контуру  $C_i$  имеет порядок  $\exp(-z_i/g)$  и при интерпретации в смысле главного значения такие непертурбативные вклады должны в явном виде добавляться к борелевскому интегралу. Выражение такого рода обсуждалось Зинн-Жюстином в задаче о двухъямном потенциале [118].

Можно ли гарантировать получение одной и той же интерпретации борелевского интеграла при аналитическом продолжении по различным параметрам? Нетривиальность вопроса проявляется в том, что для этой цели не подходит аналитическое продолжение по константе связи. Действительно, действие  $S\{g, \varphi\}$  (в теориях типа  $\varphi^4$ ) может быть преобразовано к виду  $S\{\phi\}/g$  и замена  $g \rightarrow ge^{i\psi}$  эквивалентна замене  $S\{\phi\} \rightarrow S\{\phi\}e^{-i\psi}$ , т. е. конфигурация особенностей борелевского образа поворачивается в комплексной плоскости на угол  $\psi$ . Для перевода особенностей с положительной полуоси в левую полуплоскость требуется  $\psi > \pi/2$ , что невозможно при сохранении сходимости функционального интеграла.

Фактически в реальных задачах теории поля множество параметров оказывается сильно ограниченным: трансляционная инвариантность и другие симметрии позволяют включать в действие лишь соответствующие инварианты, а условие перенормируемости требует ограничиваться членами с достаточно низкими степенями полей и их градиентов. Коэффициенты при старших степенях полей обычно ассоциируются с константой связи и не подходят для аналитического продолжения. Коэффициенты при квадратичных по полям членах также не подходят — при их изменении, вообще говоря, теряется устойчивость вакуума и происходят фазовые переходы. Поэтому остаются коэффициенты

при промежуточных степенях полей (типа  $\varphi^3$  в теории  $\varphi^4$ ) и перекрестные члены, описывающие взаимодействие между различными полями. Аналитичность по этим коэффициентам имеет место в любой конечной части комплексной плоскости в силу а) сходимости функциональных интегралов, определенных на конечной решетке, б) возможности предельного перехода к бесконечному объему вне точек фазовых переходов, где конечность корреляционного радиуса позволяет разбить систему на квазинезависимые подсистемы и в) возможности снятия ультрафиолетового обрезания в силу перенормируемости. Рассмотрим несколько конкретных примеров.

#### Нульмерный случай

В качестве первого примера рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} W(g) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \exp\{-\varphi^2 - 2\gamma\sqrt{g}\varphi^3 - g\varphi^4\} = \\ &= g^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \exp\{-S\{\phi\}/g\}, \quad (7.5) \end{aligned}$$

являющийся нульмерным аналогом теорий типа  $\varphi^4$ , содержащих кубические члены. Согласно 'т Хофту [50], особенности в борелевской плоскости определяются экстремумами безразмерного действия  $S\{\phi\}$ :

$$S\{\phi_c\} = \frac{1}{32} \left[ -27\gamma^4 + 36\gamma^2 - 8 \pm \gamma(9\gamma^2 - 8)^{3/2} \right]. \quad (7.6)$$

При  $\gamma = 0$  имеются две перевальные точки  $\phi_c = \pm i/\sqrt{2}$ , значение действия в которых одинаково, и возникает особенность в точке  $z = S\{\phi_c\} = -1/4$ , лежащая на отрицательной полуоси; при  $0 < \gamma < \gamma_c$ , где  $\gamma_c = (8/9)^{1/2} \approx 0.942$ , имеются две комплексно-сопряженные особые точки, которые при  $\gamma > \gamma_c$  выходят на положительную полуось (рис. 13а), так что ситуация становится «борелевски несуммируемой». Точка  $\gamma_c$  соответствует значению  $\gamma$ , при котором возникает второй минимум действия  $S\{\phi\}$ , лежащий на действительной оси.

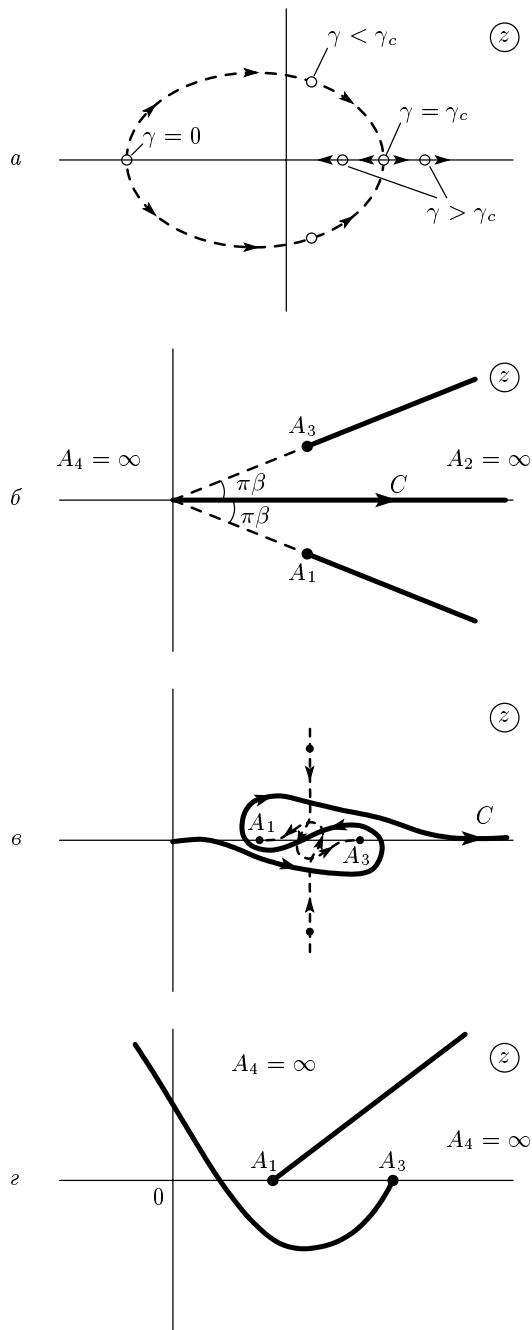
При  $\gamma = 0$  контур интегрирования  $C$  в борелевском интеграле (5.9) проходит вдоль положительной полуоси; очевидно, тот же выбор контура сохраняется для  $\gamma < \gamma_c$  (рис. 13б). Проведем разрезы от особых точек до бесконечности вдоль лучей, соединяющих их с началом координат. Возникающая конфигурация (рис. 13б) может рассматриваться как четырехугольник  $A_1A_2A_3A_4$  с бесконечными вершинами  $A_2, A_4$ , отображение которого на единичный круг дается интегралом Шварца–Кристоффеля [51, 119],

**Таблица 1.** Результаты суммирования ряда для интеграла (7.5) при  $\gamma = 0.25$

$g$	$W(g)$	
	Точное значение	Суммирование ряда
0.0625	1.718915	1.718915
0.125	1.674422	1.674422
0.25	1.604821	1.604821
0.50	1.508008	1.508008
1	1.387746	1.387745
2	1.252226	1.252220
4	1.110955	1.11093
8	0.972181	0.97212
32	0.722937	0.72272
$g \rightarrow \infty$	$1.812g^{-0.25}$	$1.835g^{-0.252}$

**Таблица 2.** Результаты суммирования ряда для интеграла (7.5) при  $\gamma = 0.75$

$g$	$W(g)$	
	Точное значение	Суммирование ряда
0.0625	1.902930	1.902928
0.125	1.937627	1.93755
0.25	1.903621	1.90300
0.50	1.787743	1.7851
1	1.615170	1.608
2	1.419861	1.406
4	1.226524	1.205
8	1.048303	1.020
32	0.753306	0.714
$g \rightarrow \infty$	$1.812g^{-0.25}$	$1.885g^{-0.275}$



**Рис. 13.** а) Изменение особенностей в борелевской плоскости при увеличении  $\gamma$  для интеграла (7.5). Выбор контура интегрирования при  $\gamma < \gamma_c$  (б) и  $\gamma > \gamma_c$  (в). Для сохранения точки  $A_1$  на физическом листе римановой поверхности разрез, исходящий из точки  $A_3$ , удобно выбрать параболическим (з)

после чего нетрудно перейти к отображению на плоскость с разрезом (рис. 8з). Последнее отображение определяется формулой

$$z = p \frac{u}{(1-u)^\beta}, \quad p = \frac{\beta^\beta (1-\beta)^{1-\beta}}{a}, \quad (7.7)$$

где  $2\pi\beta$  — угол между двумя разрезами,  $1/a$  — расстояние от особых точек до начала координат. Любопытно, что (6.4) и (6.9) являются частными случаями преобразования (7.7) при  $\beta = 2$  и  $\beta = 1$ . Коэффициенты  $U_N$  пересуммированного ряда (6.3) даются выражением

$$U_0 = B_0, \quad (7.8)$$

$$U_N = \sum_{K=1}^N B_K p^K \frac{\Gamma(N - K + \beta K)}{\Gamma(N - K + 1)\Gamma(\beta K)},$$

а их асимптотика при  $N \rightarrow \infty$

$$U_N = U_\infty N^{-1+\alpha\beta}, \quad U_\infty = \frac{W_\infty}{\Gamma(\alpha\beta)\Gamma(\alpha + b_0)} \quad (7.9)$$

определяет параметры асимптотики  $W(g)$  в пределе сильной связи. Картина минимумов  $\chi^2$  для

$0 < \gamma < \gamma_c$  вполне аналогична таковой для  $\gamma = 0$  (рис. 10). Примеры суммирования ряда для  $\gamma = 0.25$  и  $\gamma = 0.75$  приведены в таблицах 1 и 2; как и при  $\gamma = 0$ , точность суммирования определяется точностью восстановления асимптотики, которая ухудшается при приближении  $\gamma$  к  $\gamma_c$  (ср. табл. 1 и 2). Действительно, поправочный член к асимптотике (7.9) имеет порядок  $N^{-1+\alpha'\beta}$  и (ввиду  $\alpha - \alpha' \sim 1$ ) реальный большой параметр разложения есть  $N^\beta$ , что подтверждается и оценкой точности суммирования

$$\frac{\delta W(g)}{W(g)} \sim \begin{cases} \Delta, & ag \gtrsim N_c^\beta \\ \Delta \exp \left\{ -(1 + \beta) [(1 - \beta)^{1-\beta} N_c^\beta / ag]^{1/(1+\beta)} \right\}, & ag \lesssim N_c^\beta, \end{cases} \quad (7.10)$$

аналогичной (6.27). При  $\gamma \rightarrow \gamma_c$  имеем  $\beta \rightarrow 0$ , тогда как используемые значения  $N$  ограничены сверху по техническим причинам; поэтому параметр  $N^\beta$  неизбежно перестает быть большим. Таким образом, в пределах сформулированного алгоритма случай строгого равенства  $\gamma = \gamma_c$  является недостижимым, хотя нет никаких принципиальных ограничений, чтобы приблизиться к нему сколь угодно близко.

Для перехода в область  $\gamma > \gamma_c$  придадим параметру  $\gamma$  постоянную мнимую добавку  $i\delta$ , чтобы снять вырождение особых точек при  $\gamma = \gamma_c$ . При  $\gamma \approx \gamma_c$  перевальное действие (7.6) содержит сингулярный вклад  $(\gamma - \gamma_c)^{3/2}$  и при увеличении  $\gamma$  вертикальное движение особых точек сменяется горизонтальным после поворота на угол  $3\pi/2$ , что приводит к «перекручиванию» контура  $C$  (рис. 13в). Если разрез, исходящий из особой точки  $A_3$ , развернуть вдоль положительной полуоси, то точка  $A_1$  оказывается на другом листе римановой поверхности и не дает вклада в расходимость ряда теории возмущений: это проверяется непосредственным вычислением коэффициентов и согласуется с тем, что формально вычисленный вклад точки  $A_1$  в коэффициенты разложения является чисто мнимым. Чтобы сохранить особую точку  $A_1$  на физическом листе римановой поверхности, разрез, исходящий из точки  $A_3$ , должен быть выбран криволинейным. Конструктивный алгоритм получается, если выбрать его параболическим (рис. 13г): тогда преобразование  $w = \sqrt{z - A_1}$  переводит конфигурацию рис. 13в в полуплоскость с прямолинейным разрезом, которая путем преобразования Шварца – Кристоффеля переводится на единичный круг, а затем на любую удобную область типа рис. 8в.

### Двухъямный потенциал

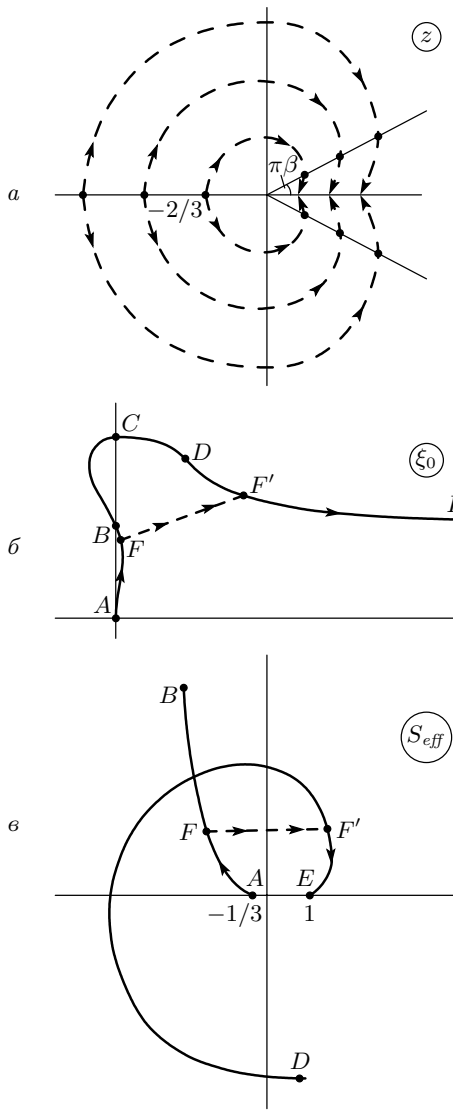
Рассмотрим задачу об основном состоянии квантовой частицы в потенциале

$$U(x) = \frac{1}{2}x^2 - \gamma\sqrt{g}x^3 + \frac{1}{2}gx^4, \quad (7.15)$$

который при  $\gamma = 0$  сводится к ангармоническому осциллятору (1.1), а при  $\gamma = 1$  переходит в двухъямный потенциал с эквивалентными минимумами. Последняя задача представляет интерес как типичный пример задач с вырожденными вакуумами, которые по мнению Зинн-Жюстина [116] в принципе не решаются путем суммирования ряда теории возмущений. Задача (7.15) сводится к одномерной теории поля, которая при  $0 < \gamma < 1$  имеет два комплексно-сопряженных инстантона с безразмерным действием

$$S\{\phi_c\} = -\frac{2}{3} + \gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma(\gamma^2 - 1) \left[ \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \pm \pi i \right]. \quad (7.16)$$

С учетом  $m$ -инстантонных конфигураций особенности борелевского образа при  $\gamma = 0$  лежат на отрицательной полуоси в точках  $z_m = -(2/3)m$ , тогда как при  $0 < \gamma < 1$  они располагаются на двух лучах, исходящих из начала координат (рис. 14а). В последнем случае ряд теории возмущений может быть просуммирован с помощью конформного преобразования (7.7). Случай  $\gamma = 1$  соответствует критической ситуации  $\beta \rightarrow 0$ : в строгом смысле она недостижима, но нет принципиальных ограничений, чтобы приблизиться к ней сколь угодно близко. При этом нет необходимости строить ряд теории возмущений при произвольных  $\gamma$ , а достаточно исследовать лишь изменение асимптотики Липатова при небольших отклонениях  $\gamma$  от единицы [43].



**Рис. 14.** а) Изменение особенностей в борелевской плоскости при увеличении  $\gamma$  для потенциала (7.15). б, в) К интерпретации борелевского интеграла в теории Янга–Миллса: кривая  $ABCDE$  в плоскости  $\xi_0$ , определяемая условием  $\text{Im} f(\xi_0) = 0$  (б) и соответствующее ей изменение действия  $S_{\text{eff}}$  (в единицах  $16\pi^2$ ) (в)

### Теория Янга–Миллса

Для интерпретации борелевского интеграла в теории Янга–Миллса мы используем процедуру, близкую к аналитическому продолжению по константе перекрестного взаимодействия между полями, но сохраняющую калибровочную инвариантность. При этом оказываются полезными результаты работы [18], в которой рассматривалась модель

$$S\{A, \varphi\} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + |(\partial_\mu - ig\tau^a A_\mu^a) \varphi|^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 |\varphi|^4 \right\}, \quad (7.18)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

описывающую поле Янга–Миллса  $A_\nu^a$  с  $SU(2)$ -симметрией, взаимодействующее с комплексным скалярным полем  $\varphi$  ( $\tau^a = \sigma^a/2$ , где  $\sigma^a$  — матрицы Паули). Переопределяя полевые переменные,  $A \rightarrow B/g$ ,  $\varphi \rightarrow \phi/\lambda$ , приведем действие (7.18) к виду

$$S\{A, \varphi\} = \frac{S_0\{B\}}{g^2} + \frac{S_1\{B, \phi\}}{\lambda^2} \equiv \frac{S\{B, \phi\}}{g^2}, \quad (7.19)$$

где в последнем равенстве принято, что  $\chi = \lambda^2/g^2$ . Произвольный функциональный интеграл  $Z(g^2, \lambda^2)$  такой теории может быть разложен в двойной ряд по  $g^2$  и  $\lambda^2$ :

$$Z(g^2, \lambda^2) = \sum_{K, M} Z_{K, M} g^{2M} \lambda^{2K}, \quad (7.20)$$

коэффициенты  $Z_{K, M}$  которого при больших  $K$  и  $M$  определяются перевальными конфигурациями функционала (7.19) с дополнительными членами  $-M \ln g^2$  и  $-K \ln \lambda^2$ . Перевальные значения  $g^2$  и  $\lambda^2$  равны

$$g_c^2 = \frac{S_0\{B_c\}}{M}, \quad \lambda_c^2 = \frac{S_1\{B_c, \phi_c\}}{K}, \quad (7.21)$$

тогда как перевальная конфигурация полей

$$B_\mu^a(x) = 4\eta_{\mu\nu}^a x_\nu \frac{\rho^4 - 1}{(x^2 + \rho^2)(\rho^2 x^2 + 1)}, \quad (7.22)$$

$$\phi(x) = \pm i\sqrt{\chi} U \frac{4\sqrt{3}}{[(x^2 + \rho^2)(\rho^2 x^2 + 1)]^{1/2}},$$

$$\rho^4 = 12\chi - 1,$$

где  $\eta_{\mu\nu}^a$  — матрицы 'т Хоффа,  $U$  — постоянный спинор,  $UU^* = 1$ . Для перевального действия имеем

$$S\{B_c, \phi_c\} = 16\pi^2 \left[ -2 + \frac{3(\text{sh} 4\xi_0 - 4\xi_0)}{2 \text{sh}^2 2\xi_0} \right], \quad (7.23)$$

$$S_1\{B_c, \phi_c\} = 16\pi^2 \chi (-6 \text{ch} 2\xi_0) e^{-2\xi_0} \frac{2\xi_0 \text{ch} 2\xi_0 - \text{sh} 2\xi_0}{\text{sh}^3 2\xi_0},$$

$$e^{2\xi_0} = \rho^2,$$

тогда как соответствующее значение  $\chi$  определяется условием

$$\chi = \frac{\lambda_c^2}{g_c^2} = \frac{M}{K} \frac{S_1\{B_c, \phi_c\}}{S_0\{B_c\}} \quad \text{или} \quad (7.24)$$

$$\frac{\chi S\{B_c, \phi_c\}}{S_1\{B_c, \phi_c\}} = \frac{M + K}{K}.$$

Если  $K$  и  $M$  в (7.20) находятся в некотором постоянном соотношении,

$$K = \gamma N, \quad M = \delta N, \quad \gamma + \delta = 1, \quad (7.25)$$

то асимптотическое поведение коэффициентов разложения определяется формулой

$$Z_{K,M} = Z_{\gamma N, \delta N} \propto N! \operatorname{Re} [S_{eff}(\xi_0)]^{-N} \quad (7.26)$$

где

$$S_{eff}(\xi_0) = 16\pi^2 \left[ -2 + \frac{3(\operatorname{sh}4\xi_0 - 4\xi_0)}{2\operatorname{sh}^2 2\xi_0} \right] \left( \frac{e^{4\xi_0} + 1}{12} \right)^\gamma, \quad (7.27)$$

а  $\xi_0$  определяется из второго уравнения (7.24), которое с учетом (7.23) принимает вид

$$f(\xi_0) = e^{2\xi_0} \operatorname{th} 2\xi_0 \times \frac{2\xi_0 + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^2 2\xi_0 - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\xi_0 \operatorname{ch} 2\xi_0}{2\xi_0 \operatorname{ch} 2\xi_0 - \operatorname{sh} 2\xi_0} = \frac{1}{\gamma}. \quad (7.28)$$

Уравнение (7.28) имеет два комплексно-сопряженных решения, суммирование по которым и приводит к появлению знака  $\operatorname{Re}$  в (7.26). На рис. 14б показана кривая  $ABCDE$ , определяемая условием  $\operatorname{Im} f(\xi_0) = 0$ ; при движении вдоль нее  $\operatorname{Re} f(\xi_0)$  меняется от 1 до  $\infty$  на участке  $AB$ , от  $-\infty$  до 0 на участке  $BC$  и от 0 до  $\infty$  на участке  $CE$ . Физическим значениям параметра  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ) соответствуют участки кривой  $AB$  и  $DE$ , на которых  $|S_{eff}(\xi_0)|/16\pi^2$  меняется от 1/3 до 5.4 и от 4.2 до 1 (рис. 14в). Асимптотика (7.26) определяется перевальной точкой с минимальным значением  $|S_{eff}(\xi_0)|$  и при изменении  $\gamma$  от 1 до 0 эффективно происходит движение по траектории  $AFF'E$  со скачком между точками  $F$  и  $F'$ , которые соответствуют одинаковым значениям  $\gamma$  и  $|S_{eff}(\xi_0)|$ . Скачкообразное изменение действия (рис. 14в) можно сделать непрерывным, если проводить переход через комплексные значения параметра  $\gamma$ : в этом случае он определяется соотношением (7.28) при движении по участку  $FF'$  в комплексной плоскости  $\xi_0$  (рис. 14б).

Начало кривой  $A$  соответствует значению  $\rho^2 = 1$ , при котором янг-миллсовское поле  $A_\mu^a$  исчезает (см. (7.22)) и  $S_{eff}(\xi_0)$  соответствует перевальному действию для теории  $\varphi^4$ . Напротив, на правом конце кривой ( $\xi_0 \rightarrow \infty + i\pi/4$ ) параметр  $\chi$  неограниченно возрастает, что приводит к исчезновению скалярного поля  $\varphi$ ; при этом  $S_{eff}(\xi_0)$  соответствует значению действия для инстантон–антиинстантонной пары в чистой теории Янга–Миллса. Если сопоставить коэффициентам (7.26) формальный ряд

$$Z(\tilde{g}^2) = \sum_N Z_{\gamma N, \delta N} \tilde{g}^N, \quad \tilde{g} = g^{2\gamma} \lambda^{2\delta}, \quad (7.29)$$

то путем изменения  $\gamma$  можно непрерывно перейти от ряда для теории  $\varphi^4$  к ряду для теории Янга–Миллса и проследить эволюцию сингулярностей борелевского образа, которые имеют место в точках  $z = S_{eff}(\xi_0)$  и  $z = S_{eff}^*(\xi_0)$ . С учетом  $m$ -инстантонных конфигураций мы приходим к той же картине, что и для двухъямного потенциала (рис. 14а). Поэтому ряд для теории Янга–Миллса нужно суммировать с помощью конформного преобразования (7.7) с предельно малым параметром  $\beta$ .

## 8. ФУНКЦИИ ГЕЛЛ-МАННА – ЛОУ ОСНОВНЫХ КВАНТОВЫХ ТЕОРИЙ ПОЛЯ

В этом разделе мы опишем процедуру восстановления функций Гелл-Манна–Лоу основных квантовых теорий поля (рис. 15) при произвольных значениях константы связи.

### 8.1. Теория $\varphi^4$

Первая попытка восстановления функции Гелл-Манна–Лоу для четырехмерной скалярной теории  $\varphi^4$  сделана в работе [11]; продвижение в область сильной связи предпринято группой Ширкова [12] и привело при больших  $g$  к асимптотике  $0.9g^2$ , которая лишь коэффициентом отличается от однопетлевого результата  $1.5g^2$ , справедливого при  $g \rightarrow 0$ ; близкая асимптотика  $1.06g^{1.9}$  получена Кубышиным [13]; вариационная теория возмущений [120] дает  $2.99g^{1.5}$ . Все эти результаты свидетельствуют о внутренней противоречивости (или «тривиальности») теории  $\varphi^4$ , что противоречит утверждениям разд. 5 об отсутствии в ней ренормалонных сингулярностей. Другой аргумент следует из физики конденсированного состояния: к теории  $\varphi^4$  математически точно сводится разумная

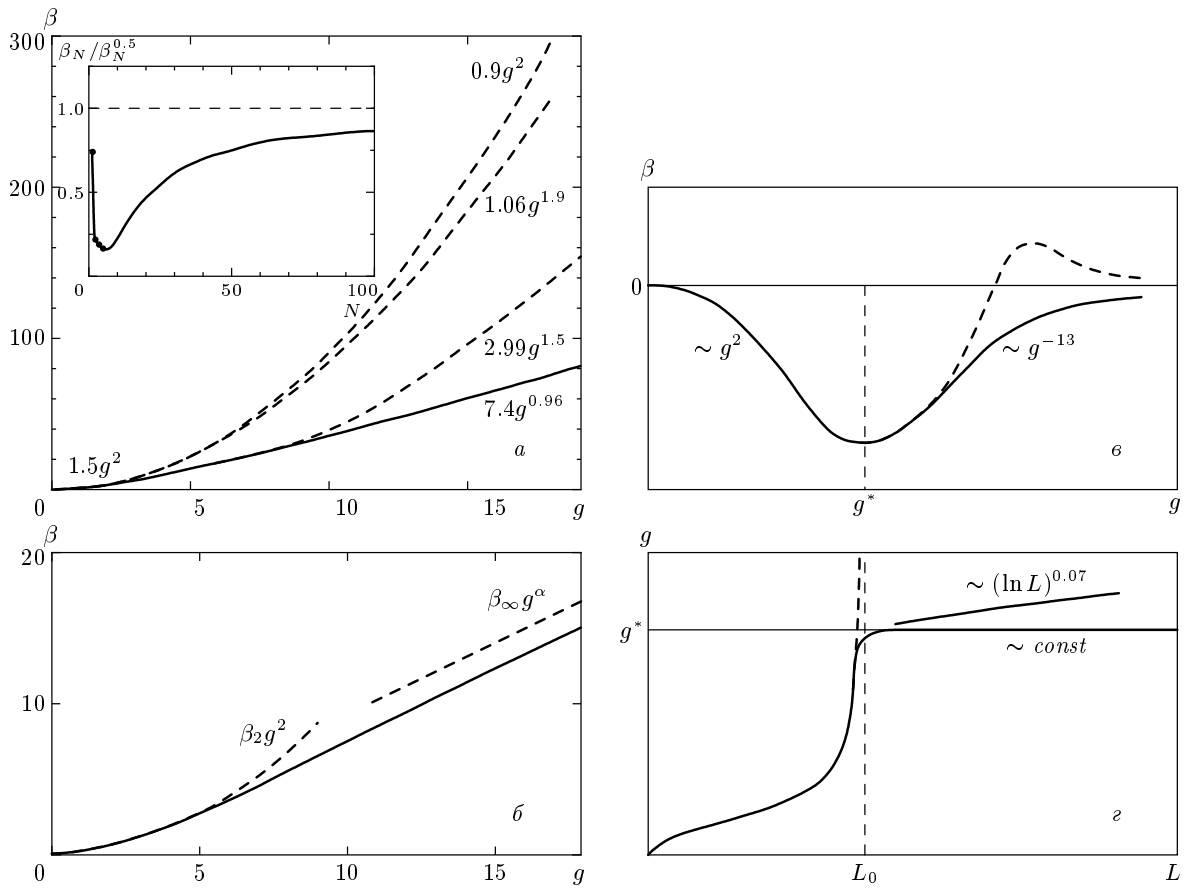


Рис. 15. а, б, в) Функции Гелл-Манна – Лоу для теории  $\varphi^4$ , КЭД и КХД. г) Поведение эффективного взаимодействия в КХД

модель неупорядоченной системы [121–123], хорошо определенная в континуальном пределе.

Опишем восстановление функции Гелл-Манна – Лоу на основе алгоритма, изложенного в разд. 6.2, принимая  $\beta(g)$  в качестве  $W(g)$  [65]. Будем исходить из той же информации, которая использовалась в работе [12], т.е. значений первых четырех коэффициентов разложения  $\beta$ -функции в схеме вычитаний [124, 125]

$$\beta(g) = \frac{3}{2}g^2 - \frac{17}{6}g^3 + \frac{154.14}{8}g^4 - \frac{2338}{16}g^5 + \dots \quad (8.1)$$

и их асимптотики высоких порядков [7] с учетом первой поправки к ней, вычисленной в [126]:

$$\beta_N = \frac{1.096}{16\pi^2} N^{7/2} N! \left\{ 1 - \frac{4.7}{N} + \dots \right\}. \quad (8.2)$$

Эта асимптотика определяется коэффициентами разложения для инвариантного заряда, который в данном случае определяется вершиной с  $M = 4$  (ср.

с (4.1.18)). Используется «естественная» нормировка заряда  $g$ , для которой параметр  $a$  в асимптотике Липатова (2.5) равен единице: при этом ближайшая особенность борелевского образа находится на единичном расстоянии от начала координат и  $\beta$ -функция изменяется на масштабе  $g \sim 1$ .

Интерполяция проводилась на основе формулы (6.24) с оптимальным значением  $\tilde{b} = 4$ . Зависимости  $\chi^2$  от  $\tilde{N}$  для фиксированных значений  $b_0$  [65] выделяют множество интерполяций ( $\tilde{N} = -0.5-0.5$ ), совместимых со степенным законом для асимптотики  $W(g)$ . На рис. 16 показано поведение коэффициентов  $U_N$  для интерполяции с  $\tilde{N} = 0$ , близкой к оптимальной. Если исключить кривые для  $b_0 \gg 1$  и  $b_0 \approx -2$ , для которых выход на асимптотику затянут, то при больших  $N$  имеется приблизительный выход на константу, что соответствует значению индекса  $\alpha$ , близкому к 1. Этот вывод подтверждается значением  $\alpha_{eff}$  в первом минимуме  $\chi^2$ , положением второго минимума  $\chi^2$  и сменой знака  $U_\infty$  (рис. 17).

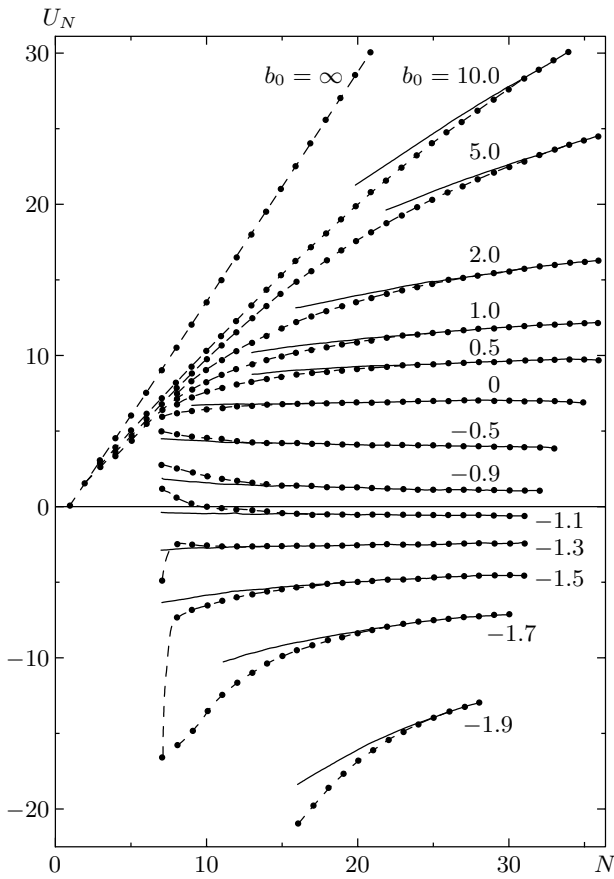


Рис. 16. Зависимости коэффициентов  $\tilde{U}_N$  от  $N$  при различных  $b_0$  (точки) и их обработка на степенной закон (сплошные кривые) для теории  $\varphi^4$ . Использовалась интерполяция с  $\tilde{b} = 4$ ,  $\tilde{N} = 0$ , близкая к оптимальной

Зависимость результатов от  $\tilde{N}$  представлена на рис. 18. Для индекса  $\alpha$  (рис. 18а) идеальная картина, соответствующая рис. 11б, получается при расширении полученного коридора ошибок в 2 раза (мелкие штрихи), после чего значение  $\alpha = 0.96$  совместимо с результатами для всех  $\tilde{N}$ . Для  $W_\infty$  (рис. 18б) идеальная картина получается сразу и значение  $W_\infty = 7.4$  совместимо со всеми данными. В результате

$$\alpha = 0.96 \pm 0.01, \quad W_\infty = 7.4 \pm 0.4. \quad (8.3)$$

Аналогичная картина наблюдается при изменении  $\tilde{b}$  в (6.24) [65].

Поведение  $\beta$ -функции для  $g \leq 20$ , полученное путем суммирования ряда, представлено на рис. 15а (сплошная кривая) и сравнивается с результатами других авторов (штриховые кривые сверху вниз соответствуют работам [12, 13, 120]). Асимптотике

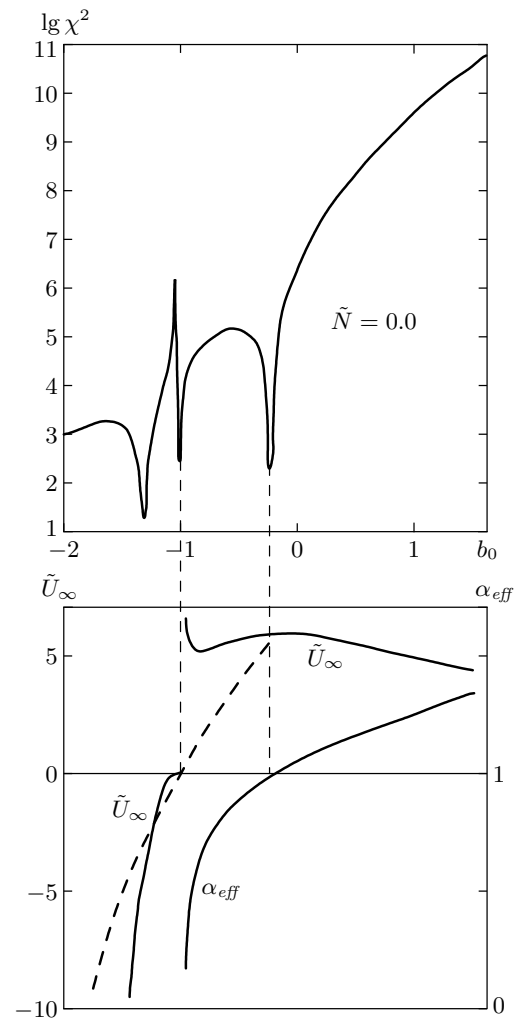
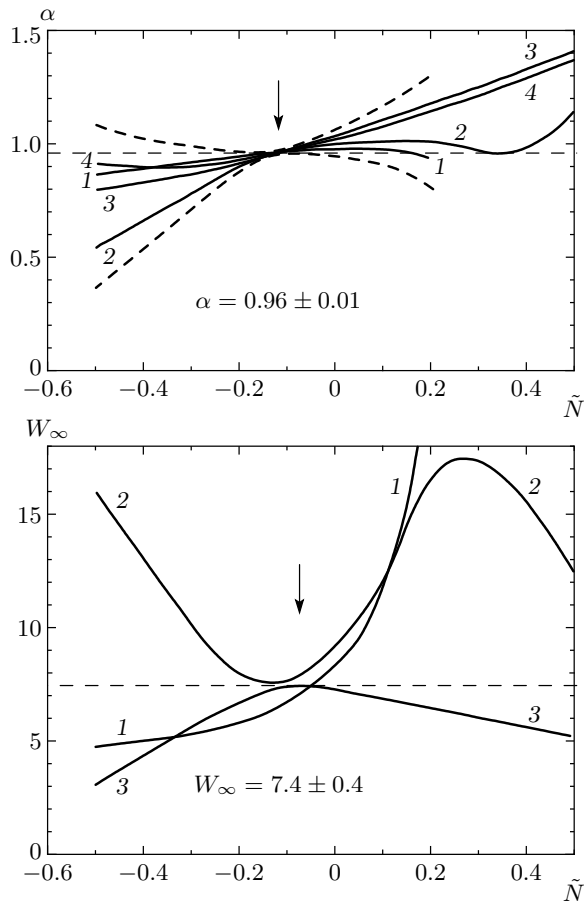


Рис. 17. Картина минимумов  $\chi^2$  для теории  $\varphi^4$  (рабочий интервал  $20 \leq N \leq 40$ ) и зависимости  $\alpha_{eff}$  и  $\tilde{U}_\infty$  от  $b_0$  для интерполяции с  $\tilde{N} = 0$ . Штриховая кривая — зависимость  $U_\infty(b_0)$  для фиксированного  $\alpha = 1$

$\beta(g)$ , найденной в [12, 13], соответствует устойчивый линейный участок  $\tilde{U}_N \approx 1.1N$  при  $N \leq 10$  на рис. 16, который неизбежно принимается за истинную асимптотику, если для ее определения используются лишь известные коэффициенты разложения. Фактически этот линейный участок связан с «провалом» приведенной коэффициентной функции при  $N \lesssim 10$  (см. вставку на рис. 15а), который для самой  $\beta$ -функции проявляется в виде затянутости однопетлевого закона<sup>17)</sup> до  $g \sim 10$  [65]. Таким образом,

<sup>17)</sup> Это свойство более ярко выражено для борелевского образа, но искажается для самой  $\beta$ -функции из-за интегрирования в (6.2).





**Рис. 18.** Различные оценки  $\alpha$  и  $W_\infty$  для теории  $\varphi^4$ . Цифры у кривых соответствуют нумерации оценок разд. 6.2. Коротким штрихом показан коридор ошибок для  $\alpha$ , расширенный в 2 раза

результаты работ [12, 13] не являются принципиальной ошибкой, но отражают объективные свойства  $\beta$ -функции (см. подробнее [65, разд. 8.3]). Вариационная теория возмущений [120] описывает область  $g \lesssim 10$  несколько лучше (рис. 15a), но не гарантирует нахождения правильной асимптотики сильной связи даже теоретически.

Полученное значение  $\alpha$  близко к единице, хотя формально отличие лежит за пределами ошибки. Тем не менее возможность точного равенства  $\alpha = 1$  не исключена, поскольку асимптотика (6.7) может содержать логарифмические поправки

$$W(g) = W_\infty g^\alpha (\ln g)^{-\gamma}, \quad g \rightarrow \infty, \quad (8.4)$$

которые при  $\gamma > 0$  могут имитировать небольшое уменьшение  $\alpha$ . В этом случае в формуле (6.11) возникает дополнительный множитель  $(\ln N)^{-\gamma}$  при неизменном  $U_\infty$ , и результаты для  $U_N$  могут быть

приведены к асимптотическому виду (8.4) с параметрами

$$\alpha = 1, \quad \gamma \approx 0.14, \quad W_\infty \approx 7.7 \quad (8.5)$$

без увеличения  $\chi^2$ . Фактически возможность логарифмического ветвления представляется нам весьма вероятной ввиду следующих аргументов.

1. Можно утверждать, что при точном равенстве  $\alpha = 1$  логарифмическое ветвление неизбежно. Действительно, запишем ряд (6.1) в виде интеграла Зоммерфельда–Ватсона [7, 13]:

$$\begin{aligned} W(g) &= \sum_{N=N_0}^{\infty} W_N (-g)^N = \\ &= -\frac{1}{2i} \oint_C dz \frac{\mathcal{W}(z)}{\sin \pi z} g^z, \quad (8.6) \end{aligned}$$

где  $\mathcal{W}(z)$  — аналитическое продолжение  $W_N$  на комплексную плоскость ( $\mathcal{W}(N) = W_N$ ),  $C$  — контур, охватывающий точки  $N_0, N_0 + 1, N_0 + 2, \dots$ . При больших  $g$  контур  $C$  можно расширить и сместить влево до достижения крайней правой особенности  $\mathcal{W}(z)/\sin \pi z$  в точке  $z = \alpha$ , которая и будет определять поведение  $W(g)$  при  $g \rightarrow \infty$ . Чисто степенному закону (6.7) соответствует наличие при  $z = \alpha$  простого полюса, закону (8.4) — особенность вида  $(z - \alpha)^{\gamma-1}$ .

В разложении  $\beta$ -функции (8.1) первый член  $\beta_0$  отсутствует уже в силу определения; исчезновение же следующего коэффициента  $\beta_1$  носит случайный характер — так в  $(4-\epsilon)$ -мерной теории  $\varphi^4$  он отличен от нуля и оказывается порядка  $\epsilon$ ; соответственно и  $\mathcal{W}(1) \sim \epsilon$ . Из предельного перехода  $\epsilon \rightarrow 0$  ясно, что в четырехмерном случае  $\mathcal{W}(1) = 0$  и простой полюс при  $\alpha = 1$  невозможен. Если обращение в нуль при  $z \rightarrow 1$  происходит по закону  $\mathcal{W}(z) = \omega_0 (z - 1)^\gamma$ , то

$$\beta(g) = \frac{\omega_0}{\Gamma(1-\gamma)} g (\ln g)^{-\gamma}, \quad g \rightarrow \infty, \quad (8.7)$$

и положительность  $\gamma$  имеет прозрачное происхождение.

2. В работе Липатова [127] рассмотрен класс теорий поля (обобщающих четырехмерную  $\varphi^4$ ) с нелинейностью типа  $\varphi^n$  и размерностью пространства  $d = 2n/(n-2)$ , в которой для них имеет место логарифмическая ситуация. Для всех таких теорий коэффициент  $\beta_1 = 0$ , но становится отличным от нуля при уменьшении  $d$ ; поэтому  $\mathcal{W}(1) = 0$  аналогично предыдущему. В пределе  $n \rightarrow \infty$  функция Гелл-Манна–Лоу вычисляется точно [127] и

крайняя правая особенность  $\mathcal{W}(z)$  оказывается вида  $(z-1)^{3/2}$ , приводя к асимптотике  $\beta(g) \propto g(\ln g)^{-3/2}$ . По непрерывности можно ожидать, что для больших, но конечных  $n$  неаналитическое обращение в нуль типа  $(z-1)^\gamma$  сохраняется и особенность при  $z=1$  остается крайней правой; поэтому асимптотика (8.7) является для таких теорий поля естественной и неудивительно, если она сохраняется вплоть до  $n=4$ . Заметим, что при  $n \rightarrow \infty$  знак  $W_\infty$  отрицательный и функция Гелл-Манна–Лоу имеет нуль; прямая экстраполяция результатов к  $n=4$  приводит к аналогичному выводу для теории  $\varphi^4$  [127]. Фактически при такой экстраполяции нужно учитывать, что индекс  $\gamma$  меняется от  $3/2$  до малых значений типа (8.5); тогда смена знака асимптотики происходит согласно (8.7) естественным образом при  $\gamma=1$  (положительность  $\omega_0$  следует из сшивки  $\mathcal{W}(2) \sim \omega_0$  и положительности  $\beta_2$  [127]).

Таким образом, выбор происходит между двумя возможностями: чисто степенным законом (6.7) с индексом  $\alpha$ , чуть меньшим единицы, и асимптотикой вида (8.7) с  $\gamma > 0$ ; и в том, и в другом случае теория  $\varphi^4$  оказывается внутренне непротиворечивой. Последнее утверждение противоречит представлениям о тривиальности теории  $\varphi^4$ , которые являются господствующими в литературе. Обсудим, на чем они основаны (см. подробнее [65, разд. 8.4]).

Имеются строгие доказательства тривиальности теории  $\varphi^4$  для размерности пространства  $d > 4$  и ее нетривиальности для  $d < 4$  [128, 129]; при  $d=4$  полученных неравенств для доказательства тривиальности «чуть-чуть» не хватает ([130, Sec. 14]), что в математической среде рассматривается как досадная мелочь — отсюда и распространенность точки зрения, что тривиальность теории  $\varphi^4$  «практически доказана». С физической точки зрения для подобного оптимизма нет оснований: упомянутые результаты для  $d \neq 4$  на современном уровне выглядят достаточно примитивными, являясь элементарными следствиями теории перенормировок и однопетлевой ренормгруппы; ситуация же при  $d=4$  является очень сложной по физике дела, и аналитических подходов к проблеме не существует до сих пор.

Принято считать, что тривиальность теории  $\varphi^4$  убедительно демонстрируется численными экспериментами на решетке. Однако большинство из них показывает лишь убывание эффективного заряда  $g(L)$  с ростом  $L$ , которое всегда имеет место ввиду отсутствия нуля у  $\beta$ -функции. Доказательство же реального «нуля заряда» является проблематичным из-за ограниченности размера решетки. Множество недооценений связано с нормировкой заряда: уже в ис-

пользуемой нами «естественной нормировке» квадратичный закон затянут до  $g \sim 10$ , тогда как в традиционных нормировках такая затянута еще больше — например, до  $g \sim 2000$  при записи члена взаимодействия в виде  $g\varphi^4/4!$ ; поэтому поведение любых величин неотличимо от «тривиального» в широкой области значений параметров. Имеется путаница и в самом понятии тривиальности. Многие авторы считают ее проявлением реализации средненеполых индексов в четырехмерной теории фазовых переходов; но этот факт не вызывает сомнений и связан лишь с отсутствием нетривиального нуля  $\beta$ -функции.

В последнее время проблематика, связанная с тривиальностью, интенсивно обсуждается в серии работ Агоди, Консоли и др. (см., например, [131, 132]). В них предлагается необычный сценарий для континуального предела теории  $\varphi^4$  и утверждается, что он является логически непротиворечивым. При этом фактически отрицается стандартная теория возмущений, что, на наш взгляд, преждевременно. Численные эксперименты на решетке, якобы подтверждающие концепцию авторов, проводятся в области слабой связи и никакой информации о «тривиальности» содержать не могут. Работы [131, 132] стимулированы стремлением разрешить трудности, возникающие в хиггсовском секторе Стандартной модели в связи с тривиальностью теории  $\varphi^4$ ; в случае ее внутренней непротиворечивости такие трудности отсутствуют с самого начала.

## 8.2. Квантовая электродинамика

Для КЭД известны четыре члена разложения  $\beta$ -функции в МОМ-схеме [133]:

$$\beta(g) = \frac{4}{3}g^2 + 4g^3 + \left[ \frac{64}{3}\zeta(3) - \frac{202}{9} \right] g^4 + \left[ 186 + \frac{256}{3}\zeta(3) - \frac{1280}{3}\zeta(5) \right] g^5 + \dots \quad (8.8)$$

тогда как их асимптотика имеет вид

$$\beta_N^{as} = \text{const } 4.886^{-N} \Gamma\left(\frac{N+12}{2}\right), \quad N \rightarrow \infty. \quad (8.9)$$

Она с точностью до постоянного множителя совпадает с асимптотикой коэффициентов для инвариантного заряда [7], который в электродинамике определяется величиной  $gD$ , где  $D$  — фотонный пропагатор (см. (4.2.11) для  $M=2, L=0$ ).

Процедура суммирования ряда требует некоторой модификации по сравнению с разд. 6 в связи с тем, что асимптотика Липатова имеет вид

$ca^N \Gamma(N/2 + b)$  вместо  $ca^N \Gamma(N + b)$ . Борелевский образ  $B(z)$  определяется формулами

$$\begin{aligned} \beta(g) &= \int_0^\infty dx e^{-x} x^{b_0-1} B(ag\sqrt{x}), \\ B(z) &= \sum_{N=0}^\infty B_N(-z)^N, \\ B_N &= \frac{\beta_N}{a^N \Gamma(N/2 + b_0)}, \end{aligned} \quad (8.10)$$

где  $b_0$  — произвольный параметр. Конформное преобразование  $z = u/(1-u)$  дает для борелевского образа сходящийся ряд по  $u$  с коэффициентами

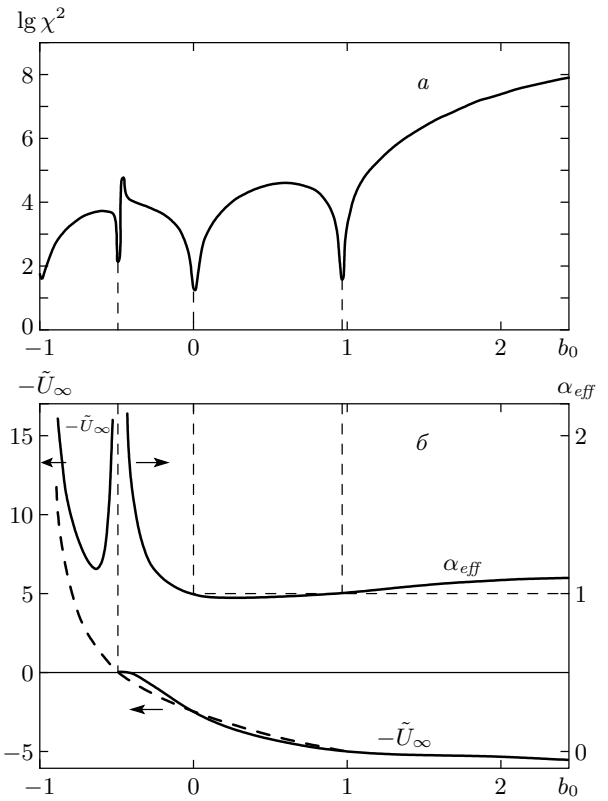
$$\begin{aligned} U_N &= \sum_{K=1}^N B_K(-1)^K C_{N-1}^{K-1} \quad (N \geq 1), \\ U_0 &= B_0, \end{aligned} \quad (8.11)$$

поведение которых при больших  $N$

$$U_N = U_\infty N^{\alpha-1}, \quad U_\infty = \frac{\beta_\infty}{a^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(b_0 + \alpha/2)} \quad (8.12)$$

определяет параметры асимптотики  $\beta(g) = \beta_\infty g^\alpha$  при  $g \rightarrow \infty$ .

Интерполяция проводилась на основе формулы (6.24) с  $\tilde{b} = b - 1/2 = 5.5$  [65]. В отличие от теории  $\varphi^4$ , нам неизвестен общий коэффициент при асимптотике (8.9). В техническом плане это не представляет проблемы — внесение  $c$  в фигурную скобку (6.24) приводит к замене 1 на параметр  $\tilde{A}_0$ , который не считается известным, а находится в результате интерполяции. Однако это приводит к значительно большей неопределенности для приведенной коэффициентной функции  $F_N = \beta_N / \beta_N^{as}$ : ее первые значения  $F_2 = 63.1$ ,  $F_3 = -7.02$ ,  $F_4 = 0.34$ ,  $F_5 = 1.23$  (в единицах  $10^{-3}$ ) обнаруживают лишь слабую тенденцию к выходу на константу, и прогнозируемое значение  $\tilde{A}_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N$  меняется на несколько порядков в зависимости от  $\tilde{N}$ . Тем не менее отмеченная «суперустойчивость» алгоритма (разд. 6.2) позволяет надеяться на получение разумных результатов и в такой ситуации. Для проверки этой возможности мы провели тестовый эксперимент для теории  $\varphi^4$ . При использовании полной информации (т. е. коэффициентов  $\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$  и параметров  $\tilde{A}_0$  и  $\tilde{A}_1$ ) мы получили  $\alpha = 0.96 \pm 0.01$ ,  $\beta_\infty = 7.4 \pm 0.4$  (разд. 8.1); та же процедура без использования  $\tilde{A}_0$  и  $\tilde{A}_1$  дает  $\alpha = 1.02 \pm 0.03$ ,  $\beta_\infty = 1.7 \pm 0.3$ . Если учесть, что неопределенность коэффициентной функции (оцениваемая путем изменения  $\tilde{N}$  на величину  $\sim 1$  вблизи оптимального



**Рис. 19.** Картина минимумов  $\chi^2$  для квантовой электродинамики и зависимости  $\alpha_{eff}$  и  $\tilde{U}_\infty$  от  $b_0$  (рабочий интервал  $20 \leq N \leq 40$ ). Обозначения те же, что на рис. 21

значения) в первом случае составляет несколько процентов, а во втором — более чем порядок величины, то такая стабильность результатов является вполне удовлетворительной<sup>18)</sup>. Конечно, получаемые ниже результаты должны рассматриваться лишь как нулевое приближение.

Зависимости  $\chi^2$  от  $\tilde{N}$  [42] позволяют выделить множество интерполяций ( $-0.5 \lesssim \tilde{N} \lesssim 1.0$ ), для которых степенное поведение  $U_N$  является вероятным. Типичные зависимости  $\chi^2$  и эффективных значений  $U_\infty$  и  $\alpha$  от  $b_0$  (рис. 19) указывают, что  $\alpha \approx 1$ . Действительно, смена знака  $U_\infty$  (см. (8.12)) происходит при  $b_0 = -\alpha/2 \approx -0.5$ . При том же значении  $b_0$  возникает минимум  $\chi^2$ , соответствующий исчезновению главного вклада в асимптотику  $U_\infty N^{\alpha-1}$ . Значения  $\alpha_{eff}$  в минимумах  $\chi^2$  при

<sup>18)</sup> Полученный сдвиг  $\beta_\infty$  не контролируется оценкой точности, но это вполне объяснимо: отработанная в [65] процедура оценки ошибок обоснованна лишь при достаточной близости к точному результату, когда все отклонения могут быть линейаризованы.

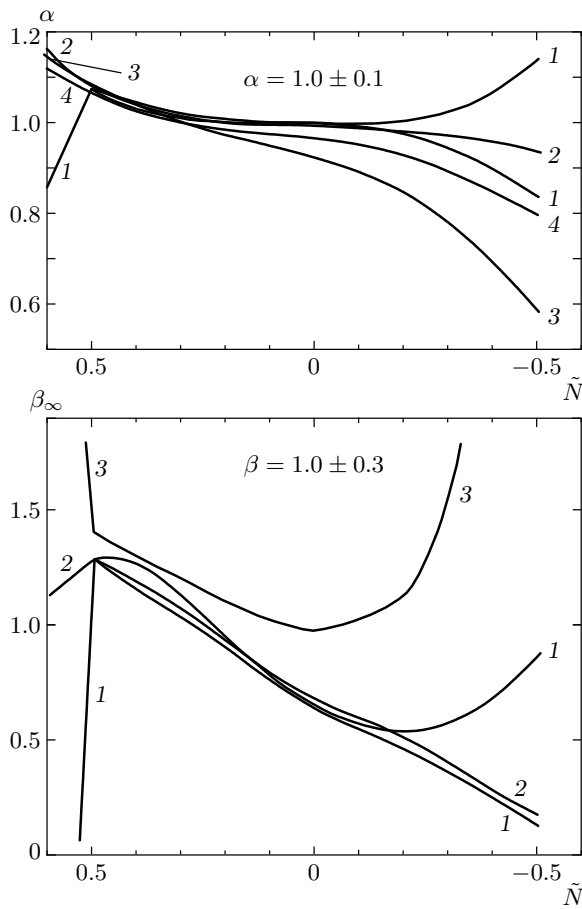


Рис. 20. Различные оценки  $\alpha$  и  $W_\infty$  для КЭД. Цифры у кривых соответствуют нумерации разд. 6.2

$b_0 = -\alpha'/2, -\alpha''/2 \dots$ , когда происходит исчезновение соответствующих поправок<sup>19)</sup> к (8.12), наиболее близки к точному значению  $\alpha \approx 1$ .

На рис. 20а, б представлены различные оценки  $\alpha$  и  $\beta_\infty$  в зависимости от  $\tilde{N}$ . При  $\tilde{N} \leq 0.25$  результаты для  $\alpha$  совместимы со значением, чуть меньшим единицы. При  $\tilde{N} > 0.25$  имеется систематический рост до 1.08, не контролируемый ошибкой, но при этом минимумы  $\chi^2$  плохо выражены и нестабильны. Аналогичная картина наблюдается для  $\beta_\infty$ . Мы принимаем, как более надежные, значения в середине исследованного интервала  $\tilde{N}$  и даем консервативную оценку точности, включающую в себя систематиче-

<sup>19)</sup> Обычно в тестовых примерах наблюдаются только минимумы  $\chi^2$ , соответствующие  $\alpha$  и  $\alpha'$  (разд.6.2). Появление дополнительных минимумов возможно при специальных соотношениях между коэффициентами  $W'_\infty, W''_\infty \dots$  и, по-видимому, характерно для малого количества информации: оно наблюдалось и в упомянутом тестовом эксперименте для теории  $\varphi^4$ .

ские изменения:

$$\alpha = 1.0 \pm 0.1, \quad \beta_\infty = 1.0 \pm 0.3. \quad (8.13)$$

В силу сказанного выше, даже такая оценка ошибки не вполне надежна.

На рис. 15б представлены результаты суммирования ряда для  $\tilde{N} = 0.2, b_0 = 0$ . Сшивка однопетлевого закона  $\beta_2 g^2$  с асимптотикой  $\beta_\infty g^\alpha$  происходит при  $g \sim 10$ ; при  $g < 5$  отличие  $\beta(g)$  от однопетлевого результата несущественно. В пределах точности найденная асимптотика  $\beta(g)$  совпадает с верхней границей неравенства  $0 \leq \beta(g) < g$ , выведенного в [134] из спектральных представлений. Если принять  $\alpha = 1, \beta_\infty = 1$ , то рост постоянной тонкой структуры в чистой электродинамике происходит на малых расстояниях  $L$  по закону  $L^{-2}$ .

Решеточные результаты для КЭД неоднозначно интерпретируются самими специалистами [135, 136]: в целом они указывают на тривиальность в вильсоновском смысле — нетривиальный нуль  $\beta$ -функции отсутствует, и фазовые переходы описываются среднеполевыми индексами. Этот вывод согласуется с полученными выше результатами.

### 8.3. КХД

Для КХД известны четыре члена разложения функции Гелл-Манна–Лоу в MS-схеме [137]:

$$\beta(g) = - \sum_{N=0}^{\infty} \beta_N g^N = -\beta_2 g^2 - \beta_3 g^3 - \beta_4 g^4 - \dots, \quad g = \frac{\bar{g}^2}{16\pi^2}, \quad (8.14)$$

$$\beta_2 = 11 - \frac{2}{3}N_f, \quad \beta_3 = 102 - \frac{38}{3}N_f, \quad (8.15)$$

$$\beta_4 = \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}N_f + \frac{325}{54}N_f^2,$$

$$\beta_5 = \left[ \frac{149753}{6} + 3564\zeta(3) \right] - \left[ \frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27}\zeta(3) \right] N_f + \left[ \frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\zeta(3) \right] N_f^2 + \frac{1093}{729}N_f^3,$$

где  $\bar{g}$  — константа связи, входящая в лагранжиан КХД (4.5.7). Асимптотика коэффициентов ряда (8.14)

$$\beta_N = \text{const} \Gamma \left( N + 4N_c + \frac{11(N_c - N_f)}{6} \right) \quad (8.16)$$

определяется разложением для инвариантного заряда, который с учетом обобщенных тождеств Уорда может определяться по любой вершине [47]. Для  $N_c = 2$ ,  $N_f = 0$  формула (8.16) согласуется с результатом работы [17].

Ряд (8.14) является знакопостоянным и должен суммироваться в соответствии с разд. 7. Однако можно использовать более простую процедуру [47], основанную на предположении о степенном поведении борелевского образа на бесконечности,  $B(z) \sim z^\alpha$ . Тогда независимо от интерпретации борелевского интеграла (7.4) имеем

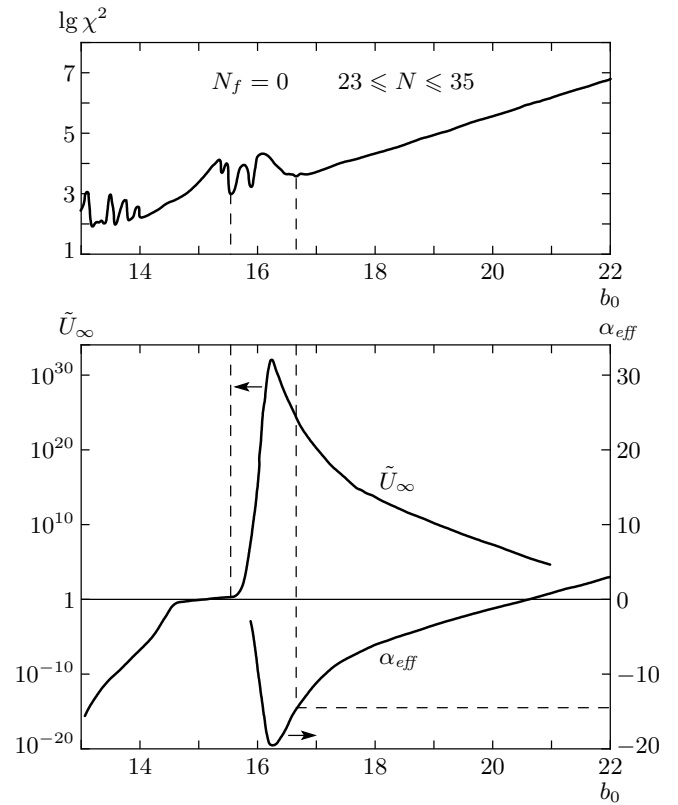
$$\begin{aligned} \beta(g) &= \beta_\infty g^\alpha, & g \rightarrow \infty, \\ \beta(g) &= \bar{\beta}_\infty |g|^\alpha, & g \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где точная связь  $\beta_\infty$  и  $\bar{\beta}_\infty$  зависит от выбора  $\gamma_i$  и  $C_i$ , но в общем случае  $\beta_\infty \sim \bar{\beta}_\infty$ . Поэтому суммирование ряда (8.14) при отрицательных  $g$  дает возможность определить индекс  $\alpha$  и оценить  $\beta_\infty$ .

Интерполяция коэффициентной функции проводится по формуле (6.24) с  $\tilde{b} = b - 1/2$ . Как и в случае КЭД, параметр  $c$  асимптотики Липатова неизвестен; выше (разд. 8.2) он определялся в процессе интерполяции. В данном случае такая процедура приводила к большой неопределенности результатов, которую не удавалось уменьшить путем оптимизации. Поэтому интерполяция проводилась для пробного значения  $c$ , которое затем варьировалось в интервале<sup>20)</sup> от  $10^{-5}$  до 1; фактически изменение результатов при этом было несущественно по сравнению с прочими неопределенностями. Ниже приводятся результаты для  $N_c = 3$ ,  $N_f = 0$ ,  $c = 10^{-5}$ .

Проводя обработку  $U_N$  по степенному закону и рассматривая зависимости  $\chi^2$  от  $\tilde{N}$  [47], можно выделить интервал  $0.5 \lesssim \tilde{N} \lesssim 2.0$ , в котором значения  $\chi^2$  минимальны; это определяет множество интерполяций, совместимых со степенным поведением  $U_N$ . Типичные зависимости  $\chi^2$  и эффективных значений  $U_\infty$  и  $\alpha$  от  $b_0$  (рис. 21) указывают, что  $\alpha \approx -15$ . Действительно, смена знака  $U_\infty$  (см. (6.12)) происходит при  $b_0 = -\alpha \approx 15.5$  и при том же значении  $b_0$  расположен второй минимум  $\chi^2$ . Близкая оценка  $\alpha \approx -15$  получается по значению  $\alpha_{eff}$  в первом минимуме  $\chi^2$ . Указанные способы оценки индекса  $\alpha$  дают близкие результаты лишь для значений  $\tilde{N}$ , близких к оптимальному,  $\tilde{N} = 1.58$  (рис. 21), но перестают быть

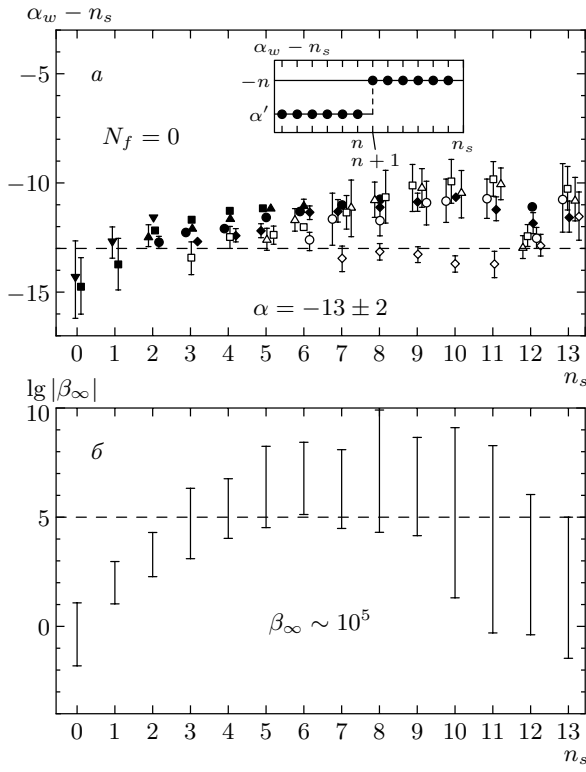
<sup>20)</sup> Параметр  $c$  определяется квадратом константы 'т Хофта  $c_H$  в выражении для одноинстантонного вклада (4.5.6) ( $c_H^2 \sim 10^{-5}$  для  $N_f = 0$  и  $c_H^2 \sim 10^{-4}$  для  $N_f = 3$ ), умноженным на безразмерный интеграл от инстантонной конфигурации, который может быть довольно велик (характерный масштаб  $16\pi^2$ ).



**Рис. 21.** Зависимости  $\chi^2$ ,  $\alpha_{eff}$  и  $\tilde{U}_\infty$  от  $b_0$  для КХД. Минимумы при  $b_0 = 15.4$  и  $b_0 = 15.9$  интерпретируются как спутники основного минимума ( $b_0 = 15.5$ ) — они смещаются вместе с ним при изменении параметров

согласованными при удалении  $\tilde{N}$  от указанного значения.

Полученный результат для индекса  $\alpha$  не может быть сразу принят в качестве окончательного. Во-первых, большое значение индекса может имитировать экспоненту. Во-вторых, для  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  главный вклад в асимптотику  $U_N$  исчезает из-за полюса  $\Gamma(\alpha)$  (см. (6.12)), и наблюдаемый результат может соответствовать не основному индексу  $\alpha$ , а, например,  $\alpha'$  (см. (6.15)). В связи с этим мы приняли в качестве исследуемой функции  $W(g) = g^{n_s} \beta(g)$  и увеличивали целочисленный параметр  $n_s$  до тех пор, пока наблюдаемый индекс  $\alpha_W = \alpha + n_s$  не становился положительным. Полученные результаты (рис. 22a) убедительно показывают, что мы имеем дело не с экспонентой, а с большим отрицательным индексом, который не является целочисленным (при  $\alpha = -n$  наблюдалось бы поведение, показанное на вставке). Каждая точка на рис. 22a получена в результате независимой оптимизации по  $\tilde{N}$ ; оптималь-



**Рис. 22.** а) Индекс  $\alpha_w$  для КХД, полученный при суммировании ряда для функции  $W(g) = g^{n_s} \beta(g)$ , в зависимости от  $n_s$  для различных интервалов усреднения  $N_{min} \leq N \leq N_{max}$ :  $\blacktriangledown$  —  $N_{min} = 22 + n_s$ ,  $N_{max} = 35 + n_s$ , точки  $\blacksquare$ ,  $\blacktriangle$ ,  $\bullet$ ,  $\square$ ,  $\triangle$ ,  $\circ$ ,  $\diamond$  соответствуют последовательному увеличению  $N_{min}$  на единицу. б) Зависимость от  $n_s$  параметра  $\bar{\beta}_\infty$

ное значение  $\tilde{N}$  систематически уменьшалось при увеличении  $n_s$ . Основная неопределенность результатов связана с зависимостью от нижней границы интервала усреднения  $N_{min} \leq N \leq N_{max}$ . Верхние точки на рис. 22а соответствуют небольшим  $N_{min}$  и значениям  $\chi^2$  в минимумах  $\sim 10^6$ . При увеличении  $N_{min}$  результат для  $\alpha$  систематически уменьшается, пока  $\chi^2$  не достигает уровня порядка  $10^3$  (нижние точки). При дальнейшем увеличении  $N_{min}$  картина минимумов  $\chi^2$  становится нечеткой и неопределенность результатов резко возрастает. Мы допускаем возможность еще некоторого уменьшения  $\alpha$  до достижения требуемых значений  $\chi^2 \sim 10$  и учитываем это при оценке ошибки. Неопределенность параметра  $\bar{\beta}_\infty$  составляет несколько порядков (рис. 22б), но наиболее вероятно значение порядка  $10^5$ , совместимое с основным массивом данных. Итак, для  $N_f = 0$

имеем

$$\alpha = -13 \pm 2, \quad \bar{\beta}_\infty \sim 10^5. \quad (8.18)$$

При  $N_f = 3$  имеем  $\alpha = -12 \pm 3$  и тот же результат для наиболее вероятного значения  $\bar{\beta}_\infty$  (тогда как полный разброс  $\bar{\beta}_\infty = 1-10^7$ ). Устойчивость результатов при изменении процедуры суммирования указывает на адекватную оценку их неопределенности.

Большая неопределенность  $\bar{\beta}_\infty$  соответствует сравнительно небольшой неопределенности для самой  $\beta$ -функции: характерный масштаб  $g^*$ , на котором происходит сшивка однопетлевого закона  $\beta_2 g^2$  с асимптотикой (8.17), оценивается как  $g^* \sim 2$  и вариация  $g^*$  в два раза соответствует изменению  $\bar{\beta}_\infty$  на 4 порядка. Знак  $\bar{\beta}_\infty$  в области отрицательных  $\alpha_w$  оказывается неопределенным из-за большой погрешности в  $\alpha$  и знакопеременности множителя  $\Gamma(\alpha)$  в (6.12), но в области положительных  $\alpha_w$  (большие  $n_s$ ) он однозначно отрицательный. Поведение  $\beta$ -функции при  $g < 0$  показано на рис. 15б (сплошная кривая); при аналитическом продолжении на положительные  $g$  оно качественно сохраняется, но знак асимптотики (8.17) может измениться (штрихи)<sup>21</sup>. Тем не менее поведение эффективной константы связи от масштаба расстояний  $L$  оказывается достаточно определенным (рис. 15з). Как известно, в однопетлевом приближении  $g(L)$  имеет полюс при  $L = L_0 = 1/\Lambda_{QCD}$  (штрихи); для найденной  $\beta$ -функции (рис. 15в) рост вблизи  $L_0$  продолжается до значений порядка  $g^*$ , после чего  $g(L)$  либо выходит на константу (при  $\beta_\infty > 0$ ), либо растет по закону  $(\ln L)^{0.07}$ , практически не отличимому от константы (при  $\beta_\infty < 0$ ).

В области слабой связи взаимодействие  $V(L)$  между кварками описывается модифицированным законом Кулона  $\bar{g}^2(L)/L$  и резкий рост  $\bar{g}(L)$  вблизи  $L = L_0$  указывает на тенденцию к конфайнменту. В области сильной связи соотношение между  $V(L)$  и  $\bar{g}(L)$  неизвестно, но близкий по смыслу результат получен Вильсоном для решеточной версии КХД [138]

$$V(L) = \frac{\ln 3 \bar{g}^2(a)}{a^2} L, \quad \bar{g}(a) \gg 1, \quad (8.19)$$

где  $a$  — постоянная решетки. Условие независимости результата от  $a$  дает оценку  $\beta$ -функции в области сильной связи,  $\beta(g) \sim g \ln g$  [139], что, однако, является неверным. В области  $a \gg 1/\Lambda_{QCD}$  поперечный размер струны оказывается порядка  $a$  и существенно превышает ее реальный физический размер

<sup>21</sup>) Например,  $\beta_\infty = \bar{\beta}_\infty \cos \pi \alpha$  при интерпретации борелевского интеграла в смысле главного значения.

порядка  $1/\Lambda_{QCD}$ ; поэтому решетка вносит сильные искажения и нет оснований ожидать независимости результата от  $a$ . В области  $a \ll 1/\Lambda_{QCD}$  такие основания появляются, но константа связи  $\bar{g}(a)$  становится малой и формула (8.19) выходит из области применимости. Таким образом, соотношение (8.19) может иметь смысл лишь при  $a \sim 1/\Lambda_{QCD}$ . В области насыщения  $\bar{g}(L) \sim \sqrt{2 \cdot 16\pi^2} \sim 20$  и резкий рост  $g(L)$  вблизи  $L = L_0$  (рис. 15г) делает совместимыми условия  $a \sim 1/\Lambda_{QCD}$ ,  $\bar{g}(a) \gg 1$ , что, по-видимому, позволяет обосновать применение решеточной формулы (8.19) к реальной КХД.

## 9. ВЫСШИЕ ПОПРАВКИ К АСИМПТОТИКЕ ЛИПАТОВА

Как уже отмечалось, поправки к асимптотике Липатова (2.5) имеют вид регулярного разложения по  $1/N$ :

$$W_N = c a^N \Gamma(N+b) \times \left\{ 1 + \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{N^2} + \dots + \frac{A_K}{N^K} + \dots \right\}. \quad (9.1)$$

Знание всех коэффициентов  $A_K$  эквивалентно знанию точной коэффициентной функции  $W_N$ , и их вычисление является альтернативой к прямым диаграммным вычислениям низших порядков [81, 106, 125, 133, 137]. В настоящее время первые поправки к асимптотике известны в теории  $\varphi^4$  [126] и в нескольких квантовомеханических задачах [6, 140].

В работе [141] показано, что ряд в (9.1) факториально расходится, а его далекие коэффициенты могут быть вычислены в рамках процедуры, аналогичной липатовской: можно записать точное выражение для  $K$ -го коэффициента разложения через функциональный интеграл и вычислить последний при больших  $K$  методом перевала. Типичная асимптотика коэффициентов  $A_K$  имеет вид

$$A_K = \tilde{c} \left( \ln \frac{S_1}{S_0} \right)^{-K} \Gamma \left( K + \frac{r' - r}{2} \right), \quad (9.2)$$

где  $S_0$  и  $S_1$  — значения действия для первого и второго инстантонов рассматриваемой теории поля, а  $r$  и  $r'$  — соответствующее им число нулевых мод; инстантоны предполагаются перенумерованными в порядке возрастания соответствующего им действия.

Детальные вычисления асимптотики  $A_K$  для  $n$ -компонентной теории  $\varphi^4$  проведены в работе [33].

Полная информация о высших инстантонах в теории  $\varphi^4$  отсутствует, но наиболее вероятным представляется предположение, что роль второго инстантона играет комбинация двух элементарных инстантонов [33, 142]. В этом случае возникает необходимость коррекции результата (9.2), который справедлив лишь в условиях применимости закона равнораспределения (разд.4.1), когда все флуктуационные моды могут быть четко разделены на нулевые и колебательные. Для двухинстантонных конфигураций с неизбежностью существует мягкая мода, соответствующая изменению расстояния между элементарными инстантонами и сводящаяся к колебаниям в неаналитическом минимуме. В результате при  $d = 1, 2, 3$  к формуле (9.2) возникают логарифмические, а при  $d = 4$  — даже степенные поправки.

Для асимптотики коэффициентов  $A_K$ , соответствующих  $M$ -точечной функции  $G_M(g)$ , при  $d = 1$  справедлив результат

$$A_K = -\frac{2^{-M/2}}{(\pi/2)\Gamma(n/2)} \left( \frac{3}{2 \ln 2} \right)^{n/2} \times \Gamma \left( K + \frac{n}{2} \right) (\ln 2)^{-K} [\ln K + C], \quad (9.3)$$

$$C = C_E + \ln \left( \frac{6}{\ln 2} \right) + \frac{\psi(1/2) - \psi(n/2)}{2},$$

где  $C_E$  — постоянная Эйлера,  $\psi(x)$  — логарифмическая производная гамма-функции. Для  $d = 2$  имеем с логарифмической точностью

$$A_K = -\frac{2^{-M/2}}{19.7} \frac{(0.702)^n}{\Gamma(n/2)} \times \Gamma \left( K + \frac{n+1}{2} \right) (\ln 2)^{-K} \ln^2 K \quad (9.4)$$

и аналогично для  $d = 3$

$$A_K = -\frac{2^{-M/2}}{2.12} \frac{(0.704)^n}{\Gamma(n/2)} \times \Gamma \left( K + \frac{n+2}{2} \right) (\ln 2)^{-K} \ln^3 K. \quad (9.5)$$

При  $d = 4$  результаты зависят от координат, входящих в функции Грина, и довольно громоздки [33]; они несколько упрощаются при переходе в импульсное представление и выборе импульсов  $p_i$ , соответствующих симметричной точке ( $p_i \sim p$ ):

$$A_K = B e^{\nu \ln(\mu/p)} \Gamma \left( K + \frac{n+4}{2} + \nu \right) (\ln 2)^{-K}, \quad (9.6)$$

где  $\mu$  — точка нормировки заряда,  $\nu = (n+8)/3$ , а значения константы  $B$  приведены в табл. 3. В скалярном случае ( $n = 1$ ) главный вклад в асимптотику

**Таблица 3.** Значения параметра  $B$  в формуле (9.6)

$n$	$B \cdot 10^4$	
	$M = 2$	$M = 4$
0	-9.05	-8.72
1	0	0
2	3.25	1.45
3	4.55	1.50

исчезает и следует ожидать поведение, соответствующее следующему порядку по  $1/K$ :

$$A_K = \text{const } e^{\nu \ln(\mu/p)} \times \Gamma\left(K + \frac{n+4}{2} + \nu - 1\right) (\ln 2)^{-K}. \quad (9.7)$$

Результаты для логарифма вакуумного интеграла  $Z_0(g)$  формально получаются из (9.3)–(9.6) путем подстановки  $M = 0$  и введения дополнительного множителя  $1/2$  в правые части формул. В частности, для энергии основного состояния ангармонического осциллятора ( $d = 1, n = 1$ ) получим

$$A_K = -\frac{\ln K + 2.74}{3.78} \Gamma\left(K + \frac{1}{2}\right) (\ln 2)^{-K}, \quad (9.8)$$

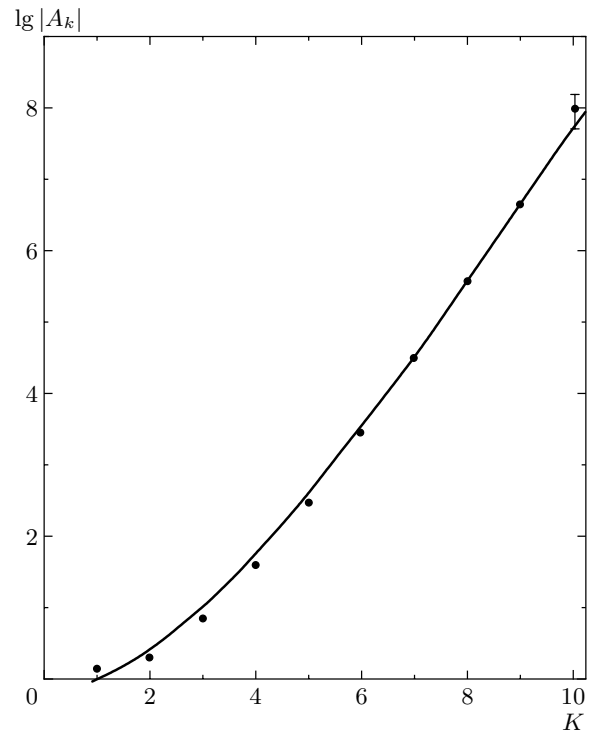
что можно сопоставить с численными результатами Бендера и Ву [6] (рис. 23).

При  $d = 1$  весь инстантонный спектр исчерпывается комбинациями элементарных инстантонов. При  $d \geq 2$  нельзя исключить существование сферически-несимметричного инстантона с действием, меньшим  $2S_0$ . В этом случае мягкие моды отсутствуют и справедлива формула (9.2) с  $r' - r = d(d-1)/2$ , так как для несимметричного инстантона появляются дополнительно  $d(d-1)/2$  нулевых мод, связанных с поворотами в координатном пространстве. Такие моды ранее не рассматривались, что делает вычисление константы  $\tilde{c}$  в (9.2) методически нетривиальным. Техника интегрирования по этим модам разработана в [33] и представляет интерес для квантовой электродинамики, где уже первый инстантон является несимметричным [23].

## 10. ПЕРСПЕКТИВЫ

В заключение обсудим основные направления, в которых могут идти дальнейшие исследования.

### 1. Вычисление параметра $c$ асимптотики Липатова



**Рис. 23.** Сопоставление асимптотической формулы (9.8) (сплошная кривая) с коэффициентами  $A_K$ , численно найденными в [6] (точки)

Полноценная асимптотика Липатова известна лишь для теории  $\varphi^4$  и нескольких квантовомеханических задач, тогда как в остальных случаях еще предстоит вычисление ее общего коэффициента  $c$ . Для функции Гелл-Манна–Лоу в КХД параметр  $c$  вычислен только для  $SU(2)$ -симметрии [17]; к тому же при этом использовалось нестандартное определение  $\beta$ -функции, что оставляет вопрос о соответствии асимптотики  $\beta_N$  той ренормировочной схеме, в которой проводятся реальные диаграммные вычисления. Для кваркового коррелятора в КХД параметр  $c$  формально вычислен [24], но имеются сомнения в корректности устранения расходимостей в интеграле (4.5.13) [48], так что фактически может измениться даже функциональная форма результата.

### 2. Априорные доказательства отсутствия ренормалонов

Такое доказательство имеется только для теории  $\varphi^4$ . Предложенная в разд. 5.3 конструктивная схема исключения ренормалонных сингулярностей в КЭД и КХД подтверждается результатами разд. 8. Однако она основана на приближенном восстановлении функции Гелл-Манна–Лоу и может вызывать



сомнения у скептически настроенного читателя. По этому обобщение анализа работы [48] на другие теории поля является безусловно актуальным.

### 3. Разработка и использование прецизионных методов суммирования

В изложенной выше схеме «конформ-бореля» (разд. 6.1) разрез в борелевской плоскости проводится от  $-\infty$  до первой инстантонной особенности  $S_0$ . Однако его можно провести и до точки  $S^*$ , такой что  $S_0 < S^* < 0$ : при этом все сингулярности борелевского образа по-прежнему окажутся на границе единичного круга в плоскости  $u$  и пересуммированный ряд будет сходиться для всех точек борелевской плоскости  $z$ , лежащих вне разреза. При условии  $S_0 < S^* < 0$  результаты не будут зависеть от  $S^*$ , что было эмпирически обнаружено в [115]. Но это означает, что знания точного значения  $S_0$  не требуется, и количественная информация об асимптотике Липатова в схеме Ле Гийо и Зинн-Жюстина [35] не используется вообще. На наш взгляд, проведение интерполяции коэффициентной функции и явный учет асимптотики сильной связи позволят существенно поднять точность вычисления критических индексов уже при имеющейся информации. Этот пример показывает, насколько нерационально на сегодняшний день используется доступная информация о рядах теории возмущений, которая добывается с использованием грандиозных трудовых затрат.

Другим резервом является использование информации о высших поправках к асимптотике Липатова: изложенная в разд. 9 схема позволяет без особого труда получить несколько параметров, характеризующих коэффициентную функцию, что по эффективности соответствует продвижению на несколько порядков теории возмущений. При прямых же диаграммных вычислениях продвижение на один порядок происходит в среднем за 10 лет.

Метод восстановления асимптотики сильной связи (разд. 6.2) устойчиво работает в условиях бедной информации, но не относится к числу прецизионных. На наш взгляд, при большем количестве информации преимущества будет иметь метод построения паде-аппроксимант для коэффициентной функции [13]; предварительные исследования показывают, что этот метод может быть дополнен некоторой стратегией отбора, позволяющей выбрать из множества паде-аппроксимант наиболее подходящие.

### 4. Суммирование знакопостоянных рядов

Изложенное в разд. 7 в принципе решает проблему борелевской несуммируемости для наиболее актуальных задач. Однако сформулированные схемы

суммирования не отличаются большой точностью и должны существовать более совершенные методы.

Суммирование ряда теории возмущений для КХД (разд. 8.3) не использовало методики разд. 7 и основывалось не «трюке», позволяющем обойти проблему: при этом получается правильный индекс  $\alpha$ , но  $\beta_\infty$  определяется лишь по порядку величины. На современном этапе грубость этого приближения не имеет значения ввиду большой неопределенности  $\beta_\infty$  (рис. 22б), однако проведение пробного суммирования «по всем правилам» и анализ реальных неопределенностей безусловно представляет интерес.

С точки зрения проблемы конфайнмента представляет интерес суммирование рядов для аномальных размерностей. Образование струны между кварками не контролируется  $\beta$ -функцией, но определяется свойствами корреляционных функций, которые, в свою очередь, определяются значениями аномальных размерностей в области «плато» для константы связи (рис. 15г).

### 5. Аналитические методы в области сильной связи

Индекс  $\alpha$  для теории  $\varphi^4$  и КЭД оказывается близким к единице, и к тому же имеются аргументы в пользу точного равенства  $\alpha = 1$ . Простые результаты такого рода, по-видимому, могут быть получены аналитически. Поскольку обоснование известного результата всегда проще, чем его априорное получение, то здесь есть основания для оптимизма. При доказанном равенстве  $\alpha = 1$  точность восстановления асимптотики сильной связи сразу возрастет, так как целью обработки будет определение одного параметра вместо двух. Разумеется, решению подобных вопросов будет способствовать дополнительная «экспериментальная» информация об асимптотике сильной связи.

### 6. Приложения к теории неупорядоченных систем

Уникальность последней связана с тем, что вклад высоких порядков имеет качественное значение уже в области слабой связи. Описание частицы в гауссовом случайном поле математически точно сводится к теории  $\varphi^4$  с «неправильным» знаком константы связи [121–123]. Формальная неустойчивость такой теории поля обуславливает важность непертурбативных вкладов типа  $\exp(-a/g)$ , которые однако могут быть получены суммированием ряда теории возмущений. Примером такого вклада является флуктуационный хвост плотности состояний [143], который оказывается прямо связанным с асимптотикой Липатова [8, 144].

Синтез инстантонных результатов с паркетным приближением позволяет построить полную теорию плотности состояний неупорядоченной системы в  $(4 - \epsilon)$ -мерном пространстве [8]. На очереди построение аналогичной теории для кинетических свойств неупорядоченной системы — это требует рассмотрения теории типа  $\varphi^4$  с двумя векторными полями [122, 123]. Качественное значение высоких порядков теории возмущений связано в этом случае с тем, что диффузионный полюс в локализованной фазе имеет чисто непертурбативное происхождение [145, 146]. Если все свойства этого полюса окажется возможным исследовать в рамках инстантонного метода, то это может объяснить появление простых критических индексов в «симметричном» подходе к теории перехода Андерсона [147].

Автор признателен М. В. Садовскому и А. И. Соколову, прочитавшим предварительный вариант работы и сделавшим существенные замечания, Л. Н. Липатову за стимулирующие дискуссии, К. Б. Варнашеву за помощь в подборе ссылок, а также участникам семинаров в ИФП, ФИАН, ИТЭФ и ПИЯФ за интерес к работе и многочисленные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-17519).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. П. Рамис, *Расходящиеся ряды и асимптотическая теория*, Москва-Ижевск, Инст. комп. иссл. (2002).
2. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).
3. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
4. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
5. Ф. J. Dyson, Phys. Rev. **85**, 631 (1952).
6. С. М. Bender and Т. Т. Wu, Phys. Rev. **184**, 1231 (1969); Phys. Rev. D **7**, 1620 (1973).
7. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
8. И. М. Суслов, УФН **168**, 503 (1998).
9. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН СССР **95**, 497, 773, 1177 (1954).
10. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Квантовые поля*, Наука, Москва (1993).
11. В. С. Попов, В. Л. Елецкий, А. В. Турбинер, ЖЭТФ **74**, 445 (1978).
12. Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков, ТМФ **38**, 15 (1979).
13. Ю. А. Кубышин, ТМФ **58**, 137 (1984).
14. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D **15**, 1544 (1977).
15. G. Parisi, Phys. Lett. B **66**, 382 (1977).
16. А. П. Бухвостов, Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **73**, 1658 (1977); С. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber, Phys. Rev. Lett. **38**, 306 (1977).
17. E. B. Bogomolny and V. A. Fateyev, Phys. Lett. B **71**, 93 (1977).
18. L. N. Lipatov, A. P. Bukhvostov, and E. I. Malkov, Phys. Rev. D **19**, 2974 (1979).
19. *Large Order Behavior of Perturbation Theory*, ed. by J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, North Holland, Amsterdam (1990).
20. E. B. Bogomolny, V. A. Fateyev, and L. M. Lipatov, Sov. Sci. Rev. A — Phys. Rev., ed. by I. M. Khalatnikov, **2**, 247 (1980), Harwood Academic Press, New York.
21. J. Zinn-Justin, Phys. Rep. **70**, 109 (1981).
22. С. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber, Phys. Rev. D **16**, 996 (1977); R. Balian, С. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber, Phys. Rev. D **17**, 1041 (1978).
23. E. B. Bogomolny and V. A. Fateyev, Phys. Lett. B **76**, 210 (1978).
24. I. I. Balitsky, Phys. Lett. B **273**, 282 (1991).
25. P. G. Silvestrov, Phys. Rev. D **51**, 6587 (1995).
26. S. V. Faleev and P. G. Silvestrov, Nucl. Phys. B **463**, 489 (1996).
27. И. Харди, *Расходящиеся ряды*, Изд-во иностр. лит., Москва (1951).
28. Л. Д. Кудрявцев, *Математический анализ*, т. 1, Высшая школа, Москва (1973).
29. E. Borel, *Memoire sur les Series Divergentes*, Paris (1899).
30. H. Poincaré, Acta Math. **5**, 240 (1884).
31. E. B. Bogomolny, Phys. Lett. B **67**, 193 (1977).

32. G. Parisi, Phys. Lett. B **66**, 167 (1977).
33. Д. А. Лобаскин, И. М. Суслов, ЖЭТФ **126**, 268 (2004).
34. E. Brezin and G. Parisi, J. Stat. Phys. **19**, 269 (1978).
35. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. Lett. **39**, 95 (1977); Phys. Rev. B **21**, 3976 (1980); R. Guida and J. Zinn-Justin, J. Phys. A **31**, 8103 (1998).
36. И. М. Суслов, ЖЭТФ **106**, 560 (1994).
37. И. М. Суслов, ЖЭТФ **111**, 220 (1997).
38. И. М. Суслов, ЖЭТФ **111**, 1896 (1997).
39. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1976).
40. Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, Москва (1965).
41. Р. Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, Мир, Москва (1985).
42. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **74**, 211 (2001).
43. E. Brezin, G. Parisi, and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D **16**, 408 (1977).
44. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).
45. G. 't Hooft, Phys. Rev. D **14**, 3433 (1976).
46. C. Bernard, Phys. Rev. D **19**, 3013 (1979).
47. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **76**, 387 (2002).
48. И. М. Суслов, ЖЭТФ **116**, 369 (1999).
49. B. Lautrup, Phys. Lett. B **69**, 109 (1977).
50. G. 't Hooft, in: *The whys of Subnuclear Physics*, Erice, (1977), ed. by A. Zichichi, Plenum Press, New York (1979).
51. Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, *Лекции по теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1976).
52. S. V. Faleev and P. G. Silvestrov, Nucl. Phys. B **507**, 379 (1997).
53. M. Beneke, Phys. Rep. **317**, 1 (1999), Sec. 2.4.
54. G. Parisi, Phys. Lett. B **76**, 65 (1978); Nucl. Phys. B **150**, 163 (1979).
55. G. Parisi, Phys. Rep. **49**, 215 (1979).
56. F. David, Nucl. Phys. B **209**, 433 (1982); **234**, 237 (1984); **263**, 637 (1986).
57. M. C. Bergere and F. David, Phys. Lett. B **135**, 412 (1984).
58. A. H. Mueller, Nucl. Phys. B **250**, 327 (1985).
59. V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **385**, 452 (1992).
60. M. Beneke et al., Phys. Lett. B **307**, 154 (1993); **348**, 613 (1995); Nucl. Phys. B **452**, 563 (1995); **472**, 529 (1996); Phys. Rev. D **52**, 3929 (1995).
61. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1977), с. 202.
62. М. А. Евграфов, *Аналитические функции*, Наука, Москва (1968), с. 81.
63. И. М. Суслов, ЖЭТФ **126**, 542 (2004).
64. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **71**, 315 (2000).
65. И. М. Суслов, ЖЭТФ **120**, 5 (2001).
66. G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel, M. S. Green, and D. I. Meiron, Phys. Rev. Lett. **36**, 1351 (1976); Phys. Rev. B **17**, 1365 (1978).
67. J. S. R. Chisholm, Math. Comput. **27**, 841 (1973).
68. G. A. Baker, Jr. and P. Graves-Morris, *Pade Approximants*, Addison-Wesley, Reading, MA (1981).
69. I. O. Mayer, J. Phys. A **22**, 2815 (1989).
70. S. A. Antonenko and A. I. Sokolov, Phys. Rev. B **49**, 15901 (1994).
71. И. О. Майер, ТМФ **75**, 234 (1988).
72. R. P. Feynman and H. Kleinert, Phys. Rev. A **34**, 5080 (1986); H. Kleinert, Phys. Lett. A **173**, 332 (1993).
73. H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of  $\phi^4$ -Theories*, World Scientific, Singapore (2001).
74. H. Kleinert, Phys. Rev. Lett. **75**, 2787 (1995); H. Kleinert, Phys. Rev. D **57**, 2264 (1998); Phys. Lett. B **434**, 74 (1998).
75. H. Kleinert, Phys. Rev. D **60**, 085001 (1999).
76. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in: *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and M. S. Green, Academic, New York (1976), Vol. VI.
77. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford (2002).
78. S. A. Antonenko and A. I. Sokolov, Phys. Rev. E **51**, 1894 (1995).

79. А. И. Соколов, ФТТ **40**, 2087 (1998); A. I. Sokolov, E. V. Orlov, V. A. Ul'kov, and S. S. Kashtanov, Phys. Rev. E **60**, 1344 (1999).
80. R. Guida and J. Zinn-Justin, J. Phys. A **31**, 8103 (1998).
81. Е. В. Орлов, А. И. Соколов, ФТТ **42**, 2087 (2000).
82. P. Calabrese, E. V. Orlov, D. V. Pakhnin, and A. I. Sokolov, Phys. Rev. B **70**, 094425 (2004).
83. G. Grinstein and A. Luther, Phys. Rev. B **13**, 1329 (1976); A. Aharony, Phys. Rev. B **13**, 2092 (1976).
84. I. O. Mayer, A. I. Sokolov, and B. N. Shalaev, Ferroelectrics **95**, 93 (1989).
85. D. V. Pakhnin and A. I. Sokolov, Phys. Rev. B **61**, 15130 (2000).
86. J. M. Carmona, A. Pelissetto, and E. Vicari, Phys. Rev. B **61**, 15136 (2000).
87. A. Pelissetto and E. Vicari, Phys. Rev. B **62**, 6393 (2000).
88. Д. В. Пахнин, А. И. Соколов, Б. Н. Шалаев, Письма в ЖЭТФ **75**, 459 (2002).
89. Yu. Holovatch, V. Blavats'ka, M. Dudka, C. von Ferber, R. Folk, and T. Yavors'kii, Int. J. Mod. Phys. B **16**, 4027 (2002).
90. A. Pelissetto, P. Rossi, and E. Vicari, Phys. Rev. B **63**, 140414 (2001); **65**, 020403 (2002).
91. P. Calabrese, P. Parruccini, and A. I. Sokolov, Phys. Rev. B **66**, 180403 (2002); **68**, 094415 (2003).
92. R. Folk, Yu. Holovatch, and T. Yavors'kii, Phys. Rev. B **62**, 12195 (2000).
93. M. Dudka, Yu. Holovatch, and T. Yavors'kii, J. Phys. A **37**, 10727 (2004).
94. A. I. Sokolov and K. B. Varnashev, Phys. Rev. B **59**, 8363 (1999).
95. A. I. Mudrov and K. B. Varnashev, Phys. Rev. B **57**, 3562 (1998); **57**, 5704 (1998); **64**, 214423 (2001).
96. A. Pelissetto and E. Vicari, Phys. Rep. **368**, 549 (2002).
97. P. Calabrese, E. V. Orlov, P. Parruccini, and A. I. Sokolov, Phys. Rev. B **67**, 024413 (2003).
98. В. В. Прудников, С. В. Белим, А. В. Иванов, Е. В. Осинцев, А. А. Федоренко, ЖЭТФ **114**, 972 (1998).
99. В. В. Прудников, С. В. Белим, Е. В. Осинцев, А. А. Федоренко, ФТТ **40**, 1526 (1998).
100. V. V. Prudnikov, P. V. Prudnikov, and A. A. Fedorenko, J. Phys. A **32**, 8587 (1999); С. В. Белим, Письма в ЖЭТФ **77**, 118 (2003); **77**, 509 (2003).
101. В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. А. Федоренко, Письма в ЖЭТФ **73**, 153 (2001); П. В. Прудников, В. В. Прудников, ЖЭТФ **122**, 636 (2002).
102. К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение*, Мир, Москва (1975).
103. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).
104. А. А. Владимиров, Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, ЖЭТФ **77**, 1035 (1979).
105. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, J. de Phys. Lett. **46**, L131 (1985); J. de Phys. **48**, 19 (1987); **50**, 1365 (1989).
106. H. Kleinert, J. Neu, V. Schulte-Frohlinde, K. G. Chetyrkin, and S. A. Larin, Phys. Lett. B **272**, 39 (1991); **319**, 545 (1993).
107. H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, Phys. Lett. B **342**, 284 (1995).
108. B. N. Shalaev, S. A. Antonenko, and A. I. Sokolov, Phys. Lett. A **230**, 105 (1997).
109. H. Kleinert, S. Thoms, and V. Schulte-Frohlinde, Phys. Rev. B **56**, 14428 (1997).
110. R. Folk, Yu. Holovatch, and T. Yavors'kii, Phys. Rev. B **61**, 15114 (2000).
111. Р. Фольк, Ю. Головач, Т. Яворский, УФН **173**, 175 (2003).
112. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press (1988).
113. И. М. Суслов, ЖЭТФ **122**, 696 (2002).
114. Д. И. Казаков, В. С. Попов, ЖЭТФ **122**, 675 (2002).
115. A. I. Mudrov and K. B. Varnashev, Phys. Rev. E **58**, 1 (1998).
116. U. D. Jentschura and J. Zinn-Justin, J. Phys. A **34**, L253 (2001).
117. Д. И. Казаков, В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **77**, 547 (2003).
118. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Ch. 40, Clarendon Press, Oxford (1989).

119. В. Коппенфельс, Ф. Штальман, *Практика конформных отображений*, Изд-во иностр. лит., Москва (1963).
120. A. N. Sissakian et al., Phys. Lett. B **321**, 381 (1994).
121. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).
122. A. Nitzan, K. F. Freed, and M. N. Cohen, Phys. Rev. B **15**, 4476 (1977).
123. М. В. Садовский, УФН **133**, 223 (1981); ЖЭТФ **70**, 1936 (1976).
124. А. А. Владимиров, Д. В. Ширков, УФН **129**, 407 (1979).
125. Ф. М. Диттес, Ю. А. Кубышин, О. В. Тарасов, ТМФ **37**, 66 (1978).
126. Ю. А. Кубышин, ТМФ **57**, 363 (1983).
127. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **71**, 2010 (1976).
128. J. Frolich, Nucl. Phys. B **200** [FS4], 281 (1982).
129. J. P. Eckmann and R. Epstein, Commun. Math. Soc. **64**, 95 (1979).
130. M. Aizenman, Commun. Math. Soc. **86**, 1 (1982).
131. M. Consoli and P. M. Stevenson, Z. Phys. C **63**, 427 (1994).
132. A. Agodi, G. Andronico, P. Cea et al., Mod. Phys. Lett. A **12**, 1011 (1997).
133. S. G. Gorishny, A. L. Kataev, S. A. Larin, and L. R. Surguladze, Phys. Lett. B **256**, 81 (1991).
134. N. V. Krasnikov, Nucl. Phys. B **192**, 497 (1981); H. Yamagishi, Phys. Rev. D **25**, 464 (1982).
135. S. Kim, J. B. Kogut, and M. P. Lombardo, Phys. Lett. B **502**, 345 (2001).
136. V. Azcoiti, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **53**, 148 (1997).
137. T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren, and S. A. Larin, Phys. Lett. B **400**, 379 (1997).
138. K. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).
139. C. Callan, R. Dashen, and D. Gross, Phys. Rev. D **20**, 3279 (1979).
140. S. V. Faleev and P. G. Silvestrov, Phys. Lett. A **197**, 372 (1995).
141. И. М. Суслов, ЖЭТФ **117**, 659 (2000).
142. G. L. Alfimov, V. M. Eleonsky, N. E. Kulagin et al., Physica D **44**, 168 (1990); Г. Л. Алфимов, Математическое моделирование **2**, 67 (1990); Г. Л. Алфимов, Изв. АН, сер. физ. **60**, 12 (1996).
143. И. М. Лифшиц, УФН **83**, 617 (1964).
144. E. Brezin and G. Parisi, J. Phys. C **13**, L307 (1980).
145. J. L. Cardy, J. Phys. C **11**, L321 (1978).
146. M. V. Sadovskii, Sov. Sci. Rev. A — Phys. Rev., ed. by I. M. Khalatnikov, **7**, 1 (1986), Harwood Academic Press, New York (1986).
147. И. М. Суслов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).