ЖЭТФ, 2006, том 129, вып. 6, стр. 1–13

АНАЛИТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КОНЕЧНО-РАЗМЕРНОГО СКЕЙЛИНГА ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ АНДЕРСОНА. ПОЛОСА КРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ПРИ $d > 2$?

И. М. Суслов *

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 29 декабря 2005 г.

Предложена аналитическая реализация конечно-размерного скейлинга, основанного на рассмотрении вспомогательных квазиодномерных систем. Сопоставление полученных аналитических результатов с результатами численного моделирования указывает на расщепление точки перехода Андерсона в полосу критических состояний. Этот вывод имеет независимые подтверждения в численных экспериментах [18, 20, 22]. Возможность возврата к общепринятой физической картине существует, но требует радикально новой интерпретации первичных численных данных.

PACS: 03.65.-w, 05.50.+q, 11.10.Hi, 71.23.An

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе автора [1] проведен анализ распространенного варианта конечно-размерного скейлинга, основанного на использовании минимального показателя Ляпунова для вспомогательных квазиодномерных систем [2–5]. Показано, что в двумерном ($2D$) случае минимальный показатель Ляпунова не удовлетворяет однопараметрическому скейлингу, что означает несправедливость обычной интерпретации первичных численных данных. В частности, вопреки утверждению авторов работ [3–5], в $2D$-системах возможен переход типа Костерлица–Таулеса между экспоненциальной и степенной локализацией [2].

Используемый подход основан на исследовании вторых моментов решения задачи Коши для квазиодномерного уравнения Шредингера, и в этом отношении он близок к подходу недавних работ [6, 7]. Однако формальные пересечения с этими работами ограничиваются исходной системой уравнений (5), тогда как обоснование метода и интерпретация результатов существенно различны; фактически мы не согласны с большинством утверждений, сделанных в этих работах (см. обсуждение в разд. 5). Ниже предлагаются результаты исследований для размерностей $d > 2$.

Кроме явной демонстрации существования перехода Андерсона при $d > 2$ (что имеет известный формальный интерес, хотя и не содержит физической новизны), используемый подход приводит к выводу о возможности «расщепления» перехода Андерсона. При изменении амплитуды W беспорядка имеются две критические точки, W_c и W_{c0}: при $W > W_{c0}$ имеется экспоненциальная локализация, при $W < W_c$ — металлическая фаза, тогда как в интервале $W_c < W < W_{c0}$ имеется полоса критических состояний, характеризуемых степенной огибающей и сильными флуктуациями на локальном уровне.

Такая картина имеет прямые подтверждения в численных экспериментах, но противоречит существующим теоретическим представлениям. Возврат к общепринятой физической картине возможен, но требуется радикально новая интерпретация первичных численных данных: нужно признать, что общепринятые значения точки перехода Андерсона являются сильно завышенными и реально переход происходит при значительно более слабом беспорядке.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Обсуждаемый алгоритм основан на рассмотрении вспомогательных квазиодномерных систем: так, вместо бесконечной $3D$-системы рассматривается

*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

система с размерами $L \times L \times L_z$, где $L_z \to \infty$. Решение задачи Коши для квазиодномерного уравнения Шредингера с начальными условиями, заданными на левом конце, допускает разбиение [1]

$$\psi_n(r_\perp) = A_1(n, r_\perp)\, e^{\gamma_1 n} + \\ + A_2(n, r_\perp)\, e^{\gamma_2 n} + \ldots + A_m(n, r_\perp)\, e^{\gamma_m n}\,, \quad (1)$$

где γ_s — показатели Ляпунова ($\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots \gamma_m > 0$), n — дискретная координата вдоль продольной оси (в единицах постоянной решетки), $r_\perp$ — поперечная координата, $A_s(n, r_\perp)$ — ограниченные функции. Показатели Ляпунова γ_s существуют в силу теоремы Оселедеца [8] и могут быть найдены численно методом трансфер-матрицы [2]. Минимальный показатель Ляпунова $\gamma_{min} \equiv \gamma_m$ можно использовать для оценки корреляционного радиуса ξ_{1D} квазиодномерной системы ($\xi_{1D} \sim 1/\gamma_{min}$), что позволяет ввести скейлинговый параметр $g = \xi_{1D}/L$, возрастающий как функция L в фазе с дальним порядком и убывающий в фазе с короткодействием [1, 2].

Среднее значение $\langle\, \psi_n(r_\perp)\, \rangle$ внутри разрешенной зоны не имеет систематического роста [1], а для вторых моментов справедливо разбиение, аналогичное (1),

$$\langle\, \psi_n^2(r_\perp)\, \rangle = B_1(r_\perp)\, e^{\beta_1 n} + \\ + B_2(r_\perp)\, e^{\beta_2 n} + \ldots + B_m(r_\perp)\, e^{\beta_m n}, \quad (2)$$

с тем же числом положительных показателей β_s. Как подробно обсуждалось ранее [1], показатели β_s дают строгую верхнюю оценку для γ_s ($\beta_s \geq 2\gamma_s$), тогда как в типичной физической ситуации справедливо порядковое равенство $\beta_s \sim \gamma_s$. Последнее следует из соотношения $b_s \lesssim a_s$ для параметров a_s и b_s, входящих в логарифмически нормальное распределение [1], которое подтверждается доступными аналитическими результатами для слабого [9] и сильного [10] беспорядка и разнообразным численным счетом [11]. Поэтому исследование разбиения (2) позволяет получить качественную информацию о спектре показателей γ_s и строгие ограничения на их поведение.

Рассмотрим d-мерную модель Андерсона, описываемую дискретным уравнением Шредингера

$$\psi_{n+1,\mathbf{m}} + \psi_{n-1,\mathbf{m}} + \sum_i \psi_{n,\mathbf{m}+\mathbf{e}_i} + \\ + V_{n,\mathbf{m}}\psi_{n,\mathbf{m}} = E\psi_{n,\mathbf{m}}\,, \quad (3)$$

где мы выделили продольную координату n; $\mathbf{m}$ — векторный номер узла в поперечном направлении, $\mathbf{e}_i$ — единичные векторы, направленные из узла $\mathbf{m}$ к ближайшим соседям в плоскости $n = \mathrm{const}$. Введя набор парных корреляторов

$$\begin{aligned} x_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n) &\equiv \langle\, \psi_{n,\mathbf{m}}\psi_{n,\mathbf{m}'}\, \rangle\,, \\ y_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n) &\equiv \langle\, \psi_{n,\mathbf{m}}\psi_{n-1,\mathbf{m}'}\, \rangle\,, \\ z_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n) &\equiv \langle\, \psi_{n-1,\mathbf{m}}\psi_{n,\mathbf{m}'}\, \rangle\,, \end{aligned} \quad (4)$$

нетрудно получить для них замкнутую систему разностных уравнений, которая при $E = 0$ имеет вид (подробнее см. [1])

$$\begin{aligned} x_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n+1) &= W^2\delta_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}x_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n) + \\ &+ \sum_{ij} x_{\mathbf{m}+\mathbf{e}_i,\mathbf{m}'+\mathbf{e}_j}(n) + x_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n-1) + \\ &+ \sum_i y_{\mathbf{m}+\mathbf{e}_i,\mathbf{m}'}(n) + \sum_j z_{\mathbf{m},\mathbf{m}'+\mathbf{e}_j}(n), \\ y_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n+1) &= -\sum_i x_{\mathbf{m}+\mathbf{e}_i,\mathbf{m}'}(n) - z_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n), \\ z_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n+1) &= -\sum_j x_{\mathbf{m},\mathbf{m}'+\mathbf{e}_j}(n) - y_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n). \end{aligned} \quad (5)$$

Величины $V_{n,\mathbf{m}}$ считаются статистически независимыми, причем

$$\langle\, V_{n,\mathbf{m}}\, \rangle = 0\,, \quad \langle\, V_{n,\mathbf{m}}V_{n',\mathbf{m}'}\, \rangle = W^2\delta_{nn'}\delta_{\mathbf{m}\mathbf{m}'}\,. \quad (6)$$

Зависимость решения от n является экспоненциальной,

$$x_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n) = x_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}e^{\beta n}\,, \quad y_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n) = y_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}e^{\beta n}\,, \\ z_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n) = z_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}e^{\beta n}\,, \quad (7)$$

и после формальной замены переменных

$$x_{\mathbf{m},\mathbf{m}'} \equiv \tilde{x}_{\mathbf{m},\mathbf{m}'-\mathbf{m}} \equiv \tilde{x}_{\mathbf{m},\mathbf{l}} \quad \text{и} \quad \text{т. д.} \quad (8)$$

получим, опуская тильды,

$$\begin{aligned} (e^\beta - e^{-\beta})\, x_{\mathbf{m},\mathbf{l}} &= W^2\delta_{\mathbf{l},\mathbf{0}}x_{\mathbf{m},\mathbf{l}} + \\ &+ \sum_{ij} x_{\mathbf{m}+\mathbf{e}_i,\mathbf{l}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i} + \\ &+ \sum_i y_{\mathbf{m}+\mathbf{e}_i,\mathbf{l}-\mathbf{e}_i} + \sum_j z_{\mathbf{m},\mathbf{l}+\mathbf{e}_j}\,, \\ e^\beta\, y_{\mathbf{m},\mathbf{l}} &= -\sum_i x_{\mathbf{m}+\mathbf{e}_i,\mathbf{l}-\mathbf{e}_i} - z_{\mathbf{m},\mathbf{l}}, \\ e^\beta\, z_{\mathbf{m},\mathbf{l}} &= -\sum_j x_{\mathbf{m},\mathbf{l}+\mathbf{e}_j} - y_{\mathbf{m},\mathbf{l}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты не зависят от $\mathbf{m}$, и потому зависимость решения от $\mathbf{m}$ экспоненциальна,

$$x_{\mathbf{m},\mathbf{l}} = x_{\mathbf{l}}\, e^{i\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{m}} \quad \text{и} \quad \text{т. д.}, \quad (10)$$

где разрешенные значения импульса $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_{d-1})$ определяются периодическими граничными условиями в поперечном направлении, $\psi_{n,\mathbf{m}+L\mathbf{e}_i} = \psi_{n,\mathbf{m}}$, и для каждого p_i равны $2\pi s/L$, $s = 0, 1, \ldots, L-1$. Используя (10) и исключая $y_{\mathbf{m},\mathbf{l}}$ и $z_{\mathbf{m},\mathbf{l}}$ из первого уравнения (9), приходим к уравнению

$$\sum_{ij} x_{\mathbf{m}+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j} \left[2\,\mathrm{ch}\,\beta\, e^{-i\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_i} - e^{-i\,\mathbf{p}\cdot(\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j)} - 1\right] + \\ + 2\,W^2\,\mathrm{sh}\,\beta\,\delta_{\mathbf{m},\mathbf{0}}\,x_{\mathbf{m}} = 4\,\mathrm{sh}^2\beta\,x_{\mathbf{m}}\,, \qquad (11)$$

описывающему точечный дефект в $(d-1)$-мерном блоке размера L^{d-1} с периодическими граничными условиями $x_{\mathbf{m}+L\mathbf{e}_i} = x_{\mathbf{m}}$. Уравнение (11) можно переписать в виде

$$\sum_{\mathbf{m}'} J_{\mathbf{m}'}\,x_{\mathbf{m}+\mathbf{m}'} + V\delta_{\mathbf{m},\mathbf{0}}\,x_{\mathbf{m}} = E\,x_{\mathbf{m}} \qquad (12)$$

и решить стандартным образом [12, 13]. Вводя функцию Грина $G_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}$ и спектр $\epsilon(\mathbf{k})$ невозмущенной системы ($V=0$),

$$\sum_{\mathbf{m}'} (E\,\delta_{\mathbf{m},\mathbf{m}'} - J_{\mathbf{m}'-\mathbf{m}})\,G_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''} = \delta_{\mathbf{m},\mathbf{m}''}\,, \qquad (13)$$

$$G_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(E) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{m}-\mathbf{m}')}}{E-\epsilon(\mathbf{k})}\,, \\ \epsilon(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{m}} J_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{m}} \qquad (14)$$

(N — полное число атомов), из уравнения (12) получим $x_{\mathbf{m}} = G_{\mathbf{m},0}Vx_0$, после чего уравнение самосогласования $1 = VG_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ определяет связанные состояния; для (11) это уравнение имеет вид

$$1 = W^2 I(\beta, \mathbf{p})\,, \qquad (15)$$

$$I(\beta,\mathbf{p}) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,\beta}{L^{d-1}}\sum_{\mathbf{k}}\left[4\,\mathrm{sh}^2\beta + \epsilon_0^2(\mathbf{k}) + \epsilon_0^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}) - \right. \\ \left. -2\,\mathrm{ch}\,\beta\,\epsilon_0(\mathbf{k})\,\epsilon_0(\mathbf{k}-\mathbf{p})\right]^{-1}, \qquad (16)$$

где $\epsilon_0(\mathbf{k})$ — обычный спектр сильной связи со взаимодействием ближайших соседей,

$$\epsilon_0(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{d-1} 2\,\cos k_i\,. \qquad (17)$$

Суммирование в (16) проводится по разрешенным значениям импульса $\mathbf{k}$, которые имеют вид $2\pi s/L$, $s = 0, 1, \ldots L-1$ для каждой компоненты. Уравнение (15) определяет значение β для каждого из L^{d-1} разрешенных значений $\mathbf{p}$, поэтому число положительных показателей β_s совпадает с числом положительных γ_s для той же задачи.

При $d=2$ выражение для $I(\beta,\mathbf{p})$ принимает вид

$$I(\beta,\mathbf{p}) = \frac{\mathrm{sh}\beta}{2(\mathrm{ch}\beta-\cos p)}\frac{1}{L}\times \\ \times\sum_k \frac{1}{\mathrm{ch}\beta - \cos(2\,k-p)} = \frac{\mathrm{cth}(\beta L/2)}{2(\mathrm{ch}\beta-\cos p)}$$

в соответствии с результатами работы [1]; последнее равенство получается при нечетных L с использованием формулы суммирования Пуассона.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАНИЯ

Зависимости $I(\beta,\mathbf{p})$ от β при фиксированных значениях $\mathbf{p}$ показаны на рис. 1. Опишем основные этапы исследования (15), (16), приводящие к этой картине.

Большие значения β. В локализованной фазе нижняя граница β_s спектра не доходит до нуля; в пределе $L\to\infty$ и постоянном β в уравнении (16) можно перейти от суммирования к интегрированию по первой зоне Бриллюэна,

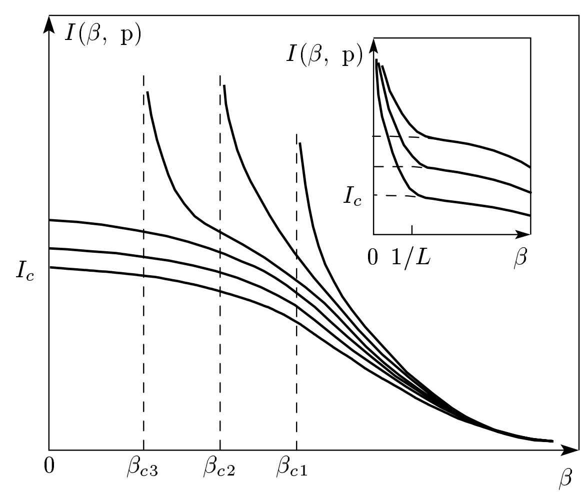


Рис. 1. Зависимости $I(\beta,\mathbf{p})$ от β при различных $\mathbf{p}$ в континуальном приближении (на вставке то же с учетом дискретности суммы в (16))

$$I(\beta,\mathbf{p}) = \\ = 2\,\mathrm{sh}\,\beta \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left[4\,\mathrm{sh}^2\beta + \epsilon_0^2(\mathbf{k}) + \epsilon_0^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}) - \right. \\ \left. - 2\,\mathrm{ch}\,\beta\, \epsilon_0(\mathbf{k})\,\epsilon_0(\mathbf{k}-\mathbf{p})\right]^{-1} . \quad (18)$$

Для больших β, используя явный вид спектра $\epsilon_0(\mathbf{k})$, нетрудно получить

$$I(\beta,\mathbf{p}) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\beta} + \frac{\epsilon_0(\mathbf{p})}{4\,\mathrm{sh}^2\beta} + \ldots \quad (19)$$

При $\beta \to \infty$ весь пучок кривых для разных $\mathbf{p}$ сжимается в одну кривую (рис. 1); при уменьшении β он расширяется. Верхняя граница пучка соответствует $\mathbf{p} = 0$, нижняя — $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$, где $\mathbf{G}$ — вектор обратной решетки вида

$$\mathbf{G} = (2\pi, 2\pi, \ldots, 2\pi)\,. \quad (20)$$

Верхняя часть пучка. Сделаем сдвиг $\mathbf{k} \to \mathbf{k}+\mathbf{p}/2$ в интеграле (18). Тогда поведение кривых на рис. 1 в верхней части пучка определяется областью малых $\mathbf{k}$, в которой интеграл имеет вид

$$I(\beta,\mathbf{p}) = 2\,\mathrm{sh}\,\beta \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\Delta + \sum\limits_{ij} a_{ij}k_ik_j}\,, \quad (21)$$

где

$$\Delta = 4\,\mathrm{sh}^2\beta + [2 - 2\,\mathrm{ch}\,\beta]\,\epsilon_0^2(\mathbf{p}/2),$$

$$a_{ij} = (4\,\mathrm{ch}\,\beta - 4)\,\epsilon_0\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\right)\cos(p_i/2)\,\delta_{ij} + \\ + 8\,\mathrm{ch}\,\beta \sin\left(\frac{p_i}{2}\right)\sin\left(\frac{p_j}{2}\right). \quad (22)$$

Для вектора $\mathbf{p}$ внутри первой зоны Бриллюэна ($|p_i| < \pi$) квадратичная форма является положительно определенной. Величина Δ положительна при больших β, а при $\beta \to 0$ имеет вид

$$\Delta = \beta^2\left[4 - \epsilon_0^2(\mathbf{p}/2)\right]. \quad (23)$$

При условии $|\epsilon_0(\mathbf{p}/2)| \le 2$ (которое всегда выполнено при $d = 2$) величина Δ остается неотрицательной для всех β. Если же $\mathbf{p}$ таково, что $|\epsilon_0(\mathbf{p}/2)| > 2$, то существует критическое значение β_c, при котором Δ меняет знак.

При $\beta \sim 1$ все собственные значения матрицы $\| a_{ij} \|$ в (21) порядка единицы и интеграл имеет при малых Δ сингулярность $\Delta^{(d-3)/2}$ (с логарифмическим ветвлением при нечетных d), которая делает его комплексным при $\Delta < 0$; поэтому при $\Delta < 0$ уравнение (15) не имеет решений, а соответствующая кривая исчезает с рис. 1. При $d \le 3$ интеграл (21) расходится при $\Delta \to 0$ и соответствующая кривая уходит на бесконечность; при $d > 3$ интеграл (21) конечен, но уход кривых на бесконечность сохраняется ввиду расходимости дискретной суммы в (16) из-за члена с $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. При малых β квадратичная форма в (21) сводится к величине $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2$, где $\mathbf{v}$ — вектор скорости с компонентами $v_i = -2\sin(p_i/2)$ и интеграл (21) расходится как $\Delta^{-1/2}$ для произвольной размерности d.

Из сказанного ясно, что кривые в верхней части пучка на рис. 1, соответствующие достаточно малым $\mathbf{p}$ (для которых $|\epsilon_0(\mathbf{p}/2)| > 2$), одна за другой уходят на бесконечность в точках $\beta_{c1}, \beta_{c2}, \beta_{c3}, \ldots$, тогда как до $\beta = 0$ доходят лишь кривые, соответствующие условию $|\epsilon_0(\mathbf{p}/2)| < 2$.

Нижняя часть пучка. При больших β нижняя кривая пучка соответствует значению $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$ (см. (20)), для которого уравнение (18) принимает вид

$$I\left(\beta, \frac{\mathbf{G}}{2}\right) = 2\,\mathrm{sh}\,\beta \int \frac{N(\epsilon)d\epsilon}{4\,\mathrm{sh}^2\beta + (2 + 2\mathrm{ch}\beta)\epsilon^2}\,, \quad (24)$$

где $N(\epsilon)$ — плотность состояний, соответствующая спектру $\epsilon_0(\mathbf{k})$. При малых β имеем

$$I\left(\beta, \frac{\mathbf{G}}{2}\right) = \frac{\beta}{2}\int \frac{N(\epsilon)d\epsilon}{\epsilon^2 + \beta^2} \approx \frac{\pi}{2}N(0)\,. \quad (25)$$

Для $d \ge 4$ кривая с $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$ остается самой нижней[1)] при всех β. Для $d = 3$ это не так: двумерный спектр $\epsilon_0(\mathbf{k})$ сильной связи приводит к ван-ховской особенности $N(\epsilon) \propto \ln(1/|\epsilon|)$ в центре зоны, и $I(\beta, \mathbf{G}/2)$ расходится как $\ln(1/\beta)$ при $\beta \to 0$; поэтому кривая с $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$ заведомо не остается самой нижней[2)] при малых β.

Малые значения β. В общем случае интеграл (18) конечен в пределе $\beta \to 0$ и при малых β имеет вид

$$I(\beta,\mathbf{p}) = \begin{cases} I(0,\mathbf{p}) - A(\mathbf{p})\beta^2\,, & d = 3, \\ I(0,\mathbf{p}) - A(\mathbf{p})\beta\,, & d \ge 4, \end{cases} \quad (26)$$

т. е. типичные кривые имеют линейную или параболическую форму. Для доказательства подставим в (18) явный вид спектра $\epsilon_0(\mathbf{k})$ и, полагая $p_i = \pi + 2q_i$, получим при малых β

$$I(\beta,\mathbf{p}) = \frac{\beta}{2}\int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left\{(2a_i\cos k_i)^2 + \beta^2 \times \right. \\ \left. \times \left[1 + (a_i\cos k_i)^2 - (b\sin k_i)^2\right]\right\}^{-1}, \quad (27)$$

---

1) Проверено численно для $d = 4, 5, 6$.

2) По-видимому, это обстоятельство не учитывалось в работах [6, 7], что привело их авторов к выводу о нулевом значении критического беспорядка для $E = 0$ и $d = 3$ (см. разд. 5).

где $a_i = \cos q_i$, $b_i = \sin q_i$ и по повторяющимся индексам проводится суммирование. Рассмотрим интеграл по одной из компонент вектора $\mathbf{k}$, например k_x. Согласно (27), он имеет структуру

$$\beta \int_{-\pi}^{\pi} dk_x \left\{(\cos k_x - \alpha)^2 + \right.$$
$$\left. + \beta^2 \left(A\cos^2 k_x + B\cos k_x + C\sin k_x + D\right)\right\}^{-1} \qquad (28)$$

и может быть вычислен методом контурного интегрирования. Полагая $z = \exp(ik_x)$, сведем его к виду

$$\beta \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \left\{ \left(\frac{z+z^{-1}}{2} - \alpha\right)^2 + \right.$$
$$\left. - \beta^2 \left[A\frac{(z+z^{-1})^2}{4} + \ldots\right] \right\}^{-1} = \int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{P_4(z)}, \qquad (29)$$

где $P_4(z)$ — полином четвертой степени по z, два корня которого (z_1, z_2) лежат внутри круга $|z| < 1$, а два корня (z_3, z_4) — вне его. При $\beta \to 0$ корни попарно сливаются, а при малых β могут быть параметризованы в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 - a\beta + b\beta^2, \quad z_2 = z_0^* - a_1\beta + b_1\beta^2, \\ z_3 &= z_0 + a\beta + b\beta^2, \quad z_4 = z_0^* + a_1\beta + b_1\beta^2. \end{aligned} \qquad (30)$$

в предположении, что $|\alpha| < 1$. Подстановка в выражение (29) показывает, что результат конечен при $\beta \to 0$, а поправка $O(\beta)$ первого порядка сокращается; правило интегрирования (28) записывается в виде

$$\beta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{(\cos k_x - \alpha)^2 + \beta^2 f^2(\cos k_x, \sin k_x)} =$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left[\frac{1}{f\left(\alpha, \sqrt{1-\alpha^2}\,\right)} + \frac{1}{f\left(\alpha, -\sqrt{1-\alpha^2}\,\right)}\right] +$$
$$+ O(\beta^2). \qquad (31)$$

При $|\alpha| > 1$ первый член в знаменателе выражения (28) не обращается в нуль и подынтегральное выражение может быть непосредственно разложено по β:

$$\beta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{(\cos k_x - \alpha)^2 + \beta^2 f^2(\cos k_x, \sin k_x)} =$$
$$= \beta \frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}} + O(\beta^3). \qquad (32)$$

При $d = 3$ условие $|\alpha| < 1$ всегда можно обеспечить, проводя сначала интегрирование по k_x или k_y; поэтому справедлив результат (31), структура которого не меняется при интегрировании по оставшейся переменной и соответствует (26). Нетрудно явно найти значение $\mathbf{p}$, для которого интеграл $I(\beta, \mathbf{p})$ минимален при $\beta \to 0$. Для $\mathbf{p} = (\pi, \pi - 2q)$ после интегрирования по k_x, согласно (31), получается интеграл

$$I(0, \mathbf{p}) = \frac{1}{8\pi} \times$$
$$\times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{\sqrt{1 - \cos^2 q \cos^2 k_y}\,\sqrt{1 - \sin^2 q \sin^2 k_y}}, \qquad (33)$$

для которого нетрудно установить симметрию относительно замены q на $\pi/2 - q$. Интеграл расходится при $q \to 0$ и $q \to \pi/2$, тогда как при $q = \pi/4$ он имеет минимум

$$I_c = \min_{\mathbf{p}} I(0, \mathbf{p}) = \frac{2}{3\pi} K\left(\frac{1}{3}\right) =$$
$$= 0.3432\ldots \quad (d = 3), \qquad (34)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл. Рассматривая значения $\mathbf{p} = (\pi - q_x, \pi/2 - q_y)$ с малыми q_x и q_y, нетрудно убедиться, что (34) реализует локальный минимум по обеим переменным, q_x и q_y. Численным исследованием можно проверить, что этот минимум является глобальным.

При $d \geq 4$ параметр α в (28) может быть по модулю как больше, так и меньше единицы в зависимости от значений остальных переменных интегрирования; результат определяется суперпозицией выражений (31) и (32), и линейный член по β оказывается конечным в соответствии с (26). Это нетрудно продемонстрировать явно, преобразуя уравнение (27) по схеме

$$I(\beta, \mathbf{p}) = \frac{\beta}{2} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(2a_i \cos k_i)^2 + \beta^2} =$$
$$= \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\epsilon^2 + \beta^2} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \delta\left(\epsilon - \sum_{i=1}^{d-1} 2a_i \cos k_i\right) =$$
$$= \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\epsilon^2 + \beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \times$$
$$\times \exp\left(it\epsilon - it\sum_{i=1}^{d-1} 2a_i \cos k_i\right) =$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} dt\, e^{-\beta t/2} \prod_i J_0(2a_i t), \qquad (35)$$

где $J_0(t)$ — функция Бесселя. Мы опустили в (27) суммы в квадратных скобках: первая из них ограничена сверху величиной порядка β, вторая несущественна при малых значениях q_i, представляющих основной интерес. Нетрудно проверить, что $I(0,\mathbf{p})$ имеет локальный минимум при $\mathbf{q}=0$ (т.е. при $\mathbf{p}=\mathbf{G}/2$ в соответствии со сказанным выше), значение в котором

$$I_c=\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty dt\,[J_0(t)]^{d-1} = \\ = \begin{cases} 0.2241\ldots, & d=4, \\ 0.2256\ldots, & d=5, \\ 0.1884\ldots, & d=6. \end{cases} \qquad (36)$$

Разложение (35) по β показывает конечность линейной поправки к I_c в согласии с (26)[3].

Область малых величин β при конечных значениях L. Выше мы рассматривали конечные β при $L\to\infty$, когда сумму в выражении (16) можно заменить интегралом (фактически это возможно при $\beta\gg 1/L$). Ситуация меняется, если величина L конечна, а β произвольно мала; выражение (16) при этом сводится к виду

$$I(\beta,\mathbf{p})=\frac{2\beta}{L^{d-1}}\sum_{\mathbf{k}}\Big\{[\epsilon_0(\mathbf{k})-\epsilon_0(\mathbf{k}-\mathbf{p})]^2+ \\ +\beta^2\,[4-\epsilon_0(\mathbf{k})\epsilon_0(\mathbf{k}-\mathbf{p})]\Big\}^{-1}. \qquad (37)$$

При нечетных L для каждого разрешенного значения $\mathbf{p}$ можно найти такое $\mathbf{k}=\mathbf{k}^*$, что разность $\epsilon_0(\mathbf{k})-\epsilon_0(\mathbf{k}-\mathbf{p})$ строго равна нулю[4]: это $\mathbf{k}^*=(\mathbf{p}+\mathbf{g})/2$, где $\mathbf{g}$ — один из векторов обратной решетки (учитываем, что $\epsilon_0(\mathbf{k})=\epsilon_0(-\mathbf{k})$, $\epsilon_0(\mathbf{k}+\mathbf{g})=\epsilon_0(\mathbf{k})$). При $\beta\to 0$ с этим значением $\mathbf{k}$ связан сингулярный вклад, который естественно выделить из суммы (37):

$$I(\beta,\mathbf{p})=\frac{2}{\beta L^{d-1}}\,\frac{1}{4-\epsilon_0^2(\mathbf{k}^*)}+I_{reg}(\beta,\mathbf{p})\,, \qquad (38)$$

где $\epsilon^2(\mathbf{k}^*)\le\epsilon^2(\mathbf{p/2})$ для значений $\mathbf{p}$, лежащих внутри первой зоны Бриллюэна. Поэтому кривые, имевшие в континуальном приближении конечный предел при $\beta\to 0$ (для них $4-\epsilon_0^2(\mathbf{p/2})>0$), в действительности загибаются вверх (поскольку $4-\epsilon^2(\mathbf{k}^*)>0$) и уходят на бесконечность (см. вставку на рис. 1).

[3] При $a_i=1$ имеется логарифмическая расходимость при $d=5$, так что $I(\beta,\mathbf{G}/2)-I(0,\mathbf{G}/2)\sim\beta\ln\beta$.

[4] При четных L это возможно не для всех разрешенных значений $\mathbf{p}$. В результате число положительных показателей β_s, вообще говоря, не совпадает с числом положительных γ_s, и имеются трудности в сопоставлении разбиений (1) и (2). Поэтому четные значения L мы не используем.

Значения критического беспорядка для различных размерностей d в случае прямоугольного распределения $V_{n,\mathbf{m}}$

d	W_c	W_{c0}
3	5.91	16.5
4	7.32	34
5	7.29	–
6	7.98	–

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ И ОБЩИЙ АНАЛИЗ СИТУАЦИИ

Сшивка выражений (26) и (38) при $\beta\sim 1/L$ показывает, что величина $I_{reg}(\beta,\mathbf{p})$ близка к величине $I(0,\mathbf{p})$, полученной в континуальном приближении. Для минимального показателя β_{min}, входящего в (2), результаты (24), (26) и (38) определяют его зависимость от W всюду за исключением узкой окрестности точки $W_c=1/\sqrt{I_c}$, которая уменьшается при увеличении L. Легко видеть, что $\beta_{min}\to\mathrm{const}$ для $W>W_c$ и $\beta_{min}\propto 1/L^{d-1}$ для $W<W_c$ в пределе $L\to\infty$. Считая минимальные показатели β_{min} и γ_{min} величинами одного порядка, можно оценить корреляционный радиус ξ_{1D} квазиодномерной системы как $1/\beta_{min}$ и ввести скейлинговый параметр $g=\xi_{1D}/L$. Тогда

$$g\sim\begin{cases} L^{d-2}\,, & W<W_c, \\ 1/L\,, & W>W_c, \end{cases} \qquad (39)$$

что указывает на существование металлической фазы при $W<W_c$ и экспоненциальной локализации при $W>W_c$ (см. обсуждение в работе [1]).

Однако при $d>2$ имеются указания на нарушение предположенного соотношения $\beta_{min}\sim\gamma_{min}$: согласно численным результатам [2–4, 14, 15], обращение γ_{min} в нуль (при $L=\infty$) происходит в точке W_{c0}, отличной от W_c (рис. 2*а*), которая и принимается в настоящее время за точку перехода Андерсона[5]. В таблице приведены значения $W_c=1/\sqrt{I_c}$,

[5] Численные результаты для $d=5,6$ докладывались на конференции [16], но остались неопубликованными.

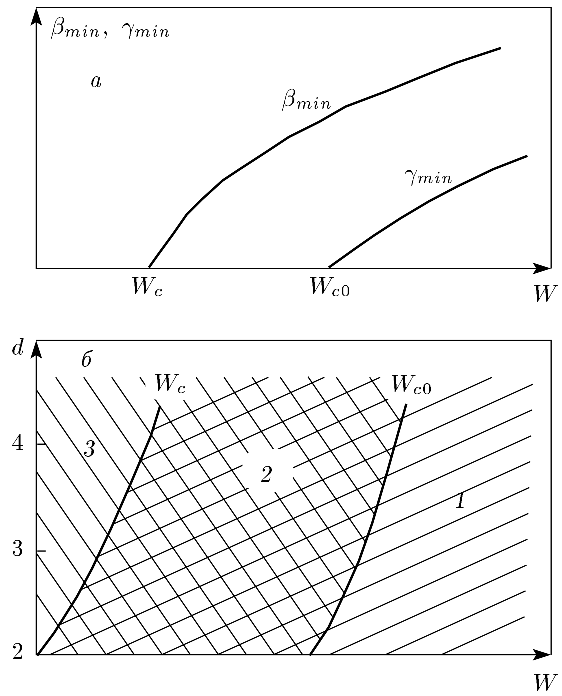


Рис. 2. *а*) Зависимости β_{min} и γ_{min} от W при $L = \infty$. *б*) Зависимости W_c и W_{c0} от размерности пространства d в предположении их непрерывности. Области *1, 2, 3* соответствуют экспоненциальной локализации, степенной локализации и металлической фазе

следующие из (34), (35), и значения W_{c0}, полученные в работах [2–4, 14, 15]: они приводятся для величины $\tilde{W} = W\sqrt{12}$ в соответствии с тем, что обычно для $V_{n,\mathbf{m}}$ принимается прямоугольное распределение ширины $\tilde{W}$, для которого $\langle V_{n,\mathbf{m}}^2 \rangle = \tilde{W}^2/12$. Обсудим возможные интерпретации возникающей ситуации.

4.1. Возможность полосы критических состояний

Не вызывает сомнения, что область $W < W_c$ соответствует металлической фазе, а область $W > W_{c0}$ — экспоненциальной локализации. Интерпретация области $W_c < W < W_{c0}$ неоднозначна[6]. Рассмотрим для простоты чисто одномерную систему, для которой типичное значение решения задачи Коши и его первые два момента имеют поведение

$$\psi_n \sim e^{\gamma n}, \quad \langle \psi_n \rangle \sim 1, \quad \langle \psi_n^2 \rangle \sim e^{\beta n}. \tag{40}$$

Если $\beta > 0$, а $\gamma = 0$, то ψ_n не имеет систематического роста, но содержит редкие выбросы все возрастающей амплитуды (рис. 3*а*). Построение собственной функции одномерной системы путем сшивки двух решений типа (40), распространяющихся с двух противоположных концов системы, приводит к выводу о существовании как делокализованной компоненты, так и локализованной структуры, состоящей из отдельных всплесков (рис. 3*б*). Простейшая интерпретация состоит в том, что собственная функция является гибридным состоянием, т. е. суперпозицией локализованной и делокализованной функций [1].

Возможна, однако, и другая интерпретация. Обращение γ в нуль означает лишь отсутствие экспоненциального роста и не исключает для типичного значения ψ_n возможности более медленного (степенного) роста. Что касается огибающей локализованной компоненты, то ее форма зависит от статистики всплесков и может быть как экспоненциальной, так и степенной. Действительно, пусть всплески происходят в точках x_n, имеют ширину Δ_n и случайную высоту порядка h_n; тогда гистограмма распределения $P(\psi_n)$ состоит из прямоугольников ширины h_n и высоты Δ_n/x_n. Для того чтобы величина ψ_n не имела систематического роста, ее распределение $P(\psi_n)$ должно быть нормируемым, так что величина $\epsilon_n = h_n\Delta_n/x_n$ убывает быстрее, чем $1/n$. Дисперсия же $h_n^3\Delta_n/x_n \sim \epsilon_n h_n^2$ растет как $e^{\beta n}$ и степенная огибающая $h_n \sim x_n^\alpha$ возможна при

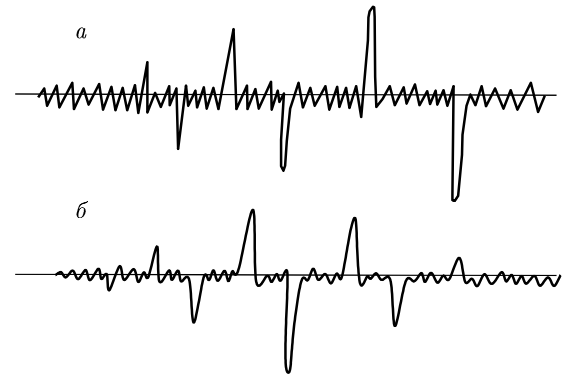


Рис. 3. Решение задачи Коши (*а*) и построенная по Мотту собственная функция $1D$-системы (*б*) в ситуации $\gamma = 0$, $\beta > 0$

[6] Из анализа, проведенного в работе [1] ясно, что в точках W_{c0} и W_c происходит обращение в нуль соответственно параметров a и b, входящих в логарифмически нормальное распределение. Поэтому обе эти точки имеют реальный физический смысл.

$$x_n \sim \left(\frac{e^{\beta n}}{\epsilon_n}\right)^{1/2\alpha}, \quad \Delta_n \sim \epsilon_n \left(\frac{e^{\beta n}}{\epsilon_n}\right)^{(1-\alpha)/2\alpha}, \quad h_n \sim \left(\frac{e^{\beta n}}{\epsilon_n}\right)^{1/2}. \tag{41}$$

Таким образом, ситуация $\gamma = 0$, $\beta > 0$ может соответствовать собственным функциям со степенным поведением огибающей и сильными флуктуациями на локальном уровне; такие свойства широко обсуждаются для состояний, соответствующих критической точке [17]. Следовательно, обращение в нуль величин β_{min} и γ_{min} в разных точках (см. рис. 2*а*) может соответствовать существованию при $W_c < W < W_{c0}$ целой полосы критических состояний. Такая картина хорошо сшивается с ситуацией при $d = 2$, обсуждавшейся ранее [1]: в пределе $d \to 2$ точка W_c обращается в нуль в соответствии с отсутствием при $d = 2$ металлической фазы, тогда как точка W_{c0} остается конечной в соответствии с существованием перехода типа Костерлица–Таулеса между экспоненциальной и степенной локализацией (см. рис. 2*б*)[7)].

Перейдем к сопоставлению с численными результатами. Несмотря на большое число публикаций и претензии отдельных авторов на высокую точность определения точки перехода, имеется очень мало работ, в которых переход Андерсона отслеживается непосредственно по изменению характера волновых функций. Фактически начиная с 1981 г. почти все работы используют однопараметрический скейлинг и основаны на изучении величин, имеющих довольно косвенное отношение к переходу Андерсона.

Существование полосы необычных состояний при $5 < W < 15$ (ср. с таблицей) для $3D$-решетки типа алмаза отмечалось еще в ранней работе Эдвардса и Таулеса [18]. Скейлинговый параметр g, характеризующий реакцию на граничные условия (в современной литературе — параметр Таулеса или безразмерный кондактанс [19]), практически не зависел для этих состояний от размера системы в отличие от ожидаемого роста в металлической фазе и убывания в локализованной (рис. 4). В дальнейшем Ласт и Таулес [20] интерпретировали эти состояния в терминах степенной локализации.

Существование полосы критических состояний подтверждается и исследованием «отношения участия» (participation ratio)

7) Отметим, что степенная локализация по-разному проявляется в конечно-размерном скейлинге при $d = 2$ и $d > 2$: в первом случае как $\beta_{min} \sim \gamma_{min} \sim 1/L$, во втором — как $\beta_{min} \sim 1$, $\gamma_{min} \to 0$ при $L \to \infty$.

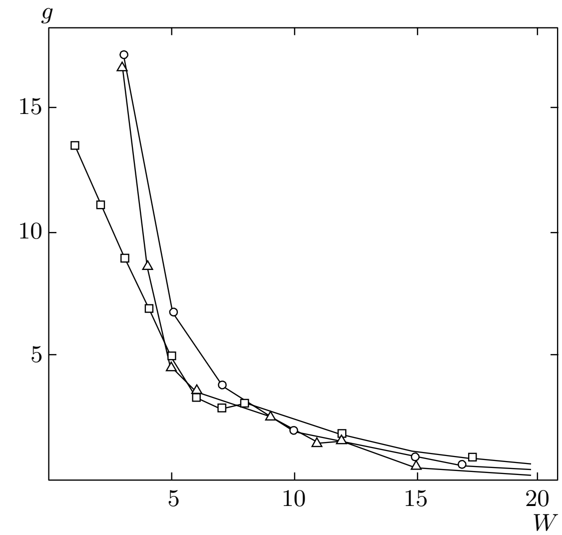
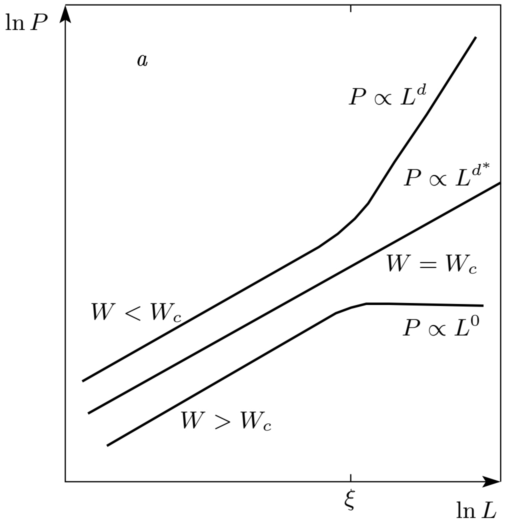


Рис. 4. Параметр g, характеризующий влияние граничных условий, в зависимости от W для различных L [18]: $L = 2$ (□); $L = 4$ (○); $L = 6$ (△)

$$P = \frac{\left(\sum_n |\psi_n|^2\right)^2}{\sum_n |\psi_n|^4}. \tag{42}$$

Для конечной системы в форме куба со стороной L величина P ведет себя как L^d для состояний блоховского типа и как L^0 для локализованных состояний. В критической точке ожидается поведение L^{d^*} в соответствии с существованием фрактальной размерности d^* [21]; такое же поведение должно быть в локализованной и металлической фазах на масштабе $L \lesssim \xi$, когда система неотличима от критической. Ожидаемое поведение величины P в двойном логарифмическом масштабе представлено на рис. 5*а*.

Реально обнаруженное поведение [22] находится в резком противоречии с рис. 5*а*: для всех W наблюдается степенное поведение $P \propto L^\alpha$ с показателем α, зависящим от степени беспорядка (рис. 5*б*). Однако такое поведение прекрасно объясняется существованием полосы критических состояний. Согласно таблице, три верхние кривые на рис. 5*б* с $W = 2.7, 3.9, 5.5$ соответствуют области $W < W_c$, и их наклон в пределах точности не отличается от зависимости $P \propto L^d$ с евклидовой размерностью d. Остальные кривые для $W = 7.8$, 10.9, 12.3, 13.9, 15.6, 17.5, 19.6 соответствуют области $W_c < W < W_{c0}$ (использовалось гауссово распределение, для которого $W_{c0} = 21$), и их поведение отвечает зависимости $P \propto L^{d^*}$, в которой фрак-



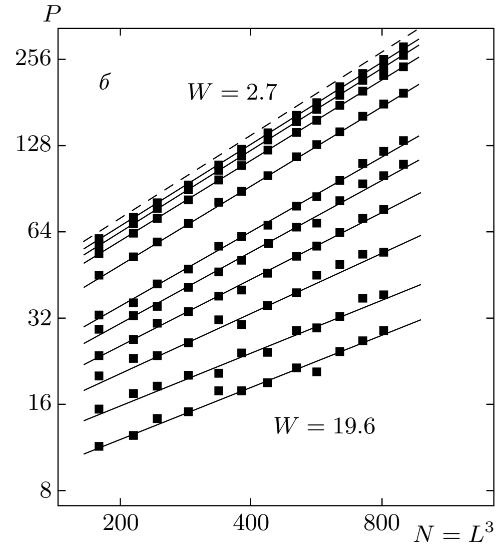


Рис. 5. a) Ожидаемое поведение отношения участия P в зависимости от размера системы для различных W. $б$) Численные результаты работы [22]: кривые сверху вниз соответствуют значениям $W = 2.7$, 3.9, 5.5, 7.8, 10.9, 12.3, 13.9, 15.6, 17.5, 19.6 для трехмерной модели Андерсона с гауссовым беспорядком. Штриховая кривая соответствует закону $P \propto L^d$

тальная размерность d^* внутри полосы критических состояний зависит от степени беспорядка.

4.2. Возможности возврата к общепринятой картине

Если представленная выше картина правильна, то теория локализации попадает в тяжелое положение: возможность полосы критических состояний не предсказывается ни одним из существующих вариантов теории. Единственное оптимистическое соображение состоит в следующем. Показатель β_{min} (и, следовательно, точка W_c) определяются лишь первыми двумя моментами распределения $V_{n\mathbf{m}}$ (см. (6)), тогда как показатель γ_{min} чувствителен ко всей функции распределения $P(V)$: например, значения W_{c0} различны для прямоугольного и гауссова распределений. Можно надеяться, что подбором функции $P(V)$ точку W_{c0} можно понизить так, что она совпадет с W_c (возможность $W_{c0} < W_c$ исключается неравенством $\beta_{min} \geq 2\gamma_{min}$ [1]). Тогда существующие теории (например, [21, 23, 24]) описывают ситуацию $W_{c0} = W_c$ и дают некоторое нулевое приближение к общему случаю[8]: ближайшей задачей теории следует считать выяснение механизма расщепления изолированной точки перехода в полосу критических состояний. Заметим, что такая возможность хорошо согласуется с ситуацией при $d = 2$ (см. рис. 2$б$), где существование или отсутствие перехода типа Костерлица–Таулеса зависит от конкретной модели [1].

В действительности возможности возврата к общепринятой картине являются более широкими, но требуют радикально новой интерпретации численных результатов. Заметим, что численный счет не демонстрирует непосредственно исчезновения γ_{min} при $W < W_{c0}$ в пределе $L \to \infty$; этот вывод делается на основе интерпретации результатов в рамках однопараметрического скейлинга (в предположении, что параметр $g = 1/\gamma_{min}L$ является функцией лишь отношения L/ξ). Согласно работе [1], минимальный показатель Ляпунова является плохой скейлинговой переменной и не удовлетворяет однопараметрическому скейлингу: тем самым смысл точки W_{c0} становится довольно сомнительным. Реальная ситуация несколько сложнее, так как выделенность точки W_{c0} проявляется при исследовании не только показателей Ляпунова, но и многих других величин [25]. Однако и этому можно найти объяснение.

Естественным скейлинговым параметром в теории локализации является параметр Таулеса g [19],

[8] Точка перехода не вычисляется сколько-нибудь надежно ни в одной из имеющихся теорий; она либо вводится феноменологически, либо оценивается с использованием грубых аппроксимаций.

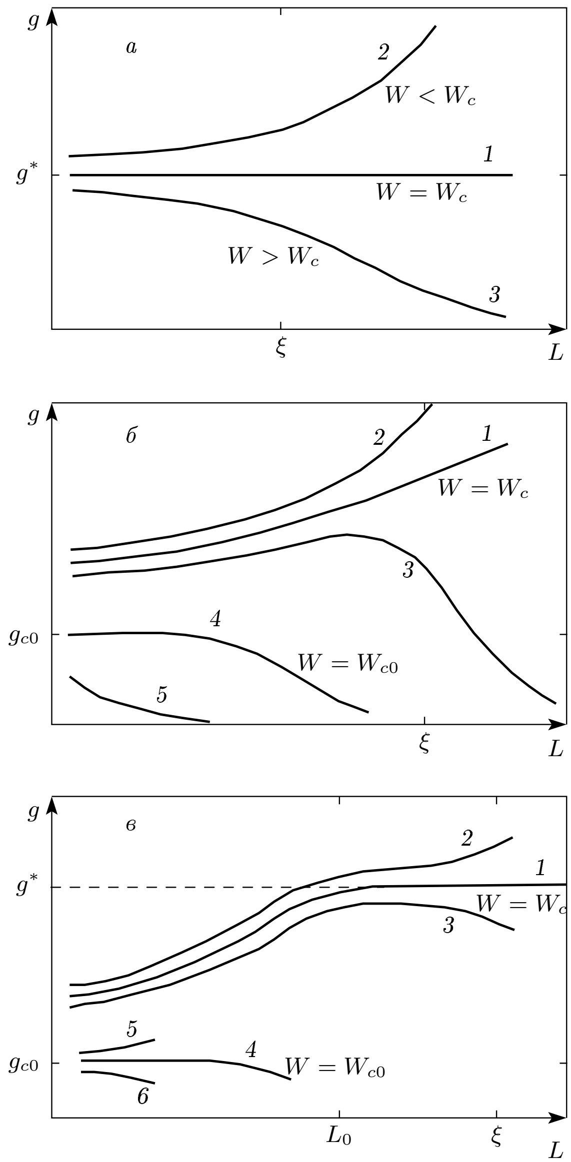


Рис. 6. Зависимость параметра Таулеса g от размера системы L при $d = 3$ (*а*), $d > 4$ (*б*), $d = 4 - \epsilon$ (*в*)

для которого постулируется уравнение Гелл-Манна – Лоу

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \beta(g)\,. \tag{43}$$

При наличии неподвижной точки g^* (такой, что $\beta(g^*) = 0$) типичные зависимости $g(L)$ имеют вид, показанный на рис. 6*а*: параметр Таулеса является постоянным в точке перехода (кривая *1*) и стремится к нулю или к бесконечности соответственно в локализованной и металлической фазах (кривые *2, 3*). При увеличении размерности пространства d уравнение (43) нарушается, из-за того что один из несущественных параметров (назовем его h) становится существенным при достижении верхней критической размерности d_{c2} [26]. Поэтому в окрестности размерности d_{c2} следует использовать уравнения двухпараметрического скейлинга

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \beta(g, h)\,, \quad \frac{d \ln h}{d \ln L} = \gamma(g, h)\,, \tag{44}$$

которые, согласно работе [26], можно свести к виду

$$\begin{aligned} \frac{d \ln g}{d \ln L} &= (d-2) + \tilde{\beta}\left(\frac{g}{h}\right)\,, \\ \frac{d \ln h}{d \ln L} &= (d - d_{c2}) + \frac{b}{h}\,, \end{aligned} \tag{45}$$

где $d_{c2} = 4$ [27], $b > 0$. Исследование уравнений (45) показывает, что при $d \geq 4$ параметр Таулеса g не является постоянным в точке перехода, а растет как L^{d-4} при $d > 4$ или логарифмически при $d = 4$ (рис. 6*б*, кривая *1*); в металлической фазе рост более сильный, как L^{d-2} (кривая *2*), тогда как в локализованной фазе вблизи перехода наблюдается возвратное поведение (кривая *3*). В глубине локализованной фазы параметр g монотонно убывает (кривая *5*), что по непрерывности означает существование кривой *4*, которая соответствует приблизительному постоянству g в области малых L. Значение g_{c0}, соответствующее начальной части кривой *4*, будет приниматься за критическую точку при формальной обработке в рамках однопараметрического скейлинга.

Ситуация для $d = 4 - \epsilon$ характеризуется наличием большого масштаба

$$L_0 \propto \exp(\text{const}/\epsilon) \tag{46}$$

(рис. 6*в*), как и в обычной теории критических явлений [28]. При $L \gg L_0$ справедлив однопараметрический скейлинг в окрестности $g \approx g^*$ (ср. кривые *1, 2, 3* на рис. 6*в* и рис. 6*а*), тогда как при $L \ll L_0$ возникает фиктивный однопараметрический скейлинг в окрестности g_{c0} (кривые *4, 5, 6*). Точки g^* и g_{c0} являются соответственно корнями уравнений $\beta(g, h^*) = 0$ и $\beta(g, h_0) = 0$, где $h^* = b/\epsilon$ — предельное значение параметра h при $L \to \infty$ (существующее согласно второму уравнению (45)), h_0 — его начальное значение, которое остается приблизительно постоянным при $L \ll L_0$. Существование большого масштаба L_0 возможно и при $d = 3$, если значение константы в (46) составляет несколько единиц.

Из сказанного ясно, что формальная обработка зависимости $g(L)$ при малых L в рамках однопараметрического скейлинга неизбежно приводит при

$d \geq 4$ и $d = 4 - \epsilon$ (а возможно, и при $d = 3$) к выявлению фиктивной критической точки g_{c0}, которая будет проявляться во всех физических величинах; фактически же точка g_{c0} (которой соответствует амплитуда W_{c0} беспорядка) лежит в глубине локализованной фазы. Интервал $W_c < W < W_{c0}$ соответствует возвратному поведению параметра Таулеса: это отражается на поведении собственных функций, но не меняет их экспоненциальной локализации. С этой точки зрения, отличие W_{c0} от W_c в таблице является артефактом, связанным с недостаточно большим размером системы при $d = 3$ и принципиальной неприменимостью однопараметрического скейлинга при $d \geq 4$. Соответственно и результаты, представленные на рис. 4 и рис. 5*б*, не имеют глубокого смысла и отражают переходное поведение, связанное с релаксацией параметра h к его предельному значению h^*.

Заметим, что неправильное определение точки перехода (g_{c0} вместо g^*) приведет к неправильному определению критического индекса ν корреляционного радиуса, который (при $d < 4$) будет определяться производной $\beta'_g(g_{c0}, h_0)$, а не $\beta'_g(g^*, h^*)$, как положено. Возможно, это разрешает противоречия между аналитическими результатами и численным счетом, обсуждавшиеся автором ранее [1, 29].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследован спектр показателей β_s, описывающих рост вторых моментов решения задачи Коши для квазиодномерного уравнения Шредингера. Показано, что минимальный показатель β_{min} обращается в нуль (для $L = \infty$) в точке W_c, отличной от той, которая принимается за точку перехода Андерсона W_{c0} на основании численного счета. Если не подвергать результаты численного счета сомнению, то обе точки имеют реальный физический смысл и соответствуют обращению в нуль параметров a и b, входящих в логарифмически нормальное распределение [1] для последнего члена в (1). Область $W_c < W < W_{c0}$ естественно интерпретировать как полосу критических состояний со степенным поведением огибающей и сильными флуктуациями на локальном уровне. Эта возможность имеет прямые подтверждения в численных экспериментах, но не объясняется существующими теориями. В частности, она не описывается теорией однопараметрического скейлинга [19], что делает внутренне противоречивой интерпретацию численных экспериментов, в которых определяется положение точки W_{c0}.

Для прояснения ситуации желательно продолжить результаты, представленные на рис. 5*б*, в область больших L: это технически возможно, так как в настоящее время такие расчеты проводятся для систем в 5–10 раз большего размера, но, к сожалению, только для величины беспорядка, соответствующего точке W_{c0} [30]. Такие исследования либо оставят неизменной качественную картину, представленную на рис. 5*б* (что будет серьезным аргументом в пользу полосы критических состояний), либо эта картина начнет изменяться в сторону рис. 5*а*, что с неизбежностью приведет к выявлению большого масштаба L_0, обсуждавшегося в разд. 4. В любом случае новая интерпретация основного массива численных экспериментов окажется неизбежной.

В заключение обсудим соответствие работы [1] и настоящей работы с недавними публикациями [6, 7]. Исходная система уравнений (5) эквивалентна представленной в работах [6, 7], где, однако, не используется переменная $z_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(n)$, а ее роль играет $y_{\mathbf{m}',\mathbf{m}}(n)$. В результате система уравнений не имеет законченной разностной формы и не может быть решена естественным образом с нахождением всего спектра показателей β_s. Поэтому в [6, 7] используется Z-преобразование, позволяющее найти решение лишь в термодинамическом пределе $L \to \infty$ и с применением сомнительной процедуры усреднения по трансляциям в поперечном направлении. В общем случае трансляционная инвариантность решения по $\mathbf{m}$ не имеет места (см. (10)) и указанная процедура, по-видимому, устраняет все β_s, кроме тех, которые соответствуют условиям $\mathbf{p} = 0$ и $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$ (если эффективно в результаты работ [6, 7] входят квадраты переменных $x_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}$). По-видимому, в этом состоит происхождение нулевого критического беспорядка для $d = 3$. К счастью для авторов работ [6, 7], условие $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$ соответствует минимальному показателю β_{min} для $d = 2$ и $d \geq 4$, что позволило им правильно определить критические значения σ'_0, соответствующие нашим W_c. Что касается второй особой точки σ_0 для высших размерностей, то на уровне спектра β_s мы не видим для нее никаких оснований: по-видимому, используемая в [6, 7] функция фильтра $H(z)$ имеет не только полюсы, соответствующие собственным значениям трансфер-матрицы, но и другие сингулярности, не имеющие физического смысла. Соответственно, мы не видим оснований для выделенности размерности $d = 6$, которая никак не проявляется в точном теоретико-полевом подходе [27].

Изложение в работах [6, 7] ведется на радиотехническом языке (с использованием представлений о сигналах, фильтрах и пр.) и не имеет прямой связи с переходом Андерсона. Преждевременный переход к термодинамическому пределу не позволяет использовать для интерпретации результатов идеологию конечно-размерного скейлинга: в частности, переход в $2D$-случае интерпретируется как переход первого рода (что противоречит всей имеющейся информации), а не как переход типа Костерлица – Таулеса. Аналогично, соображения о возможности неэкспоненциальной локализации на первый взгляд близки к нашим, но фактически не имеют ничего общего. Далее, в отличие от [6, 7], мы не придаем показателям β_s того же статуса, как стандартным показателям Ляпунова γ_s: последние являются самоусредняющимися величинами и заведомо имеют более фундаментальный характер. Фактически для всех ответственных утверждений используются лишь неравенство $\beta_s \geq 2\gamma_s$ и связь β_s с параметрами логарифмически нормального распределения [1]; порядковое соотношение $\beta_s \sim \gamma_s$ используется с большой осторожностью и лишь в тех случаях, когда оно не противоречит численному счету. Наконец, мы не считаем заведомо правильными общепринятые представления о связи минимального показателя γ_{min} с переходом Андерсона: на наш взгляд, в общем случае корреляционный радиус ξ_{1D} определяется эффективным показателем γ_{eff} [1], что может существенно повлиять как на положение точки перехода, так и на критическое поведение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-17519).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Суслов, ЖЭТФ **128**, 768 (2005).
2. J. L. Pichard and G. Sarma, J. Phys. C **14**, L127, L617 (1981).
3. A. MacKinnon and B. Kramer, Phys. Rev. Lett. **47**, 1546 (1981).
4. A. MacKinnon and B. Kramer, Z. Phys. **53**, 1 (1983); A. MacKinnon, J. Phys.: Condens. Matter **6**, 2511 (1994).
5. M. Schreiber and M. Ottomeier, J.Phys.: Condens. Matter **4**, 1959 (1992).
6. V. N. Kuzovkov et al., J. Phys.: Condens. Matter **14**, 13777 (2002).
7. V. N. Kuzovkov and W. von Niessen, Eur. Phys. J. B **42**, 529 (2004).
8. В. И. Оселедец, Труды моск. мат. общества **19**, 197 (1968).
9. M. Janssen, Phys. Rep. **295**, 1 (1998); J. L. Pichard and M. Sanquer, Physica A **167**, 66 (1990); A. M. S. Macedo and J. T. Chalker, Phys. Rev. B **46**, 14985 (1992); M. Caselle, Phys. Rev. Lett. **74**, 2776 (1995); C. W. J. Beenakker and B. Rejaei, Phys. Rev. Lett. **71**, 36891 (1993); Phys. Rev. B **49**, 7499 (1994).
10. E. Abrahams and M. S. Stephen, J. Phys. C **13**, L377 (1980).
11. P. Markos and B. Kramer, Phil. Mag. **68**, 357 (1993); P. Markos, J. Phys.: Condens. Matter **7**, 8361 (1995); K. Slevin, Y. Asada, and L. I. Deych, E-print archives, cond-mat/0404530.
12. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
13. Дж. Займан, *Современная квантовая теория*, Мир, Москва (1971), гл. IV.
14. I. Kh. Zharekeshev and B. Kramer, Ann. der Phys. **7**, 442 (1998).
15. P. Markos and M. Heneke, J. Phys.: Condens. Matter **6**, L765 (1994).
16. I. Kh. Zharekeshev, Invited talk on «Localization 1999», Hamburg (1999).
17. H. Aoki, J. Phys. C **16**, L205 (1983); Phys. Phys. B **33**, 7310 (1986); C. Castellani and L. Pelity, Phys. Phys. A **19**, L429 (1986); M. Janssen, Int. J. Mod. Phys. **8**, 943 (1994).
18. J. T. Edwards and D. J. Thouless, J. Phys. C **5**, 807 (1972); D. J. Thouless, Phys. Rep. **13**, 92 (1974).
19. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishman, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
20. B. J. Last and D. J. Thouless, J. Phys. C **7**, 699 (1974).
21. C. M. Soukoulis and E. N. Economou, Phys. Rev. Lett. **52**, 565 (1984).
22. M. Schreiber, J. Phys. C **18**, 2490 (1985); Physica A **167**, 188 (1990).
23. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980); Phys. Rev. Lett. **48**, 699 (1982); D. Vollhardt and P. Wölfle, in Modern Problems in Condensed Matter Sciences, ed. by V. M. Agranovich and A. A. Maradudin, v. 32, North-Holland, Amsterdam (1992).

24. И. М. Суслов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).

25. G. Schubert, A. Weisse, G. Wellein, and H. Feshke, E-print archives, cond-mat/0309015.

26. И. М. Суслов, ЖЭТФ **113**, 1460 (1998).

27. И. М. Суслов, УФН **168**, 503 (1998).

28. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980), гл. 7, разд. 5.

29. I. M. Suslov, E-print archives, cond-mat/0105325, cond-mat/0106357.

30. M. Schreiber and H. Grussbach, Phys. Rev. Lett. **67**, 607 (1991); A. Mildenberger, F. Evers, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. B **66**, 033109 (2002).