

О критических индексах для λ -перехода в жидком гелии

А. А. Погорелов, И. М. Суслов¹⁾,

Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН, 117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 мая 2007 г.

Использование нового метода суммирования расходящихся рядов позволяет существенно увеличить точность определения критических индексов из теоретико-полевой ренормгруппы. Значение индекса $\nu = 0.6700 \pm 0.0006$ для λ -перехода в жидком гелии находится в хорошем согласии с экспериментом, но противоречит последним теоретическим результатам, основанным на использовании высокотемпературных рядов, методе Монте-Карло и их синтезе.

PACS: 11.10Kk, 11.15.Pg, 11.15.Me, 64.60.Fr, 75.10.Nk

Критические показатели для λ -перехода в жидком гелии He^4 являются наиболее точно измеренными из всех критических индексов. Измерение плотности сверхтекучей компоненты $\rho_s \sim \tau^\zeta$ (τ – расстояние до перехода) в экспериментах по второму звуку позволило определить (ввиду соотношения $\zeta = (d-2)\nu$, d – размерность пространства) критический индекс ν корреляционного радиуса

$$\nu = 0.6705 \pm 0.0006 \quad [1]. \quad (1)$$

Еще более точными оказались измерения показателя теплоемкости α , выполненные в космосе [2–4] во избежание размывтия перехода за счет силы тяжести (давление столба гелия в 1 см сдвигает переход на 10^{-6} K):

$$\begin{aligned} \alpha &= -0.01285 \pm 0.00038 \quad [2], \\ \alpha &= -0.01056 \pm 0.00038 \quad [3], \\ \alpha &= -0.0127 \pm 0.0003 \quad [4] \end{aligned} \quad (2)$$

(различие значений связано с неоднозначностью интерпретации). Результаты (1) и (2) могут быть сопоставлены друг с другом ввиду скейлингового соотношения $\alpha = 2 - d\nu$ (рис.1). Они оказываются в хорошем согласии с предсказаниями теоретико-полевой ренормгруппы, которые были сделаны около 30 лет назад и долгое время оставались рекордными: $\nu = 0.669 \pm 0.003$ [5], $\nu = 0.6695 \pm 0.0020$ [6] (недавнее уточнение дает $\nu = 0.6703 \pm 0.0015$ [7]). Более точная подстройка к экспериментальным значениям дается вариационной теорией возмущений [8–11], основанной на той же информации. Интрига последних лет состоит в том, что теоретические предсказания, основанные на использовании высокотемпературных рядов [12], методе Монте-Карло [13, 14] и их синтезе

[15, 16], постепенно уточняясь, стали группироваться в области более высоких значений ν и в конце концов вступили в противоречие с экспериментом (рис.1). Стали высказываться мнения о неудовлетворительности экспериментальных результатов и необходимости дальнейших исследований [16].

По утверждению работы [16], точность теоретико-полевого подхода не позволяет отдать предпочтение эксперименту [1–4] или новым теоретическим результатам [14–16]. Настоящая работа имеет целью оспорить это утверждение: использование нового алгоритма суммирования расходящихся рядов [17–19] позволяет уточнить предсказания теоретико-полевой ренормгруппы и однозначно разрешить противоречие в пользу эксперимента (рис.1).

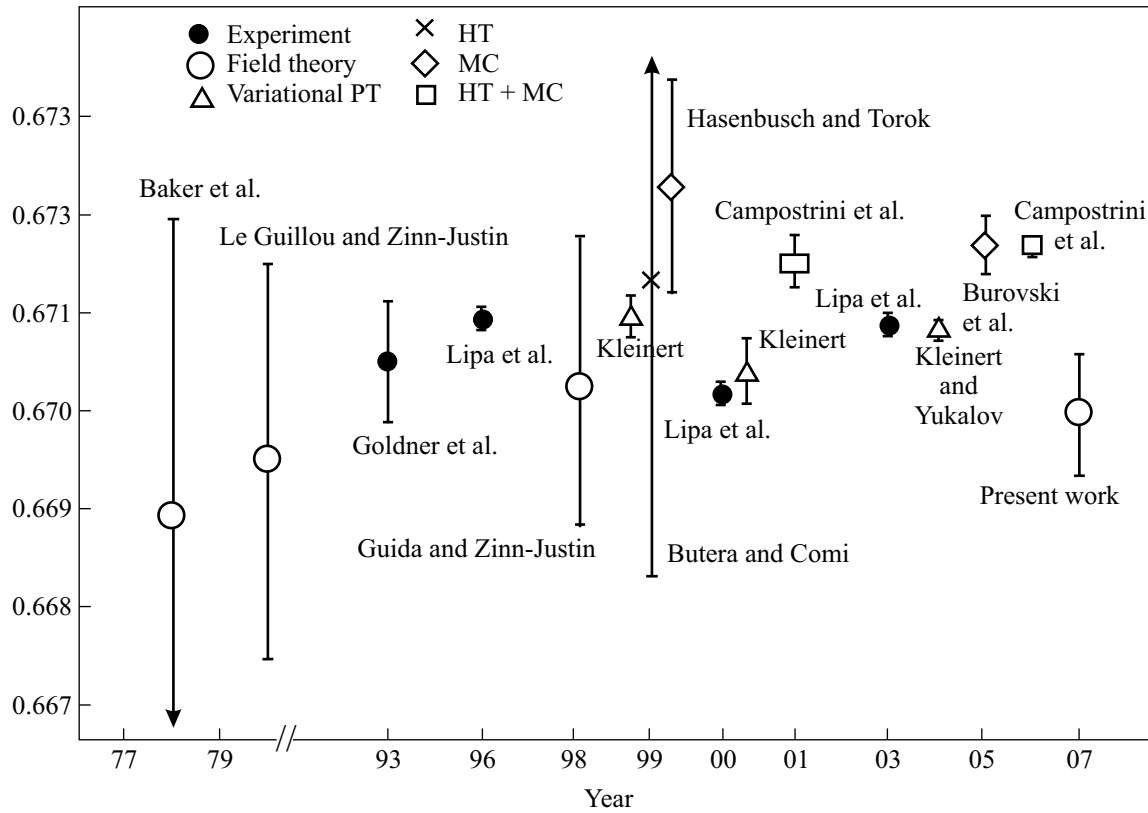
Исходной информацией являются первые 7 коэффициентов разложения ренормгрупповых функций $\beta(g)$, $\eta(g)$, $\eta_2(g)$ [5, 7] и их асимптотики высоких порядков [20], вычисленные методом Липатова [21]:

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -g + g^2 - 0.402962963g^3 + 0.314916942g^4 - \\ &\quad - 0.31792848g^5 + 0.3911025g^6 - 0.552449g^7 + \\ &\quad \dots + ca^N \Gamma(N+b)g^N + \dots, \\ \eta(g) &= (8/675)g^2 + 0.0009873600g^3 + 0.0018368107g^4 - \\ &\quad - 0.0005863264g^5 + 0.0012513930g^6 - 0.001395129g^7 + \\ &\quad \dots + c'a^N \Gamma(N+b')g^N + \dots, \\ \eta_2(g) &= -(2/5)g + (2/25)g^2 - 0.0495134446g^3 + \\ &\quad + 0.0407881055g^4 - 0.0437619509g^5 + 0.0555575703g^6 \\ &\quad - 0.08041336g^7 + \dots + c''a^N \Gamma(N+b'')g^N + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a &= 0.132996798, \quad b = b' + 1 = 5, \\ c &= 0.016302, \quad c' = 0.0008798, \quad c'' = 0.0030836. \end{aligned} \quad (4)$$

¹⁾e-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Рис.1. Экспериментальные и теоретические результаты для индекса ν

Согласно формализму теоретико-полевой ренорм-группы, нужно найти нетривиальный корень g^* уравнения $\beta(g) = 0$, определяющего неподвижную точку, после чего критические индексы η и ν , а также индекс ω поправки к скейлингу определяются выражениями

$$\eta = \eta(g^*), \quad \nu^{-1} = 2 - \eta(g^*) + \eta_2(g^*), \quad \omega = \beta'(g^*). \quad (5)$$

Процедура суммирования основана на том, что ряд

$$W(g) = \sum_{N=N_0}^{\infty} W_N(-g)^N \quad (6)$$

с асимптотикой коэффициентов $W_N^{as} = c a^N \Gamma(N + b)$ после преобразования Бореля

$$W(g) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{b_0-1} B(gx),$$

$$B(z) = \sum_{N=N_0}^{\infty} B_N(-z)^N, \quad B_N = \frac{W_N}{\Gamma(N + b_0)} \quad (7)$$

(b_0 – произвольный параметр) и конформного преобразования²⁾ $z = u/(1-u)a$ сводится к сходящемуся ряду по степеням u с коэффициентами

$$U_0 = B_0, \quad U_N = \sum_{K=1}^N \frac{B_K}{a^K} (-1)^K C_{N-1}^{K-1} \quad (N \geq 1), \quad (8)$$

асимптотика которых при $N \rightarrow \infty$

$$U_N = U_{\infty} N^{\alpha-1}, \quad U_{\infty} = \frac{W_{\infty}}{a^{\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(b_0 + \alpha)} \quad (9)$$

определяет асимптотику сильной связи для функции $W(g)$,

$$W(g) = W_{\infty} g^{\alpha} \quad (g \rightarrow \infty). \quad (10)$$

При $N \lesssim 40$ коэффициенты U_N вычисляются по формуле (8), а затем продолжают по степенному закону (9) во избежание катастрофического роста ошибок [17]. Тем самым известны все коэффициенты сходящегося ряда, что позволяет просуммировать его в

²⁾ Это конформное преобразование отлично от использованного в [6, 7]; его преимущество состоит в том, что рост случайных ошибок в коэффициентах U_N (8) является существенно более медленным, тогда как относительно гладких ошибок алгоритм вообще устойчив [17].

принципе с произвольной точностью. Это полностью снимает проблему зависимости результатов от вариации процедуры суммирования, которая является главным недостатком общепринятых методов. Остается лишь зависимость от способа интерполяции коэффициентной функции, которая имеет прямой физический смысл и связана с неполнотой исходной информации. Интерполяция производится для приведенной коэффициентной функции³⁾

$$F_N = \frac{W_N}{W_N^{as}} = 1 + \frac{A_1}{N - \tilde{N}} + \dots + \frac{A_K}{(N - \tilde{N})^K} + \dots \quad (11)$$

путем обрыва ряда и выбора коэффициентов A_K из соответствия с известными значениями коэффициентов $W_{L_0}, W_{L_0+1}, \dots, W_L$; параметризация асимптотики принимается в оптимальной форме $W_N^{as} = ca^N N^{b-1/2} \Gamma(N+1/2)$ [17], а параметр \tilde{N} используется для анализа неопределенности результатов. Значение L_0 не всегда совпадает с N_0 в (6); дело в том, что коэффициентная функция W_N , продолженная в комплексную плоскость, имеет особенность в точке $N = \alpha$, где α – показатель асимптотики сильной связи (10) [17]. Если α оказывается больше, чем N_0 , то интерполяция с использованием всех коэффициентов оказывается незаконной: нужно полагать

$$W(g) = W_{N_0} g^{N_0} + \dots + W_{N_1} g^{N_1} + \tilde{W}(g), \quad N_1 = [\alpha], \quad (12)$$

и суммировать ряд для $\tilde{W}(g)$, после чего добавить вклад выделенных членов; тем самым для L_0 выбирается значение $[\alpha] + 1$, где $[\dots]$ – целая часть числа. Как показал анализ двумерного случая [22], α оказывается больше, чем N_0 , практически для всех функций.

В соответствии с установившейся традицией, кроме рядов для функций $\beta(g), \eta(g), \eta_2(g)$, мы суммировали также ряды для $\nu^{-1}(g) = 2 + \eta_2(g) - \eta(g)$ и $\gamma^{-1}(g) = 1 - \eta_2(g)/(2 - \eta(g))$ с целью проверки результатов на самосогласованность. Следуя [22], мы считали допустимыми те интерполяционные кривые, которые гладко проходили через известные точки, не имея существенных выбросов при нецелых N , и достаточно быстро выходили на асимптотику при больших N .

Функция $\beta(g)$. Для функции $\beta(g)$ все интерполяции с $L_0 = 1$ оказались неудовлетворительными: интерполяционные кривые, имеющие быстрый выход на асимптотику, имели резкий выброс в интервале

$1 < N < 2$, указывая на наличие в нем сингулярности. При $L_0 = 2$ оценка асимптотики сильной связи (рис.2а) дает $\alpha \approx 1$, подтверждая наличие сингулярности при $N \approx 1$ и указывая, что выбор значения $L_0 = 2$ является правильным. Интерполяционные кривые с $\tilde{N} < -1.0$ имели существенную немонотонность при больших N , а кривые с $\tilde{N} > 1.4$ – выброс в интервале $2 < N < 3$ (рис.2б); тем самым “естественные” интерполяции соответствуют интервалу $-1.0 < \tilde{N} < 1.4$. Результаты суммирования показаны на вставке к рис.2б; из них ясно, что

$$g^* = 1.406 \div 1.410, \quad \omega = 0.774 \div 0.783. \quad (13)$$

Значение g^* согласуется с результатами ранних работ ($g^* = 1.406 \pm 0.005$ [5], $g^* = 1.406 \pm 0.004$ [6]) и указывает на сомнительность более позднего пересмотра, проведенного в [7] ($g^* = 1.403 \pm 0.003$).⁴⁾

Функция $\eta(g)$. Согласно (3), разложение для $\eta(g)$ начинается с g^2 . Удовлетворительных интерполяций с $L_0 = 2$ найти не удалось: кривые с быстрым выходом на асимптотику имели выброс в интервале $2 < N < 3$, указывая, что значение показателя α лежит в том же интервале. Действительно, оценка асимптотики сильной связи при $L_0 = 3$ дает (рис.3а):

$$\tilde{\alpha} = 2.00 \pm 0.02, \quad \tilde{W}_\infty = 0.44 \pm 0.06. \quad (14)$$

Удовлетворительные интерполяционные кривые (рис.3б) имеются лишь в узком интервале $1.6 < \tilde{N} < 2.3$; их можно было бы считать дефектными из-за наличия выброса при $3 < N < 4$, однако в двумерном случае кривые именно такого вида обеспечивают точное значение η [22]. Фактически такие интерполяции являются вполне допустимыми, так как осцилляции коэффициентной функции имеют амплитуду того же масштаба, что и осцилляции известных коэффициентов. Результаты суммирования представлены на вставке к рис.3б.

Функции $\eta_2(g), \nu^{-1}(g)$ и $\gamma^{-1}(g)$. Интерполяционные кривые с $L_0 = 1$ оказались дефектными, имея выбросы при $1 < N < 2$. Для функции $\nu^{-1}(g)$ дефектными оказались и кривые с $L_0 = 2$, обнаруживая выбросы при $2 < N < 3$. Анализ асимптотики сильной связи при $L_0 = 2$ дал результаты $\tilde{\alpha} = 0.63 \pm 0.2$ для $\eta_2(g)$ и $\tilde{\alpha} = 0.40 \pm 0.22$ для $\gamma^{-1}(g)$; для функции $\nu^{-1}(g)$ при $L_0 = 3$ (рис.4а) имеем

$$\tilde{\alpha} = 2.00 \pm 0.02, \quad \tilde{W}_\infty = 0.3 \pm 0.2. \quad (15)$$

³⁾ Поправки к асимптотике Липатова имеют вид регулярно разложения по $1/N$ и после пересуммирования приводятся к виду (11).

⁴⁾ Заметим, что результаты для g^* в работах [5–7] основаны на одной и той же информации.

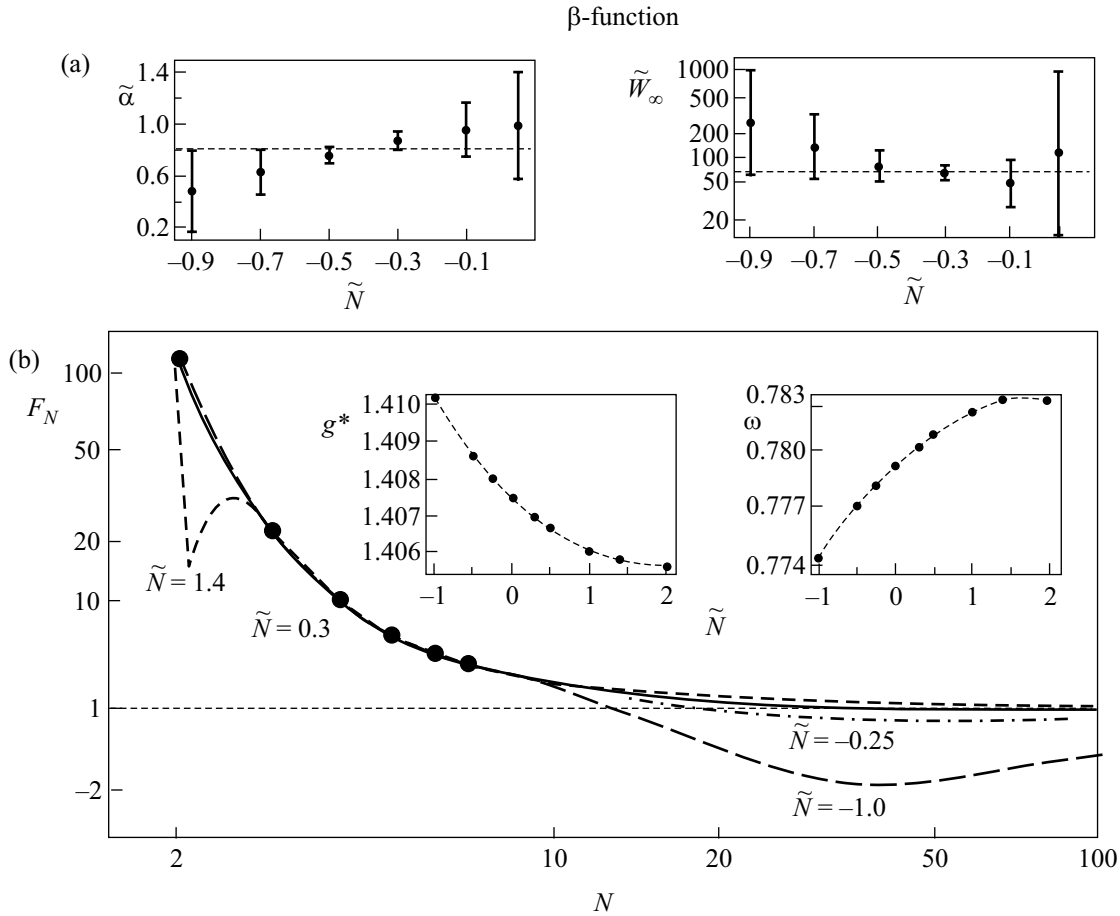


Рис. 2. (а) Параметры асимптотики сильной связи для функции $\beta(g)$ (рабочий интервал $21 < N < 40$); неопределенность результатов определялась по методике работы [17], но коридор ошибок несколько расширен. (б) Интерполяционные кривые для коэффициентов разложения $\beta(g)$ и результаты суммирования для g^* и ω (логарифмический масштаб для $F_N + 5$)

С учетом выделенных в (12) членов имеем при больших g

$$\begin{aligned} \nu^{-1}(g) &\approx -(0.3 \pm 0.2)g^2, & \eta_2(g) &\approx -0.4g, \\ \gamma^{-1}(g) &\approx -0.2g, & \eta(g) &\approx (0.45 \pm 0.06)g^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Соотношение $\nu^{-1}(g) = 2 + \eta_2(g) - \eta(g)$ выполняется для асимптотик в пределах точности. Соотношение же $\gamma^{-1}(g) = 1 + \eta_2(g)/(2 - \eta(g))$ выполнено лишь в пренебрежении функцией $\eta(g)$; последняя имеет малые коэффициенты разложения и мала в области $g \lesssim 10$, но имеет более быструю асимптотику сильной связи. Поэтому следует ожидать, что $\gamma^{-1}(g)$ и $\eta_2(g)$ сначала линейно растут до достаточно больших g (что принимается нами за истинную асимптотику при приближенном анализе), после чего их поведение искажается за счет функции $\eta(g)$. Функция $\gamma^{-1}(g)$ либо начинает убывать (если поведение $\eta_2(g) \sim g$ сохраняется), либо выходит на константу (если $\eta_2(g)$ содержит в

асимптотике вклад $\sim g^2$). Так или иначе, коэффициентная функция для $\gamma^{-1}(g)$ регулярна при $N \geq 1$, но содержит размытую сингулярность при $N \approx 1$; поэтому суммирование ряда для $\gamma^{-1}(g)$ проводилось при $L_0 = 1$, но без ограничения выброса при нецелых N . Суммирование для $\eta_2(g)$ (так же как и для $\nu^{-1}(g)$) проводилось при $L_0 = 3$, чтобы принять во внимание возможную сингулярность при $N \approx 2$.⁵⁾ Допустимые интерполяции и результаты суммирования для них показаны на рис.4б–д.

Наибольший интерес представляет результат для индекса ν ,

$$\nu = 0.6700 \pm 0.0006, \quad (17)$$

который получается непосредственным суммированием ряда для $\nu^{-1}(g)$ и может быть сопоставлен (см.

⁵⁾ Суммирование ряда для $\eta_2(g)$ при $L_0 = 2$ дает $\eta_2 = -0.4744(7)$, то есть тот же результат, что на рис.4с, но с меньшей погрешностью.

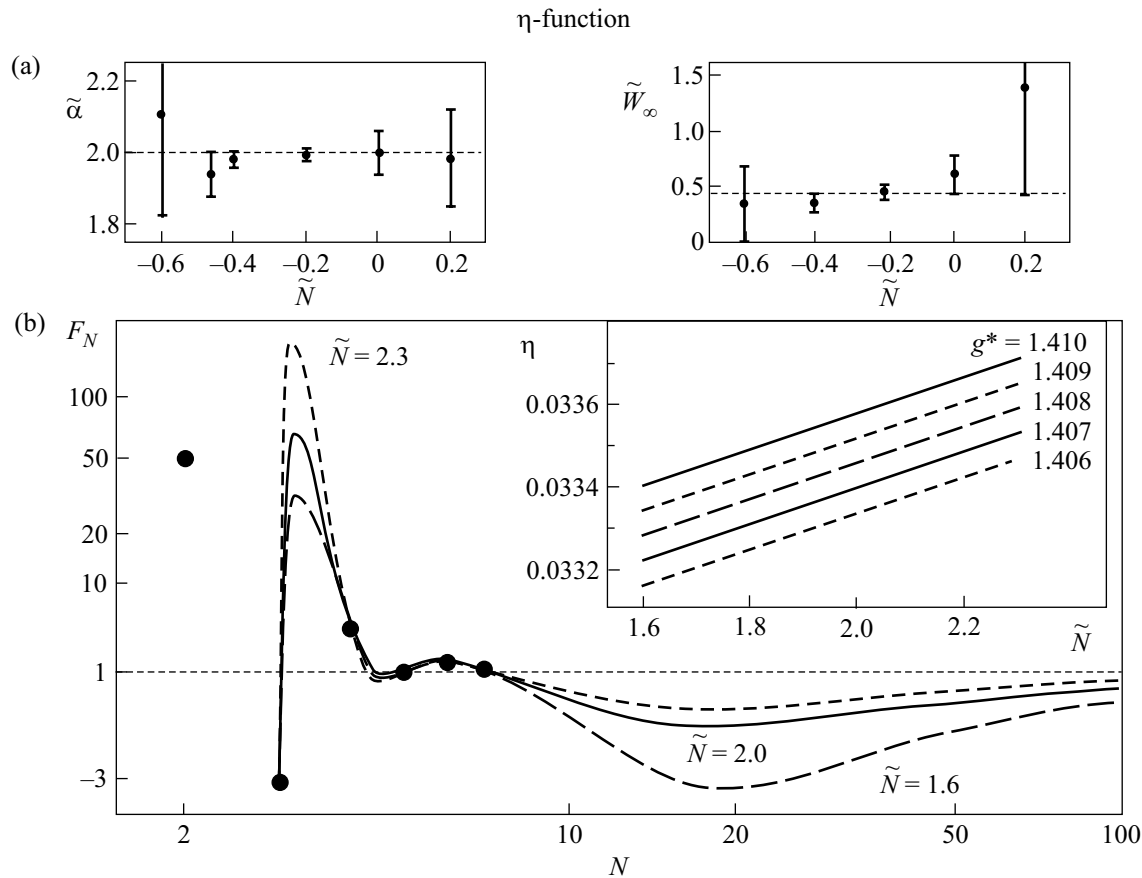


Рис.3. (а) Параметры асимптотики сильной связи для функции $\eta(g)$ (рабочий интервал $23 < N < 40$). (б) Допустимые интерполяции для функции $\eta(g)$ и результаты суммирования при $g = g^*$

табл.1) с результатами суммирования других рядов⁶⁾ в силу соотношений $\nu = \gamma(2 - \eta)$, $\nu^{-1} = 2 + \eta_2 - \eta$ и $\nu = (1 - \gamma)/\eta_2$. Из табл.1 ясно, что результат (17) практически совпадает с объединением второй и третьей оценок (несколько более точных) и содержится в четвертой оценке (существенно менее точной и в дальнейшем не учитываемой). Относительный сдвиг центральных значений для первых трех оценок можно считать оценкой масштаба систематической ошибки

$$\delta_{\text{sys}} \approx 0.0002, \quad (18)$$

связанной с тем, что “естественные” интерполяции для различных взаимозависимых функций не являются вполне согласованными. В двумерном случае [22] этот эффект является главным источником ошиб-

ки: аналогичная оценка дает $\delta_{\text{sys}} \approx 0.05$, что превышает естественную погрешность суммирования для большинства функций. Согласно табл.1, центральное значение (17) является хорошо сбалансированным относительно первых трех оценок, поэтому мы считаем возможным не добавлять δ_{sys} к его неопределенности и помещаем на рис.1 в неизменном виде. Дополнительный аргумент состоит в том, что в двумерном случае [22] индекс ν практически не подвержен влиянию систематических ошибок.

Таблица 1

Различные оценки для индекса ν

Series	Interval for ν	Central value
$\nu^{-1}(g)$	$0.6694 \div 0.6706$	0.6700
$\gamma^{-1}(g), \eta(g)$	$0.6693 \div 0.6702$	0.6698
$\eta_2(g), \eta(g)$	$0.6698 \div 0.6707$	0.6702
$\gamma^{-1}(g), \eta_2(g)$	$0.6654 \div 0.6710$	0.6682

Из рис.1 ясно, что результат (17) уверенно перекрывает как центральное значение для земного экс-

⁶⁾ Из $1/n$ -разложения следует, что функции $\nu^{-1}(g)$ и $\gamma^{-1}(g)$ имеют корень при $g \sim 1$; соответствующие особенности в $\nu(g)$ и $\gamma(g)$ приводят к тому, что ряды для них имеют осциллирующие коэффициенты и малоприспособлены для суммирования. По той же причине мы не пытаемся суммировать ряд для $\alpha(g) = 2 - d\nu(g)$.

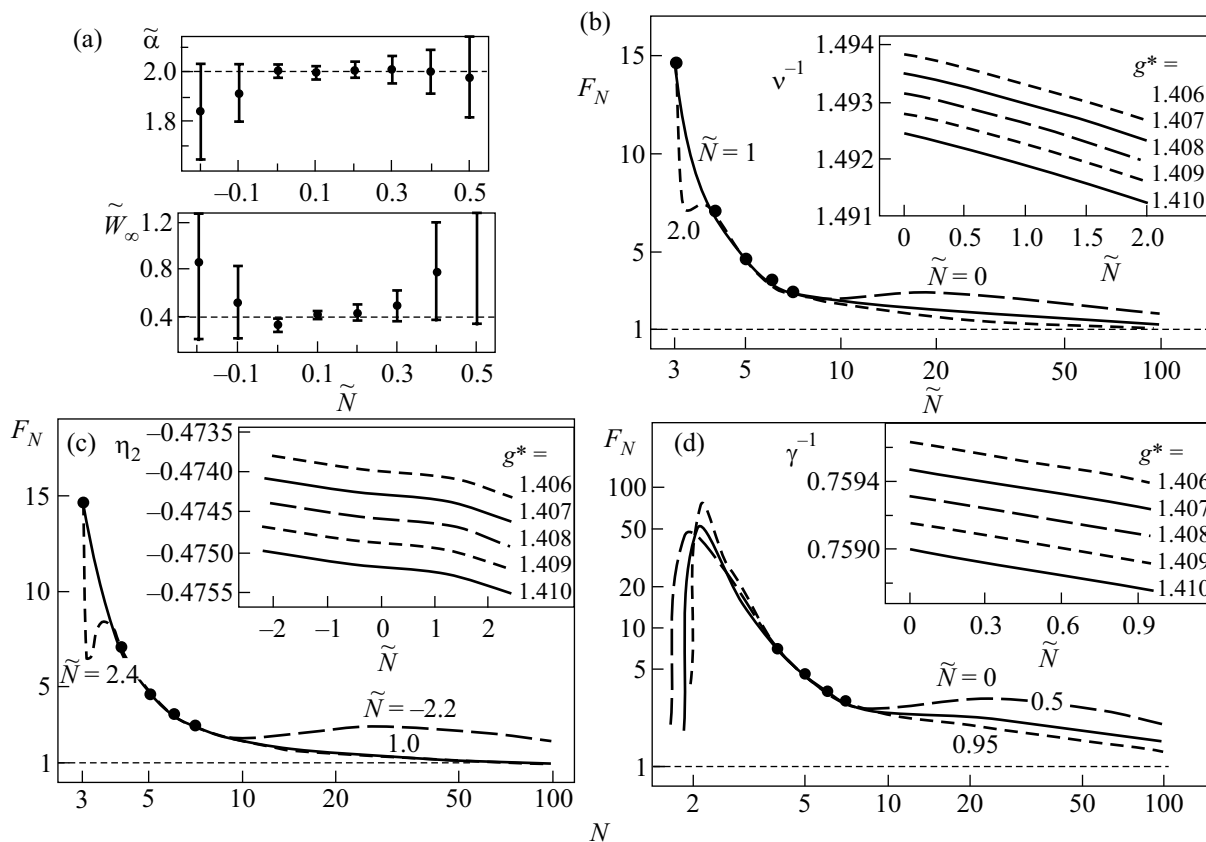


Рис.4. (а) Параметры асимптотики сильной связи для функции $\nu^{-1}(g)$ (рабочий интервал $20 < N < 40$). (б), (с), (д) Интерполяционные кривые для функций $\nu^{-1}(g)$, $\eta^{(2)}(g)$ ($L_0 = 3$) и $\gamma^{-1}(g)$ ($L_0 = 1$). На вставках – результаты суммирования при $g = g^*$

перимента [1], так и средний уровень, вокруг которого колеблется космический эксперимент [2–4]. Верхняя граница (17) несколько не доходит до наиболее позднего из экспериментальных значений ($\nu = 0.6709(1)$ [4]), но различие находится на уровне оцениваемой систематической ошибки (18) и не может считаться существенным. Согласие можно легко обеспечить, если несколько расширить множество допустимых интерполяций или использовать более сложные интерполяционные процедуры (см., например, [22]). Тем не менее, естественные результаты суммирования тяготеют к нижней границе экспериментальных значений: например, если на рис.2б ограничиться наиболее гладкими интерполяциями с $-0.25 < \tilde{N} < 1.4$, то результат для g^* уточняется до 1.407 ± 0.001 , что приведет к понижению верхней оценки для ν до 0.6703. Напротив, более высокие значения ν , предложенные в работах [13–16], представляются маловероятными: для их получения нам потребовалось бы предположить совершенно неестественный вид коэффициентных функций. В связи с этим заметим (табл.2), что наше значение для ин-

декса γ вполне согласуется с результатом [17], тогда как наиболее резкое расхождение связано с индексом η ; но при суммировании функции $\eta(g)$ мы не имеем почти никакого произвола (рис.3б).⁷⁾ С другой стороны, результаты метода Монте–Карло не должны рассматриваться как результаты прямого численного “измерения”: они включают в себя сложную и неоднозначную процедуру обработки [17].

Нетрудно видеть, что наши результаты (табл.2) вполне согласуются с результатами классических работ [5–7], но имеют меньшую погрешность. Последнее связано с тем, что для использованных в [5–7]

⁷⁾ Отметим некоторые концептуальные различия в интерпретации ряда для $\eta(g)$. Хорошая точность в оценке асимптотики сильной связи (рис.3а) показывает, что функция $\eta(g)$ есть монотонно растущая регулярная функция. Это с неизбежностью означает, что осцилляции ее первых коэффициентов быстро затухают и не распространяются в область больших N . Интерполяция по отдельности значений для четных и нечетных N (см., например, [8]) предполагает, что осцилляции затухают степенным образом; это порождает экспоненциальный рост коэффициентов U_N и борелевского образа $B(z)$ и приводит к сингулярности $\eta(g)$ при $g \sim 1$.

Таблица 2

Результаты для критических индексов и их сопоставление с другими авторами (цифры в скобках указывают ошибку в единицах последнего знака)

	BNM [5]	LG-ZJ [6]	G-ZJ [7]	KI [8]	CHPV[16]	Present work
γ	1.316(9)	1.3160(25)	1.3169(20)	1.318	1.3178(2)	1.3172(8)
ν	0.669(3)	0.6695(20)	0.6703(15)	0.6710	0.6717(1)	0.6700(6)
η	0.032(15)	0.033(4)	0.0354(25)	0.0356(10)	0.0381(2)	0.0334(2)
η_2	-0.474(8)	-0.4740(25)				-0.4746(9)
ω	0.780(10)	0.780(25)	0.789(11)	0.800	0.785(20)	0.778(4)
g^*	1.406(5)	1.406(4)	1.403(3)		1.4032(7)	1.408(2)

алгоритмов имеется сильная зависимость результатов от вариации процедуры суммирования. Эта неопределенность практически не поддается анализу, и ее приходится ограничивать на основе полуэмпирических рецептов. В нашем подходе неопределенность результатов прямо связывается с неоднозначной интерполяцией коэффициентных функций, что делает оценку их погрешности совершенно прозрачной. Наиболее существенное уточнение произошло для индексов η и ω .

Несколько слов о соответствии с результатами вариационной теории возмущений [8–11], которая представляет собой некоторую интерполяционную схему, не имеющую глубокого смысла. Высокая точность результатов, которая в ней иногда декларируется, связана лишь с тем, что конкретной интерполяционной процедуре отдается большее предпочтение, чем ее многочисленным вариациям. Реальную неопределенность результатов можно увидеть из сопоставления различных оценок, приведенных в книге [11]. Более высокие значения ν в этой теории (см. рис.1 и табл.2), на наш взгляд, связаны с неточным значением индекса ω . Приведенная в [8, 11] формула

$$\nu = 0.6710 + 0.0553(\omega - 0.800)$$

при $\omega = 0.778$ дает $\nu = 0.6698$, что почти совпадает с нашим центральным значением и соответствует наиболее гладким интерполяционным кривым.

Из сказанного ясно, что результаты естественного суммирования рядов для ренормрупповых функций не указывают на желательность какого-либо систематического сдвига экспериментальных значений – достаточно их релаксации к некоторому среднему уровню, вокруг которого они колеблются. Поэтому мы считаем неоправданными высказывания работы [16] о ненадежности экспериментальных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 06-02-17541).

1. L. S. Goldner, N. Mulders, and G. Ahlers, *J. Low Temp. Phys.* **93**, 131 (1993).
2. J. A. Lipa et al., *Phys. Rev. Lett.* **76**, 944 (1996).
3. J. A. Lipa et al., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4894 (2000), footnote 15.
4. J. A. Lipa et al., *Phys. Rev. B* **68**, 174518 (2003).
5. G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel, and D. I. Meiron, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1351 (1976); *Phys. Rev. B* **17**, 1365 (1978).
6. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 95 (1977); *Phys. Rev. B* **21**, 3976 (1980).
7. R. Guida and J. Zinn-Justin, *J. Phys. A* **31**, 8103 (1998).
8. H. Kleinert, *Phys. Rev. D* **60**, 085001 (1999).
9. H. Kleinert, *Phys. Lett. A* **277**, 205 (2000).
10. H. Kleinert and V.I.Yukalov, cond-mat/0402163.
11. H. Kleinert and V.Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 Theories*, World Scientific, Singapore, 2001.
12. P. Butera and M. Comi, *Phys. Rev. B* **60**, 6749 (1999).
13. M. Hasenbusch and T. Török, *J. Phys. A* **32**, 6361 (1999).
14. E. Burovski et al., cond-mat/0507352.
15. M. Campostrini et al., *Phys. Rev. B* **63**, 214503 (2001).
16. M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, and E. Vicari, *Phys. Rev. B* **74**, 144506 (2006).
17. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **120**, 5 (2001).
18. И. М. Суслов, *Письма в ЖЭТФ* **71**, 315 (2000); **74**, 211 (2001); **76**, 387 (2002).
19. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **127**, 1350 (2005).
20. E. Brezin and G. Parisi, *J. Stat. Phys.* **19**, 269 (1978).
21. Л. Н. Липатов, *ЖЭТФ* **72**, 411 (1977).
22. А. А. Погорелов, И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **132** (2007), в печати.