

# РЕНОРМГРУППОВЫЕ ФУНКЦИИ ТЕОРИИ $\varphi^4$ ИЗ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

И. М. Суслов\*

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 июня 2010 г.

Ранее показано, что вычисление ренормгрупповых функций скалярной теории  $\varphi^4$  сводится к исследованию термодинамических свойств модели Изинга. Используя высокотемпературные разложения для последней, ренормгрупповые функции четырехмерной теории можно вычислить при произвольных значениях константы связи  $g$  с точностью  $10^{-4}$  для функции Гелл-Манна–Лоу  $\beta(g)$  и точностью  $10^{-3}$ – $10^{-2}$  для аномальных размерностей. Получены разложения ренормгрупповых функций до 13-го порядка по степеням  $g^{-1/2}$ .

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Как показано в недавних работах автора [1, 2], функцию Гелл-Манна–Лоу  $\beta(g)$  и аномальные размерности теории  $\varphi^4$  можно выразить через функциональные интегралы, что приводит к параметрическому представлению вида

$$g = F(g_0, m_0, \Lambda), \quad \beta(g) = F_1(g_0, m_0, \Lambda), \quad (1)$$

где  $g_0$  и  $m_0$  — затравочные заряд и масса,  $\Lambda$  — параметр обрезания по импульсу,  $g$  — перенормированный заряд. Большие значения  $g$  достигаются лишь вблизи нуля одного из функциональных интегралов, где правые части уравнений (1) сильно упрощаются и параметрическое представление разрешается в явном виде, позволяя получить аналитические асимптотики  $\beta$ -функции и аномальных размерностей. Аналогичная программа может быть реализована и в квантовой электродинамике [3].

В целом же параметрическое представление (1) устроено следующим образом. Если выразить  $g_0$  через  $g$  с помощью первого уравнения (1) и подставить во второе уравнение, то зависимость от  $m_0$  и  $\Lambda$  исчезает согласно общим теоремам [4], так что  $\beta$ -функция зависит только от  $g$ . Однако при практических вычислениях это свойство автоматически не выполняется. Дело в том, что в общих теоремах предполагается взятый континуальный предел

$\Lambda \rightarrow \infty$ , что физически означает выполнение условия

$$m \ll \Lambda \quad \text{или} \quad \xi \gg a, \quad (2)$$

где  $m$  — перенормированная масса,  $\xi$  — корреляционный радиус,  $a = \Lambda^{-1}$  — постоянная решетки, на которой предполагается определенным функциональный интеграл. При наложении условия (2) в области больших  $g_0$  функциональные интегралы скалярной теории  $\varphi^4$  сводятся к изинговским суммам, так что (1) принимает вид [2]

$$g = F(\kappa), \quad \beta(g) = F_1(\kappa) \quad (3)$$

и зависимость  $\beta$ -функции только от  $g$  становится очевидной; параметр  $\kappa$  играет роль обратной температуры в модели Изинга. Формально условие (2) соответствует  $-g_0^{-1}m_0^2/\Lambda^2 \gtrsim 1$ , но фактически сведение к модели Изинга возможно при более слабом условии

$$g_0 \gg 1, \quad -g_0^{-1/2}m_0^2/\Lambda^2 \gg 1, \quad (4)$$

$$-g_0^{-1}m_0^2/\Lambda^2 = \kappa \text{ — произвольно.}$$

Поэтому параметрическое представление (3) остается справедливым в области малых  $\kappa$ , где достигаются большие значения  $g$  и возможны градиентные разложения.

На первый взгляд, условие  $g_0 \gg 1$  соответствует режиму сильной связи и параметрическое представление (3) ограничено только им. Однако на си-

\*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

туацию можно взглянуть и с другой точки зрения. Усилим условия (4), перейдя к пределу

$$g_0 \rightarrow \infty, \quad -g_0^{-1/2} m_0^2 / \Lambda^2 \rightarrow \infty, \quad -g_0^{-1} m_0^2 / \Lambda^2 = \kappa = \text{const}. \quad (5)$$

Тогда переход от (1) к (3) не связан ни с какими приближениями и сохраняет строгую эквивалентность с исходной теорией  $\varphi^4$  при определенном выборе ее затравочных параметров; последнее обеспечивает сохранение формы лагранжиана при перенормировках. Предел  $g_0 \rightarrow \infty$  не означает такого же предела для перенормированного заряда  $g$ ; фактически градиентные разложения позволяют утверждать, что  $g$  меняется от бесконечности до единицы при изменении  $\kappa$  от нуля до значений порядка единицы. Поскольку параметрическое представление (3) является точным и определяет  $\beta$ -функцию на интервале  $1 \lesssim g < \infty$ , его можно аналитически продолжить и считать определением  $\beta(g)$  при произвольных  $g$ . Но приведет ли такое определение к правильным результатам в области слабой связи?

Ответ на этот вопрос может быть получен с помощью высокотемпературных рядов [5]. Такие ряды традиционно строятся для величин  $\chi_2, \mu_2, \chi_4$  (см. разд. 2), которые полностью определяют правые части уравнений (3). Формально высокотемпературные разложения справедливы для малых  $\kappa$ , но их сравнительно большая длина (до 30 членов в ряде случаев) позволяет успешно исследовать окрестность точки фазового перехода  $\kappa_c$ , приводя к результатам, сопоставимыми с другими методами. Поэтому фактически хорошие приближения для указанных величин могут быть получены во всем интервале  $0 \leq \kappa \leq \kappa_c$ . Подстановка таких результатов в правые части (3) позволяет найти ренормгрупповые (РГ) функции в интервале  $g^* \leq g < \infty$ , где  $g^*$  — неподвижная точка ренормгруппы. В четырехмерном случае  $g^* = 0$  и указанная процедура полностью определяет РГ-функции.

Имеется много работ [6–16], в которых высокотемпературные ряды использовались для проверки логарифмических поправок к скейлингу [17]. Фактически уже эти работы позволяют дать положительный ответ на поставленный выше вопрос: параметрическое представление (3) дает правильные результаты в области слабой связи. Поэтому основная цель настоящей работы состоит в построении РГ-функций четырехмерной теории  $\varphi^4$  при произвольных  $g$ : это может быть сделано с точностью  $10^{-4}$  для  $\beta$ -функции и несколько хуже для аномальных размерностей.

Определение вычисляемых РГ-функций подразумевает использование решеточной регуляризации, отличной от обычно используемых регуляризаций Паули–Вилларса, изотропного обрезания в импульсном пространстве, размерной регуляризации и т.д. Однако  $\beta$ -функция в используемой схеме определяется через наблюдаемые заряд и массу [1, 2] и не должна зависеть от способа обрезания. Для аномальных размерностей такая зависимость возможна, так как они определяются через ненаблюдаемые  $Z$ -факторы. Так или иначе, настоящий способ регуляризации отличается от обычно используемых не более, чем последние друг от друга.

## 2. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим  $n$ -компонентную теорию  $\varphi^4$  с действием

$$S\{\varphi\} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n (\nabla \varphi_\alpha)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha^2 + \frac{1}{8} u_0 \left( \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha^2 \right)^2 \right\}, \quad u_0 = g_0 \Lambda^\epsilon, \quad \epsilon = 4 - d, \quad (6)$$

где  $g_0$  и  $m_0$  — затравочные заряд и масса,  $d$  — размерность пространства,  $\Lambda$  — параметр обрезания по импульсу. Наиболее общий функциональный интеграл этой теории содержит в предэкспоненте  $M$  множителей поля  $\varphi$ ,

$$Z_{\alpha_1 \dots \alpha_M}^{(M)}(x_1, \dots, x_M) = \int D\varphi \varphi_{\alpha_1}(x_1) \varphi_{\alpha_2}(x_2) \dots \dots \varphi_{\alpha_M}(x_M) \exp(-S\{\varphi\}), \quad (7)$$

и будет обозначаться как  $K_M\{p_i\}$  после перехода в импульсное представление и выделения  $\delta$ -образных множителей,

$$Z_{\alpha_1 \dots \alpha_M}^{(M)}(p_1, \dots, p_M) = K_M\{p_i\} \mathcal{N} \delta_{p_1 + \dots + p_M} I_{\alpha_1 \dots \alpha_M}, \quad (8)$$

где  $I_{\alpha_1 \dots \alpha_M}$  есть сумма членов типа  $\delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} \dots$  со всевозможными спариваниями,  $\mathcal{N}$  — число узлов решетки, на которой предполагается определенным функциональный интеграл. Интегралы  $K_M\{p_i\}$ , как правило, оцениваются при нулевых импульсах и лишь один интеграл  $K_2(p)$  потребуется при малых  $p$ ,

$$K_2(p) = K_2 - \tilde{K}_2 p^2 + \dots \quad (9)$$

В дальнейшем рассматриваем случай  $d = 4, n = 1$ , но общие формулы выписываем для произвольных  $d$  и  $n$ .

Ниже рассматриваются РГ-функции  $\beta(g), \eta(g), \eta_2(g)$ , входящие в уравнение Каллана–Симанчика [4]

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln m} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \left( L - \frac{N}{2} \right) \eta(g) - L \eta_2(g) \right] \times \Gamma^{(L,N)} = 0, \quad (10)$$

для вершины  $\Gamma^{(L,N)}$  с  $N$  внешними линиями поля  $\varphi$  и  $L$  внешними линиями взаимодействия. Выражение этих функций через функциональные интегралы приводит к параметрическому представлению [2]

$$g = - \left( \frac{K_2}{\tilde{K}_2} \right)^{d/2} \frac{K_4 K_0}{K_2^2}, \quad (11)$$

$$\beta(g) = - \left( \frac{K_2}{\tilde{K}_2} \right)^{d/2} \times \frac{K_4 K_0}{K_2^2} \left\{ d + 2 \frac{(\ln K_4 K_0 / K_2^2)'}{(\ln K_2 / \tilde{K}_2)'} \right\}, \quad (12)$$

$$\eta(g) = 2 \frac{(\ln K_2 / K_0)' + (\ln K_2 / \tilde{K}_2)',}{(\ln K_2 / \tilde{K}_2)',} \quad (13)$$

$$\eta_2(g) = -2 \frac{(\ln K_0 / K_2)'' + [(\ln K_0 / K_2)']^2}{(\ln K_2 / \tilde{K}_2)' (\ln K_0 / K_2)',} \quad (14)$$

где штрихами отмечаются производные по  $m_0^2$ . При условии (4) функциональный интеграл скалярной теории может быть записан в виде [2]

$$Z_M\{\mathbf{x}_i\} = (2\kappa)^{\frac{N+M}{2}} \int \left( \prod_{\mathbf{x}} d\varphi_{\mathbf{x}} \right) \varphi_{\mathbf{x}_1} \dots \varphi_{\mathbf{x}_M} \times \exp \left\{ -\kappa \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'} \right\} \prod_{\mathbf{x}} \delta(\varphi_{\mathbf{x}}^2 - 1) \quad (15)$$

и превращается в изинговскую сумму по значениям  $\varphi_{\mathbf{x}} = \pm 1$ .

Теперь введем величины, изучаемые в высокотемпературных разложениях,

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \sum_{\mathbf{x}} \langle \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_0 \rangle^c, & \mu_2 &= \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^2 \langle \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_0 \rangle^c, \\ \chi_4 &= \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}} \langle \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{y}} \varphi_{\mathbf{z}} \varphi_0 \rangle^c \end{aligned} \quad (16)$$

(индекс «с» отмечает связные диаграммы), которые с точностью до множителей совпадают с отношениями  $K_2/K_0, \tilde{K}_2/K_0, K_4/K_0$  введенных выше функциональных интегралов; более точно

$$\begin{aligned} \frac{K_2}{\tilde{K}_2} &= 2d \frac{\chi_2}{\mu_2} \equiv \frac{1}{\kappa} f_0(\kappa), \\ \frac{K_2}{K_0} &= 2\kappa \chi_2 \equiv \kappa f_2(\kappa), \\ \frac{K_4 K_0}{K_2^2} &= \frac{1}{3} \frac{\chi_4}{\chi_2^2} \equiv -f_4(\kappa), \end{aligned} \quad (17)$$

где мы ввели определения функций  $f_i(\kappa)$ , которые будут использоваться в дальнейшем. При этом учтено, что в разложении  $\mu_2$  по  $\kappa$  нулевой член отсутствует (см. ниже (20)), так что все функции  $f_i(\kappa)$  регулярны, а их разложение начинается с нулевого члена. Подстановка (17) в (11)–(14) дает

$$\begin{aligned} g &= \left( \frac{f_0(\kappa)}{\kappa} \right)^{d/2} f_4(\kappa), \\ \frac{\beta(g)}{g} &= d - 2\kappa \frac{[\ln f_4(\kappa)]'}{1 - \kappa [\ln f_0(\kappa)]'}, \\ \eta(g) &= -2\kappa \frac{[\ln f_0(\kappa) f_2(\kappa)]'}{1 - \kappa [\ln f_0(\kappa)]'}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\eta_2(g) = -2 \frac{(1 + \kappa [\ln f_2(\kappa)]')^2 + 1 - \kappa^2 [\ln f_2(\kappa)]''}{(1 - \kappa [\ln f_0(\kappa)]') (1 + \kappa [\ln f_2(\kappa)]')}.$$

В пределе  $\kappa \rightarrow 0$  легко получить асимптотики РГ-функций [2]

$$\beta(g) = dg, \quad \eta(g) = 0, \quad \eta_2(g) = -4 \quad (g \rightarrow \infty). \quad (19)$$

Для простой гиперкубической решетки со взаимодействием ближайших соседей первые члены разложения функций (16) при  $d = 4, n = 1$  имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \chi_2 &= 1 + 16\kappa + 224\kappa^2 + \dots, \\ \mu_2 &= 16\kappa + 512\kappa^2 + 33920/3\kappa^3 + \dots, \\ \chi_4 &= -2 - 128\kappa - 4672\kappa^2 - \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Подстановка в (18) позволяет получить разложение РГ-функций по степеням  $g^{-2/d}$ , и в частности — более точную асимптотику для  $\eta(g)$ :

$$\eta(g) = \frac{16}{9} \frac{1}{g}, \quad g \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Универсальность этой асимптотики не проверялась, и строго говоря она относится к указанной модели. В дальнейшем используются 14 членов разложения (20), приведенные для  $n = 1$  в табл. 5, 8, 11 работы [18].

### 3. ОКРЕСТНОСТЬ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

#### 3.1. Общая стратегия

Применение высокотемпературных рядов к исследованию критического поведения основано на следующем. Пусть некоторая величина  $F(\kappa)$  имеет вблизи точки перехода  $\kappa_c = 1/T_c$  степенное поведение

$$F \propto (T - T_c)^{-\lambda} \propto (\kappa_c - \kappa)^{-\lambda}. \quad (22)$$

Тогда радиус сходимости разложения по  $\kappa$  ограничен величиной  $\kappa_c$ . В актуальных случаях  $\kappa_c$  оказывается ближайшей сингулярностью к началу координат, что облегчает ее исследование. Легко видеть, что для логарифмической производной

$$(\ln F)' = \frac{F'}{F} \sim \frac{-\lambda}{\kappa - \kappa_c} \quad (23)$$

ближайшая особенность является простым полюсом с вычетом  $-\lambda$  и может быть исследована с помощью паде-аппроксимации. Паде-аппроксиманта  $[M/N]$  определяется как отношение полиномов степени  $M$  и  $N$

$$(\ln F)' = \frac{P_M(\kappa)}{Q_N(\kappa)} = \frac{p_0 + p_1\kappa + \dots + p_M\kappa^M}{1 + q_1\kappa + \dots + q_N\kappa^N}, \quad (24)$$

коэффициенты которых подобраны так, чтобы воспроизводить первые  $M + N + 1$  коэффициентов разложения  $(\ln F)'$  по  $\kappa$ . Известно, что паде-аппроксиманты хорошо предсказывают ближайшие особенности аппроксимируемой функции, если последние являются простыми полюсами [5, 19]. Обычно используются диагональные ( $M = N$ ) или квазидиагональные ( $M \approx N$ ) аппроксиманты, для которых сходимость к соответствующей функции доказана при наиболее общих предположениях.

Использование этой стратегии в четырехмерном случае затрудняется существованием логарифмических поправок к скейлингу [4, 17]:

$$\begin{aligned} \chi_2 &\sim \tau^{-1} |\ln \tau|^p, & \xi^2 &\sim \frac{\mu_2}{\chi_2} \sim \tau^{-1} |\ln \tau|^p, \\ \chi_4 &\sim \tau^{-4} |\ln \tau|^{4p-1}, & p &= -\frac{\zeta_1}{\beta_2} = \frac{n+2}{n+8}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\tau \sim (\kappa_c - \kappa)$  — расстояние до перехода, а показатель  $p$  определяется первыми членами разложения РГ-функций:

$$\begin{aligned} \beta(g) &= \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \dots, \\ \eta(g) &= \delta_2 g^2 + \delta_3 g^3 + \dots, \\ \eta_2(g) &= \zeta_1 g + \zeta_2 g^2 + \dots, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_2 &= S_4 \frac{n+8}{2}, & \beta_3 &= -S_4^2 \frac{9n+42}{4}, \\ \delta_2 &= S_4^2 \frac{n+2}{8}, & \zeta_1 &= -S_4 \frac{n+2}{2} \end{aligned} \quad (27)$$

и  $S_4 = 1/8\pi^2$ . Для введенных функций  $f_i$  имеем из формул (25)

$$\begin{aligned} f_0 &\sim \tau |\ln \tau|^{-p}, & f_2 &\sim \tau^{-1} |\ln \tau|^p, \\ f_4 &\sim \tau^{-2} |\ln \tau|^{2p-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Отметим еще поведение заряда  $g$ ,

$$g = \frac{c_0}{|\ln \tau|}, \quad c_0 = \frac{2}{\beta_2} \quad (\tau \rightarrow 0), \quad (29)$$

для которого коэффициент при логарифмическом множителе является универсальным. При условии справедливости формул (28) и (29) параметрическое представление (18) автоматически обеспечивает результаты  $\beta(g) = \beta_2 g^2$ ,  $\eta(g) = 0 \cdot g$ ,  $\eta_2(g) = \zeta_1 g$ , т.е. правильное поведение РГ-функций при малых  $g$ .

Объективная проверка соотношений (25) для решеточных моделей проводилась во многих работах [6–15]. В частности, в работах [6, 7] убедительно показано, что высокотемпературные ряды для модели Изинга позволяют надежно предсказать значение показателя  $p$ . Соотношение (29) с удовлетворительной точностью подтверждено в работах [7, 9]. Уже эти результаты позволяют положительно ответить на вопрос, поставленный во введении: параметрическое представление (18) дает правильные результаты для РГ-функций в области слабой связи.

#### 3.2. Нулевое приближение

Паде-анализ соотношений (28) проводится методом последовательных приближений. В нулевом приближении мы игнорируем логарифмические множители и обрабатываем функции  $f_i$  в предположении их степенной зависимости от  $\tau$ . Результаты такого анализа, приведенные в табл. 1, показывают существенное отличие показателей степени от точных (см. (28)) и дают грубую оценку критической точки:

$$\kappa_c = 0.07476\text{--}0.07490.$$

Более точную оценку  $\kappa_c$  можно получить, если заметить [6], что в скалярном случае имеем  $p = 1/3$ , так что комбинация  $\chi_4/\chi_2 \sim f_4 f_2$  ведет себя как  $\tau^{-3}$  и не содержит логарифмов. Как ясно из табл. 2, паде-анализ этой величины действительно дает показатель степени, близкий к точному, а соответствующая оценка  $\kappa_c$ ,

$$\kappa_c = 0.07481 \div 0.07487, \quad (30)$$

**Таблица 1.** Положение полюса, соответствующего критической точке  $\kappa_c$ , и вычет в нем (в скобках) для паде-аппроксимант  $[N/N]$  функций  $[\ln f_i(\kappa)]'$

$N$	$[\ln f_0(\kappa)]'$	$[\ln f_2(\kappa)]'$	$[\ln f_4(\kappa)]'$
2	0.07519 (1.130)	0.07510 (-1.113)	0.07442 (-1.832)
3	0.07521 (1.131)*	0.07543 (-1.085)	0.07419 (-1.814)
4	0.07502 (1.116)	0.07497 (-1.101)	0.07476 (-1.879)
5	0.07480 (1.063)	0.07513 (-1.103)	0.07477 (-1.881)
6	0.07486 (1.082)	0.07490 (-1.088)	0.07476 (-1.879)

*Примечание.* В табл. 1–4 звездочкой отмечены дефектные аппроксиманты. «Дефектом» в паде-анализе называют появление пары близких по величине полюса и корня, в результате чего соответствующая паде-аппроксиманта фактически сводится к аппроксиманте более низкого порядка. Дефектность аппроксиманты может приводить к потере точности и является основанием для ее дискриминации.

**Таблица 2.** Положение полюса, соответствующего критической точке, и вычет в нем (в скобках) для различных паде-аппроксимант функции  $[\ln f_4 f_2]'$

$N$	$[N + 1/N]$	$[N/N]$	$[N/N + 1]$
2	0.07418 (-2.871)	0.07461 (-2.936)	0.07558 (-2.963)
3	0.07488 (-2.993)	0.07450 (-2.923)	0.07465 (-2.946)
4	0.07486 (-2.988)	0.07485 (-2.986)	0.07486 (-2.988)
5	0.07487 (-2.989)	0.07486 (-2.987)*	0.07491 (-2.998)*
6	0.07481 (-2.970)	0.07484 (-2.983)	0.07483 (-2.978)

является почти окончательной и лишь немного уточнится в дальнейшем. Центральное значение (30) практически совпадает с результатом  $\kappa_c = 0.074834(15)$ , полученным в работе [6] в результате более изощренной обработки.

### 3.3. Первое приближение

В этом приближении полагаем

$$\begin{aligned} f_0 &= \tilde{f}_0 |\ln \tau|^{-p}, & f_2 &= \tilde{f}_2 |\ln \tau|^p, \\ f_4 &= \tilde{f}_4 |\ln \tau|^{2p-1} \end{aligned} \tag{31}$$

и подвергаем паде-анализу функции  $\tilde{f}_i$ . Поскольку соотношение  $\tau = A(\kappa_c - \kappa)$  содержит неуниверсальный множитель  $A$ , можно принять

$$|\ln \tau| = A_0 - \ln \left( 1 - \frac{\kappa}{\bar{\kappa}_c} \right), \tag{32}$$

где свободный параметр  $A_0$  и пробное значение  $\bar{\kappa}_c$  для критической точки используются для точной подгонки показателя степени и получения самосогласованного результата для  $\kappa_c$ . Как ясно из табл. 3,

такая подгонка не представляет проблемы, а хорошие результаты для показателя степени получаются в широком интервале значений  $A_0$ . Оптимальные значения  $A_0$  лежат в интервале 0.13–0.63, а новая оценка критической точки

$$\kappa_c = 0.07483\text{--}0.07489$$

лишь слегка сдвинута по сравнению с (30). Результаты для константы  $c_0$  в соотношении (29) представлены на рис. 1а: они близки к теоретическому значению  $c_0^{th} = 35.09$ , но оказываются систематически выше его.

Аналогичные неточности в определении  $c_0$  наблюдались в других работах. Использование констант  $A, B, D$  для простой гиперкубической решетки из табл. 5 работы [7] дает оценку  $c_0 = B/A^2 D^4 = 142.8$  вместо теоретического результата 105.2, относящегося к используемой нормировке. Еще более худшая оценка получена в работе [10]; совсем плохие результаты (расхождение в 9 и 18 раз) получают для других решеток [7]. Удовлетворительная проверка соотношения (29) декларирована в работе [9],

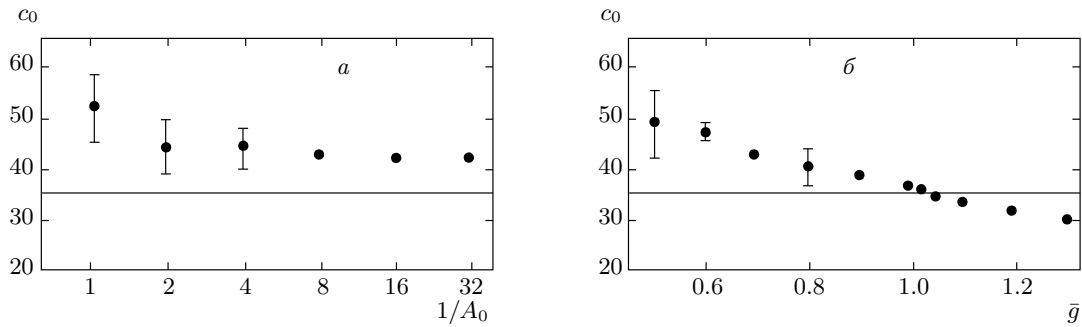


Рис. 1. а) Зависимость константы  $c_0$  в соотношении (29) от параметра  $A_0$  в главном логарифмическом приближении; б) зависимость  $c_0$  от  $\bar{g}$  во втором логарифмическом приближении

Таблица 3. Паде-анализ функций  $\tilde{f}_i(\kappa)$ , введенных согласно формуле (31)

$A_0$	$[\ln \tilde{f}_0(\kappa)]'$ [6/6], $\bar{\kappa}_c = 0.074842$	$[\ln \tilde{f}_2(\kappa)]'$ [6/6], $\bar{\kappa}_c = 0.074834$	$[\ln \tilde{f}_4(\kappa)]'$ [6/5], $\bar{\kappa}_c = 0.074890$
2.0	0.07491 (1.037)*	0.07486 (-1.023)	0.07488 (-1.968)*
1.0	0.07487 (1.018)	0.074844 (-1.007)	0.07493 (-1.989)*
0.625	—	0.074834 (-1.00005)	—
0.5	0.074855 (1.0085)	0.07482 (-0.996)	0.07477 (-1.960)
0.25	0.074846 (1.0029)	0.07475 (-0.973)	0.07488 (-1.996)
0.2	—	—	0.074890 (-1.9994)
0.13	0.0748420 (1.00005)	—	—
0.1	0.074840 (0.9993)	0.07483 (-0.990)*	0.07490 (-2.0044)
0.06	0.07487 (1.0033)	0.07482 (-0.988)*	0.07491 (-2.0063)

в которой проверялось не само соотношение (29), а его следствие  $dg^{-1}/d\ln \tau = 1/c_0$ ; при этом центральное значение  $c_0$  примерно соответствует рис. 1а, а согласие с теорией достигнуто за счет увеличения неопределенности результатов, происходящего из-за дифференцирования.

**3.4. Второе приближение**

Результаты (25), (28) получены в главном логарифмическом приближении. Во втором логарифмическом приближении (см. Приложение А) они принимают вид

$$f_0 = h_0 \tau (f_{sing})^{-p}, \quad f_2 = h_2 \tau^{-1} (f_{sing})^p h_{sing}, \quad (33)$$

$$f_4 = h_4 \tau^{-2} (f_{sing})^{2p-1},$$

где функции  $h_i(\kappa)$  регулярны при  $\kappa \rightarrow \kappa_c$ , а сингулярные функции выбраны в виде

$$f_{sing}(\kappa) = 1 - \bar{g} \ln \tau + s \bar{g} \ln(1 - \bar{g} \ln \tau), \quad (34)$$

$$h_{sing}(\kappa) = 1 + q \frac{\bar{g}}{f_{sing}(\kappa)}, \quad \tau = 1 - \frac{\kappa}{\kappa_c}, \quad (35)$$

где

$$s = \frac{2\beta_3}{\beta_2^2} - \frac{\zeta_1}{\beta_2} = \frac{n^2 - 8n - 68}{(n + 8)^2}, \quad (36)$$

$$q = \frac{2\delta_2}{\beta_2^2} = \frac{n + 2}{(n + 8)^2}.$$

Основное отличие от формул (28) сводится к замене  $|\ln \tau|$  на  $|\ln \tau| + s \ln |\ln \tau|$  с известным параметром  $s$ ; неоднозначность нормировки  $\tau$  приводит к необходимости рассмотрения комбинаций  $A + |\ln \tau| + s \ln(B + |\ln \tau|)$ , где константы  $A$  и  $B$  различны для разных функций; формально последние не влияют на характер сингулярности, однако их неудачный выбор может сильно исказить результаты. Во избежание большого числа подгоночных параметров мы приняли для  $f_{sing}(\kappa)$  функциональную форму, следующую из теории возмущений. Разумность такого выбора, на наш взгляд, определяется

**Таблица 4.** Паде-анализ функций  $\tilde{f}_i(\kappa)$ , введенных согласно формуле (37)

$\bar{g}$	$[\ln \tilde{f}_0(\kappa)]'$ [6/6], $\bar{\kappa}_c = 0.074843$	$[\ln \tilde{f}_2(\kappa)]'$ [6/6], $\bar{\kappa}_c = 0.074840$	$[\ln \tilde{f}_4(\kappa)]'$ [6/5], $\bar{\kappa}_c = 0.074867$
0.5	0.07492 (1.036)*	0.07488 (-1.024)	0.07487 (-1.968)*
0.7	0.07488 (1.019)*	0.07485 (-1.0096)	0.07491 (-1.988)*
0.85	—	0.074840 (-1.0008)	—
0.9	0.07485 (1.0052)	0.074836 (-0.998)	0.074877 (-1.994)
0.99	0.074843 (1.00005)	—	—
1.0	0.074842 (0.9995)	0.07483 (-0.994)	0.074865 (-1.997)
1.06	—	—	0.074867 (-2.0001)
1.2	0.07482 (0.988)	0.07476 (-0.976)*	0.07488 (-2.010)

следующим. Параметр  $\bar{g}$  имеет смысл числа Гинзбурга и определяет размер критической области, в которой существенны логарифмические поправки; его оценка представляет физический интерес, так как число Гинзбурга часто оказывается малым даже при отсутствии на то теоретических оснований. При малых  $\bar{g}$  функция  $f_{sing}(\kappa)$  почти везде близка к единице, но резко возрастает в окрестности  $\kappa_c$ ; при неудачном выделении сингулярности регулярные функции  $h_i(\kappa)$  в формуле (33) окажутся быстро меняющимися в окрестности  $\kappa_c$  и будут плохо воспроизводиться паде-аппроксимантами. Однако для малых  $\bar{g}$  форма (34) является фактически точной, так что функции  $h_i(\kappa)$  оказываются почти постоянными. При  $\bar{g} \gtrsim 1$  форма (34) не является вполне правильной, но в этом случае неточность в выделении сингулярностей не столь критична, так как функция  $f_{sing}(\kappa)$  меняется сравнительно медленно.

Универсальный выбор  $f_{sing}(\kappa)$  для всех функций возможен в пренебрежении вкладом  $O(\bar{g})$  на фоне единицы (см. Приложение А), так что учет множителей типа  $h_{sing}(\kappa)$ , строго говоря, является превышением точности. Однако в некоторых случаях такие множители имеют качественное значение и в формуле (33) они учтены «минимальным» образом: при такой записи комбинация  $f_0 f_2$  имеет правильную сингулярность и обеспечивает правильное поведение  $\eta(g)$  при малых  $g$ ; аналогично, комбинация  $f_4 f_2$  получается не вполне свободной от логарифмов, что позволяет несколько подправить отклонения, наблюдаемые в табл. 2.

Если функции  $\tilde{f}_i$  вместо (31) ввести соотношениями

$$\begin{aligned} f_0 &= \tilde{f}_0 (f_{sing})^{-p}, & f_2 &= \tilde{f}_2 (f_{sing})^p h_{sing}, \\ f_4 &= \tilde{f}_4 (f_{sing})^{2p-1}, \end{aligned} \tag{37}$$

то их паде-анализ приводит к табл. 4; оценка параметра  $c_0$  в формуле (29) иллюстрируется на рис. 1б. Легко видеть, что актуальный интервал значений  $\bar{g}$  оказывается значительно более узким, чем в главном логарифмическом приближении (где  $1/A_0$  аналогично  $\bar{g}$ ). Разброс оптимальных значений  $\bar{g}$  для разных функций составляет 0.85–1.06, что дает для  $c_0$  оценку

$$c_0 = 36.3 \pm 1.8 \tag{38}$$

в хорошем согласии с теоретическим значением 35.09. Точное значение  $c_0$  реализуется при  $\bar{g} \approx 1.02$  (рис. 1б). Наконец, табл. 4 дает максимально точную оценку критической точки

$$\kappa_c = 0.074840\text{--}0.074867, \tag{39}$$

доступную в пределах имеющейся информации. В дальнейшем принимаем значение  $\kappa_c = 0.074850$  из середины интервала (39) и значение  $\bar{g} = 1.020385$ , обеспечивающее точное значение  $c_0$  для аппроксиманты [3/3].

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ РГ-ФУНКЦИЙ

Производные от сингулярных функций могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} [\ln f_{sing}]' &= \frac{u_1(\tau)}{\kappa_c \tau}, & [\ln f_{sing}]'' &= \frac{u_2(\tau)}{(\kappa_c \tau)^2}, \\ [\ln h_{sing}]' &= \frac{v_1(\tau)}{\kappa_c \tau}, & [\ln h_{sing}]'' &= \frac{v_2(\tau)}{(\kappa_c \tau)^2}, \end{aligned} \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned}
 u_1(\tau) &= \frac{\bar{g}}{f_{sing}} \left( 1 + \frac{s\bar{g}}{1 - \bar{g} \ln \tau} \right), \\
 u_2(\tau) &= \frac{\bar{g}}{f_{sing}} \left\{ 1 + \frac{s\bar{g}}{1 - \bar{g} \ln \tau} - \frac{s\bar{g}^2}{(1 - \bar{g} \ln \tau)^2} \right\} - u_1(\tau)^2, \quad (41) \\
 v_1(\tau) &= -\frac{q\bar{g}^2}{f_{sing}(f_{sing} + q\bar{g})} \left( 1 + \frac{s\bar{g}}{1 - \bar{g} \ln \tau} \right), \\
 v_2(\tau) &= -\frac{q\bar{g}^2}{f_{sing}(f_{sing} + q\bar{g})} \times \\
 &\times \left\{ 1 + \frac{s\bar{g}}{1 - \bar{g} \ln \tau} - \frac{s\bar{g}^2}{(1 - \bar{g} \ln \tau)^2} - \left( \frac{\bar{g}}{f_{sing}} + \frac{\bar{g}}{f_{sing} + q\bar{g}} \right) \left( 1 + \frac{s\bar{g}}{1 - \bar{g} \ln \tau} \right)^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Подставляя (33) в (18) с учетом (40), получим параметрическое представление для РГ-функций в виде

$$g = \frac{H(\kappa)}{\kappa^2 f_{sing}}, \quad H(\kappa) = h_4 h_0^2,$$

$$\frac{\beta(g)}{g} = \frac{2\kappa_c \tau (2 - \kappa [\ln h_4 h_0^2]') + 2\kappa u_1}{\kappa_c \tau (1 - \kappa [\ln h_0]') + \kappa(1 + pu_1)}, \quad (42)$$

$$\eta(g) = \frac{-2\kappa_c \tau \kappa [\ln h_0 h_2]' - 2\kappa v_1}{\kappa_c \tau (1 - \kappa [\ln h_0]') + \kappa(1 + pu_1)},$$

$$\begin{aligned}
 \eta_2(g) &= -2 \{ (\kappa_c \tau)^2 (1 - \kappa^2 [\ln h_2]') + \\
 &+ [\kappa_c \tau (1 + \kappa [\ln h_2]') + \kappa(1 + pu_1 + v_1)]^2 - \\
 &- \kappa^2 (1 + pu_2 + v_2) \} \times \\
 &\times \{ \kappa_c \tau (1 - \kappa [\ln h_0]') + \kappa(1 + pu_1) \}^{-1} \times \\
 &\times \{ \kappa_c \tau (1 + \kappa [\ln h_2]') + \kappa(1 + pu_1 + v_1) \}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Независимо от вида регулярных функций при  $\kappa \rightarrow 0$  получаются асимптотики (19), тогда как при  $\tau \rightarrow 0$  имеем

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{2\bar{g}}{\beta_2 f_{sing}}, \quad \frac{\beta(g)}{g} = \frac{2\bar{g}}{f_{sing}} + \frac{2(s-p)\bar{g}^2}{f_{sing}^2}, \\
 \eta(g) &= \frac{2q\bar{g}^2}{f_{sing}^2}, \quad \eta_2(g) = -\frac{2p\bar{g}}{f_{sing}},
 \end{aligned} \quad (43)$$

что воспроизводит в (26) два первых члена разложения для  $\beta(g)$  и первые члены для  $\eta(g)$  и  $\eta_2(g)$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Заметим, что коэффициентами  $\beta_2, \beta_3, \delta_2, \zeta_1$  исчерпывается инвариантная (не зависящая от схемы) информация об РГ-функциях и дальнейшее уточнение процедуры (построение третьего и т. д. логарифмического приближения) требует вычисления последующих коэффициентов для соответствующей решеточной регуляризации.

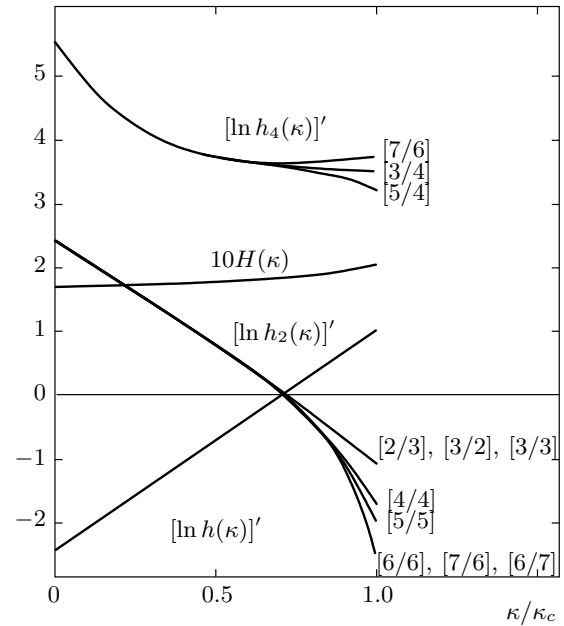


Рис. 2. Регулярные функции  $H(\kappa)$ ,  $[\ln h_i(\kappa)]'$ , полученные в результате паде-аппроксимации

В пренебрежении членами с  $\tau$  выражения (42) дают для РГ функций регулярные разложения по  $g$  (разумеется, не воспроизводя правильных коэффициентов), а члены с  $\tau$  дают сингулярность вида  $\exp(-\text{const}/g)$ , которая должна существовать из-за факториальной расходимости рядов теории возмущений [20, 21]. Таким образом, параметрическое представление оказывается достаточно «умным» и обеспечивает правильные аналитические свойства при  $g \rightarrow 0$ .

Точность всего построения определяется точностью определения регулярных функций  $h_i(\kappa)$ ; из соотношений (33) для них получается разложение по  $\kappa$ , по которому затем строятся паде-аппроксиманты. Последние имеют регулярное поведение на интервале  $(0, \kappa_c)$ , поскольку все сингулярности уже выделены. Полученные регулярные функции показаны на рис. 2. Для функций  $H(\kappa)$  и  $[\ln h_0(\kappa)]'$  все аппроксиманты дают практически совпадающие результаты; для функции  $[\ln h_4(\kappa)]'$  имеются небольшие различия в окрестности  $\kappa_c$  (рис. 2). Менее удовлетворительна ситуация с функцией  $[\ln h_2(\kappa)]'$ , для которой повышение порядка паде-аппроксимации приводит к нарастающим отклонениям от регулярного поведения, предсказываемого низшими аппроксимантами. Остается неясным, в достаточной ли степени сошлась последовательность аппроксимаций или такие отклонения будут нарастать и дальше. Бо-



лее того, эти отклонения могут оказаться артефактом, связанным с неполной согласованностью в выделении сингулярностей, в результате чего функция  $[\ln h_2(\kappa)]'$  (в используемом приближении) содержит остаточную сингулярность, которую «чувствуют» высшие аппроксиманты. В последнем случае поведение, предсказываемое аппроксимантами  $[3/3]$ ,  $[2/3]$ ,  $[3/2]$ , может оказаться более достоверным. К счастью, эта дилемма может быть разрешена с помощью разложений сильной связи (разд. 5), которые однозначно указывают на правильность использования высших паде-аппроксимант и удовлетворительность получаемых при этом результатов. В Приложении В приведены параметры используемых аппроксимант для  $H(\kappa)$ ,  $[\ln h_i(\kappa)]'$ , что позволяет использовать параметрическое представление (42) для практических целей.

Для представления результатов удобно использовать так называемую естественную нормировку заряда, получаемую путем замены  $g \rightarrow (16\pi^2/3)g$  и соответствующую записи члена взаимодействия в виде<sup>2)</sup>  $(16\pi^2/4!)g_0\varphi^4$ ; тогда параметр  $a$  в асимптотике Липатова  $ca^N\Gamma(N+b)$  [20, 21] равен единице и ближайшая особенность в борелевской плоскости лежит на единичном расстоянии от начала координат [21], что определяет функции, меняющиеся на масштабе порядка единицы. На рис. 3 сплошными кривыми показаны полученные РГ-функции; штриховые линии соответствуют асимптотикам сильной и слабой связи. Выход на асимптотику сильной связи оказывается сильно затянутым, в соответствии с результатами работы [22]. Однако отмеченная в этой работе затянутость однопетлевого закона для  $\beta$ -функции не подтверждается: она оказывается артефактом, связанным с тем, что предельное значение  $\beta(g)/g$  получено в работе [22] в несколько раз большим, чем на рис. 3 [1].

Чтобы дать представление о точности построения, пунктирными линиями показаны результаты в случае, когда функции  $h_i(\kappa)$  заменены на константы; при этом из результатов выпадает всякая информация об этих функциях, так как  $[\ln h_i]' = 0$ , а постоянное значение  $H(\kappa)$  фиксируется соотношении-

ем (29). Нетрудно видеть, что даже при полном отсутствии информации о регулярных функциях для  $\beta(g)/g$  и  $\eta_2(g)$  достигается точность около 1%<sup>3)</sup>. Реальная неточность построения примерно на 2 порядка меньше, чем отличие сплошных кривых от пунктирных, поскольку регулярные функции (рис. 2) определены на уровне лучше, чем  $10^{-2}$ , за исключением области  $\kappa > 0.8\kappa_c$ , где ошибка для функции  $[\ln h_2]'$  может достигать 10%. Но эта область соответствует значениям заряда  $g < 0.5$  (рис. 4), где влияние регулярных функций незначительно.

## 5. РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Раскладывая правые части (18) в ряды по  $\kappa$  и выражая  $\kappa$  через  $g$ , легко убедиться, что для функций  $\beta(g)/g$ ,  $\eta(g)$ ,  $\eta_2(g)$  справедливы регулярные разложения по  $g^{-2/d}$

$$\frac{\beta(g)}{g} = \sum_{N=0}^{\infty} B_N \left(-g^{-2/d}\right)^N \quad \text{и т. д.} \quad (44)$$

Коэффициенты разложения до  $N = 13$ , пересчитанные из высокотемпературных рядов, приведены в табл. 5<sup>4)</sup>. Легко убедиться, что отношения  $B_{N+1}/B_N$  при изменении  $N$  остаются одного порядка, что указывает на конечный радиус сходимости. Паде-анализ рядов (44) дает полюса в области  $|g^{-1/2}| \sim 0.1$ , которые для большинства аппроксимант не лежат на положительной полуоси в соответствии с регулярностью РГ-функций. Чтобы получить правильное степенное поведение при  $g \rightarrow 0$ , нужно использовать аппроксиманты  $[N/N+2]$  для  $\beta(g)/g$  и  $\eta_2(g)$  и аппроксиманты  $[N/N+4]$  для  $\eta(g)$ . Такая процедура предсказывает  $\delta_2$  с точностью около 20%, тогда как  $\beta_2$  и  $\zeta_1$  оцениваются лишь по порядку величины. Поэтому в области малых  $g$  суммирование рядов (44) дает менее точные результаты, чем описанная выше процедура.

В области больших  $g$  все аппроксиманты дают практически совпадающие результаты; с точностью около 1% такое совпадение сохраняется до  $g = 0.5$

<sup>2)</sup> Традиционная запись  $g_0\varphi^4/8$  в  $n$ -компонентном случае мотивируется тем, что вершина  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)} = gI_{\alpha\beta\gamma\delta}$  в низшем порядке равна  $g_0I_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , что обеспечивает соотношение  $g = g_0$  при  $g_0 \rightarrow 0$ . В скалярном случае тензор  $I_{\alpha\beta\gamma\delta}$  сводится к трем и в определение заряда вносится дополнительная тройка, поэтому взаимодействие записывается как  $g_0\varphi^4/4!$ . Эта, на первый взгляд, логичная мотивация в действительности оказывается иллюзорной, так как затравочный заряд не имеет никакого физического смысла.

<sup>3)</sup> Причина этого состоит в наличии перед  $[\ln h_i]'$  (см. (42)) множителя  $\kappa\kappa_{cT} = \kappa(\kappa_c - \kappa)$ , малого как при  $\kappa \rightarrow 0$ , так и при  $\kappa \rightarrow \kappa_c$ ; в середине интервала  $\kappa = \kappa_c/2$  этот множитель равен  $\kappa_c^2/4$ , тогда как прочие члены имеют порядок  $\kappa_c$ . С учетом  $\kappa_c \approx 1/15$  ясно, что влияние регулярных функций на  $\beta(g)/g$  и  $\eta_2(g)$  находится на уровне около 1%. Для  $\eta(g)$  ситуация другая из-за отсутствия в числителе члена порядка  $\kappa_{cT}$ .

<sup>4)</sup> Мы приводим формально 14 знаков, как они даются компьютером. Фактически начиная с  $N = 3$  происходит постепенное ухудшение точности и при  $N = 13$  последние четыре знака ненадежны.

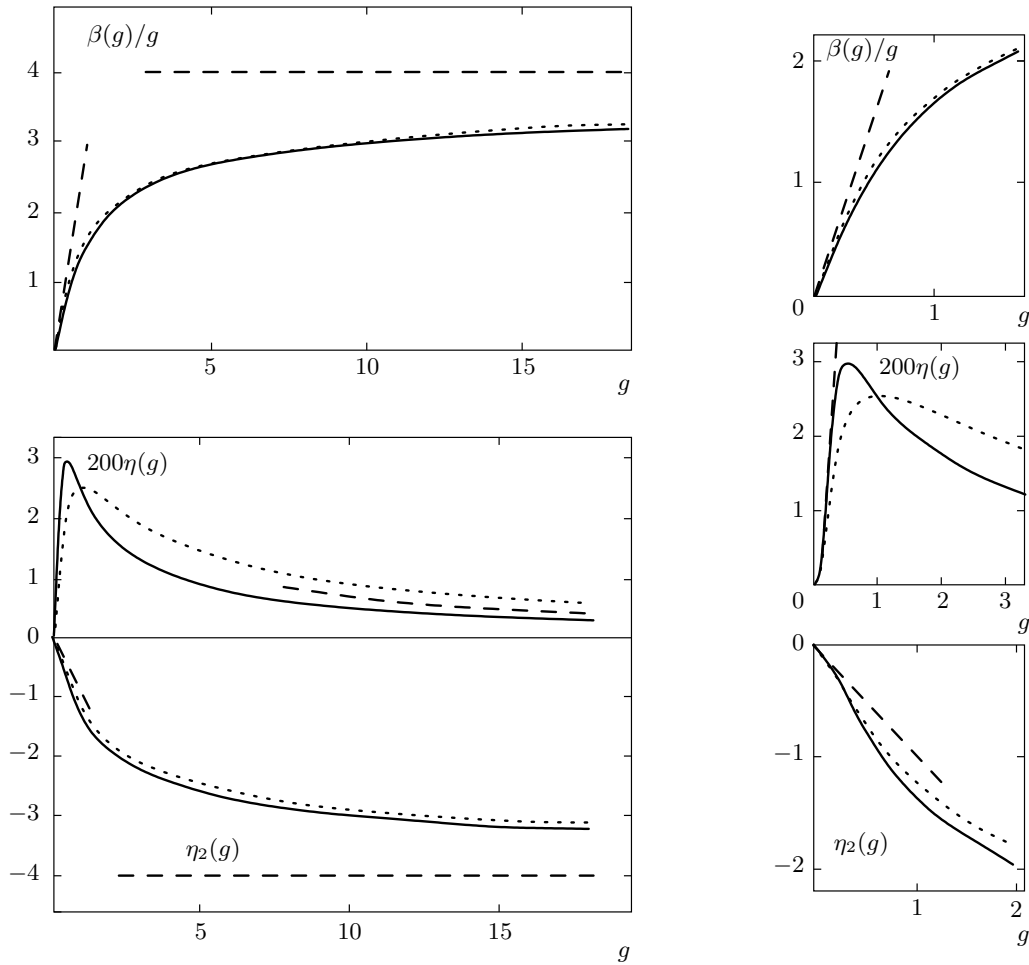


Рис. 3. Сплошные кривые — результаты для РГ-функций. Штриховыми линиями показаны асимптотики сильной и слабой связи. Пунктирные линии — результаты, полученные в предположении постоянства регулярных функций  $h_i(\kappa)$ , при котором вся информация о них выпадает из уравнений (42)

(в естественной нормировке). Для функций  $\beta(g)$  и  $\eta_2(g)$  такие оценки согласуются с полученными выше более точными результатами. В случае функции  $\eta(g)$  эти оценки однозначно указывают, что для  $[\ln h_2]'$  следует использовать аппроксиманты максимально высокого порядка, а получаемые результаты подтверждаются на уровне около 1%. По-видимому, ряды (44) можно использовать более эффективно, но исследование этой возможности выходит за пределы работы.

### 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученная  $\beta$ -функция является знакоопределенной и имеет асимптотическое поведение  $\beta(g) = 4g$  при  $g \rightarrow \infty$ . По классификации Боголюбова и

Ширкова [23] (см. обсуждение в работе [1]) это означает возможность построения континуальной теории с конечным взаимодействием на больших расстояниях. Последний вывод противоречит широко распространенным представлениям о «тривиальности» теории  $\varphi^4$  [24–28]. Фактически, как обсуждалось в работах [1, 30], в литературе были смешаны два определения: тривиальности по Вильсону [24] и тривиальности в математическом смысле [25, 26]. Если первую можно считать твердо установленной (она соответствует положительности  $\beta$ -функции), то свидетельства в пользу второй немногочисленны [27] и допускают другую интерпретацию [1, 30]. В результате проведенного выше анализа можно констатировать, что в отношении свойств решеточной теории  $\varphi^4$  у нас нет противоречий ни с одной из работ, цитированных в [1, 30]. Однако имеется про-

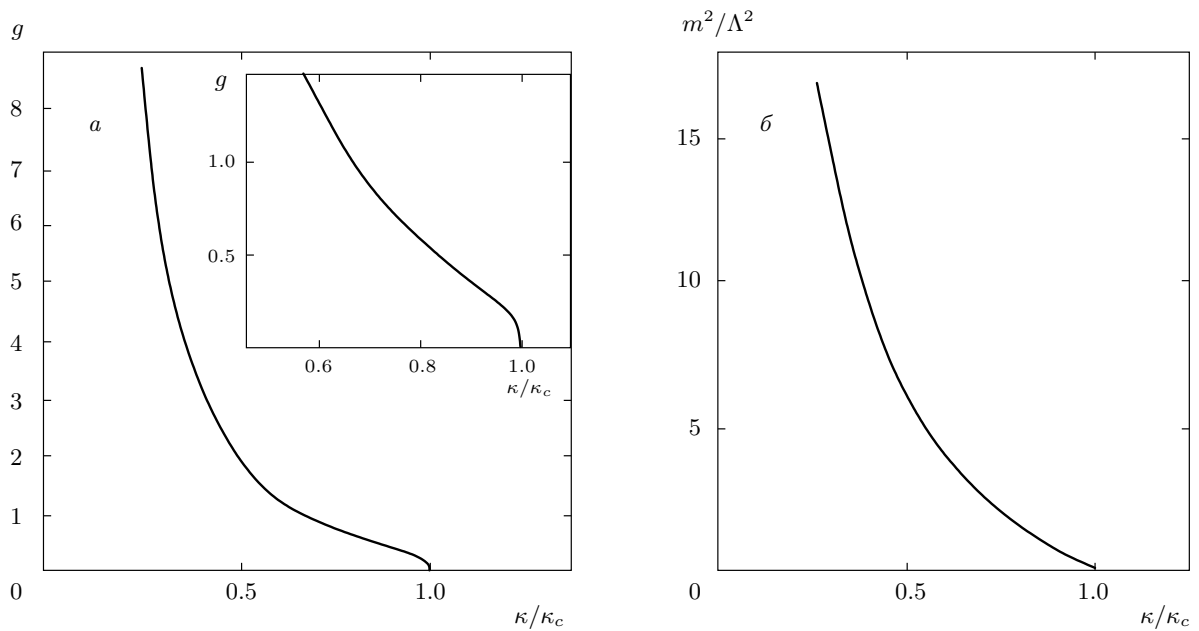


Рис. 4. Зависимость перенормированного заряда  $g$  (а) и перенормированной массы  $m$  (б) от  $\kappa/\kappa_c$

Таблица 5. Коэффициенты разложения по степеням  $g^{-2/d}$  для функций  $\beta(g)/g$ ,  $\eta(g)$  и  $\eta_2(g)$

$N$	$\beta(g)/g$	$\eta(g)$	$\eta_2(g)$
0	4.00000000000000	0.00000000000000	-4.00000000000000
1	-26.127890589687	0.00000000000000	26.127890589687
2	106.666666666666	1.77777777777777	-60.444444444444
3	-557.39499924665	-11.612395817638	81.286770723472
4	3214.2222222221	29.708641975308	-44.879012345695
5	-16396.702894504	22.708685154477	-1208.7213779957
6	67356.444444432	-961.13125612398	9071.1992161454
7	-139720.34647768	7188.4949076856	-49662.878604241
8	-717634.37037244	-27680.892323840	197619.39191503
9	9878174.8209247	-7609.7703277375	-226822.08364126
10	-59767955.489704	938372.27840847	-3873286.8465521
11	186179701.36334	-7226487.6363735	41826925.334797
12	355069103.58896	27981910.625966	-249549251.38460
13	-8851453360.7421	7407298.5714308	794136522.54618

творение концептуального характера, которое мы хотим подчеркнуть: оно относится к роли и месту решеточной теории.

Обычная точка зрения исходит из того, что решеточная теория  $\varphi^4$  дает разумное приближение для истинной полевой теории. Из этой интерпретации следует естественное условие  $\xi \gg a$ , согласно ко-

торому на характерном масштабе изменения поля  $\varphi(x)$  должно быть много узлов решетки. Это условие можно либерализовать до  $\xi \gtrsim a$  или ужесточить до  $\xi/a \rightarrow \infty$ . В первом случае для перенормированного заряда получается ограничение  $g \lesssim 1$  (в «естественной» нормировке) [28], во втором (соответствующем точке фазового перехода) — результат  $g = 0$ . Таким

образом, мы приходим к обычным утверждениям: в континуальном пределе ( $\Lambda/m \rightarrow \infty$ ) теория тривиальна, тогда как при наличии обрезания взаимодействие ограничено сверху и не может быть сильным. Последнее обстоятельство используется для верхней оценки массы хиггсовского бозона [28, 29].

Наша позиция состоит в том, что решеточная теория не должна рассматриваться как какое-то приближение к истинной (хотя это и возможно при  $g_0 \ll 1$ ). Континуальная теория в принципе не содержит никакой решетки; решетка же возникает лишь в затравочной теории, которая является вспомогательной конструкцией и в дальнейшем полностью устраняется. Затравочная теория не имеет физического смысла и никакие физические требования к ней неуместны. Если же отказаться от ограничения  $\xi \gtrsim a$ , то перенормированный заряд может принимать любое значение (рис. 4). Высказанная концепция находится в полном соответствии с «правилами игры», принятыми в математических работах [25, 26], согласно которым континуальный предел  $a \rightarrow 0$  берется при произвольно выбранных зависимостях  $g_0(a)$  и  $m_0(a)$ ; мы подчиняем их условиям (5).

Фактически единственная альтернатива пертурбативному подходу состоит в том, чтобы все величины, относящиеся к континуальной теории, выразить через функциональные интегралы. Последние зависят от  $g_0$ ,  $m_0$ ,  $\Lambda$  и с учетом размерности для заряда, массы и прочих физических величин  $A_i$  (наблюдаемых, РГ-функций и пр.) получим

$$g = F_g(g_0, m_0/\Lambda), \quad m = \Lambda F_m(g_0, m_0/\Lambda), \quad (45)$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i(g_0, m_0/\Lambda),$$

где  $d_i$  — физическая размерность величины  $A_i$ . Из соотношений (45) ясно, что реальное назначение затравочной теории — в том, чтобы обеспечить запись интересующих нас величин в параметрической форме. Физический интерес представляют соотношения величин  $g$ ,  $m$ ,  $A_i$  между собой; параметрическое же представление не имеет глубокого смысла просто в силу его неоднозначности — его можно записывать в разных формах, переходя от  $g_0$  и  $m_0/\Lambda$  к любой другой паре переменных. Поэтому попытка придать физический смысл затравочной теории сталкивается прежде всего с вопросом: почему какой-то одной из бесчисленного множества параметризаций нужно придавать особое значение?

Исключая  $g_0$  и  $m_0/\Lambda$  в пользу  $g$  и  $m/\Lambda$ , имеем

$$A_i = m^{d_i} \tilde{F}_i(g, m/\Lambda). \quad (46)$$

Для ситуации общего положения исключение зависимости от  $\Lambda$  требует перехода к пределу  $m/\Lambda \rightarrow 0$ , который соответствует критической точке и возвращает нас к «нулю заряда». Однако центральный момент состоит в том, что ситуация общего положения не имеет места в формуле (46): после преобразования к модели Изинга (справедливом при условиях (5)) все функции в формулах (45) зависят от одного параметра  $\kappa$ , в результате чего зависимость от  $m/\Lambda$  в (46) полностью отсутствует<sup>5</sup>:

$$A_i = m^{d_i} F_i(g). \quad (47)$$

Тем самым программа перенормировок полностью выполнена и никаких дополнительных предельных переходов не требуется. Это означает, что а) мы можем сохранить решетку в затравочной теории (как удобный технический инструмент для представления функциональных интегралов) и б) соотношение  $m$  и  $\Lambda$  можно считать произвольным, что обеспечивает достижимость произвольного значения  $g$  (рис. 4).

Изложенное мы считаем реальной схемой построения континуальной теории  $\varphi^4$  с конечным взаимодействием. Фактически выше уже получены зависимости  $g$  и  $m$  от затравочных параметров (рис. 4) и результаты для РГ-функций (рис. 3).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Второе логарифмическое приближение

Приведем основные формулы, относящиеся ко второму логарифмическому приближению, на основе которых записано представление (33). Исходим из уравнения Каллана–Симанчика в схеме обрезания<sup>6</sup>

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} + \beta(g_0) \frac{\partial}{\partial g_0} - \gamma(g_0) \right] F\left(g_0, \frac{\Lambda}{m}\right) = 0, \quad (\text{A.1})$$

где для функции  $F$  справедливо логарифмическое разложение

$$F\left(g_0, \frac{\Lambda}{m}\right) = \sum_{N=0}^{\infty} g_0^N \sum_{K=0}^N A_N^K \left(\ln \frac{\Lambda}{m}\right)^K. \quad (\text{A.2})$$

<sup>5</sup> В действительности никакого чуда в этом нет, так как переход к континуальному пределу был проведен в процессе преобразования к модели Изинга [2], что определялось потребностями перенормированной (а не затравочной) теории.

<sup>6</sup> Его отличие от уравнения (10) в данном случае не имеет значения, так как первые коэффициенты  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\delta_2$ ,  $\zeta_1$  не зависят от ренормировочной схемы.

Подстановка (A.2) в (A.1) с учетом разложений

$$\beta(g_0) = \sum_{M=2}^{\infty} \beta_M g_0^M, \quad \gamma(g_0) = \sum_{M=1}^{\infty} \gamma_M g_0^M$$

приводит к системе рекуррентных соотношений для коэффициентов  $A_N^K$ :

$$-K A_N^K = \sum_{M=1}^{N-K+1} [\beta_{M+1}(N-M) - \gamma_M] A_{N-M}^{K-1}, \quad (A.3)$$

$$K = 1, 2, \dots, N.$$

В частности, для  $K$  близких к  $N$  имеем

$$-N A_N^N = [\beta_2(N-1) - \gamma_1] A_{N-1}^{N-1}, \quad (A.4)$$

$$-(N-1) A_N^{N-1} = [\beta_2(N-1) - \gamma_1] A_{N-1}^{N-2} +$$

$$+ [\beta_3(N-2) - \gamma_2] A_{N-2}^{N-2},$$

$$-(N-2) A_N^{N-2} = [\beta_2(N-1) - \gamma_1] A_{N-1}^{N-3} +$$

$$+ [\beta_3(N-2) - \gamma_2] A_{N-2}^{N-3} +$$

$$+ [\beta_4(N-3) - \gamma_3] A_{N-3}^{N-3}$$

и т. д. Первое уравнение (A.4) решается непосредственно, после чего последующие уравнения могут быть решены одно за другим методом вариации постоянной.

*Вершина  $\Gamma^{(1,2)}$ .* Для этой вершины  $\gamma(g_0) = \eta_2(g_0)$  и все коэффициенты  $A_N^N$  отличны от нуля, причем  $A_0^0 = 1$ ; первые два уравнения (A.4) дают

$$A_N^N = (-\beta_2)^N \frac{\Gamma(N+p)}{\Gamma(p)\Gamma(N+1)}, \quad (A.5)$$

$$p = -\frac{\gamma_1}{\beta_2} = -\frac{\zeta_1}{\beta_2},$$

$$A_N^{N-1} = (-\beta_2)^{N-1} \frac{\Gamma(N+p)}{\Gamma(1+p)\Gamma(N)} \times$$

$$\times \left\{ p \frac{\beta_3}{\beta_2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+p} + O(1) \right\}.$$

Подстановка в формулу (A.2) и суммирование соответствующих последовательностей с помощью формул

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+1)} (-x)^n, \quad (A.6)$$

$$(1+x)^\alpha \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+1)} (-x)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha-k}$$

дает

$$\Gamma^{(1,2)} = \left\{ 1 + O(g_0) + \beta_2 g_0 \ln \frac{\Lambda}{m} + \right.$$

$$\left. + g_0 \frac{\beta_3}{\beta_2} \ln \left( 1 + \beta_2 g_0 \ln \frac{\Lambda}{m} \right) \right\}^{-p}. \quad (A.7)$$

Члены  $O(g_0)$ , имеющиеся здесь и в последующих выражениях, в дальнейшем будем опускать.

*Перенормированный заряд  $g$*  удовлетворяет уравнению (A.1) с  $\gamma(g_0) \equiv 0$ , тогда как в разложении (A.2) все коэффициенты  $A_N^N$  равны нулю, а  $A_1^0 = 1$ . Аналогично (A.5) и (A.7) имеем

$$A_N^{N-1} = (-\beta_2)^{N-1},$$

$$A_N^{N-2} = (-\beta_2)^{N-2} (N-1) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\beta_3}{\beta_2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + O(1) \right\} \quad (A.8)$$

и

$$g = g_0 \left\{ 1 + \beta_2 g_0 \ln \frac{\Lambda}{m} + \right.$$

$$\left. + g_0 \frac{\beta_3}{\beta_2} \ln \left( 1 + \beta_2 g_0 \ln \frac{\Lambda}{m} \right) \right\}^{-1}, \quad (A.9)$$

что легко получить и просто из уравнения Гелл-Манна–Лоу.

*Перенормированная масса.* В пренебрежении  $Z$ -фактором тождество Уорда

$$\Gamma^{(1,2)} = \frac{d}{dm_0^2} \Gamma^{(0,2)} = \frac{d}{dm_0^2} \frac{m^2}{Z} \quad (A.10)$$

можно записать в виде  $dm_0^2/dm^2 = 1/\Gamma^{(1,2)}$ ; интегрирование по  $m^2$  с нужной точностью сводится к умножению на  $m^2$ ,

$$m^2 = (m_0^2 - m_c^2) \left\{ 1 + \beta_2 g_0 \ln \frac{\Lambda}{m} + g_0 \frac{\beta_3}{\beta_2} \times \right.$$

$$\left. \times \ln \left( 1 + \beta_2 g_0 \ln \frac{\Lambda}{m} \right) \right\}^{-p}, \quad (A.11)$$

где  $m_c^2$  — значение  $m_0^2$ , соответствующее точке перехода. Вводя безразмерное расстояние до перехода  $\tau \propto (m_0^2 - m_c^2)$  и исключая итерационным образом  $m$  из правой части, имеем

$$m^2 = \tau \left[ 1 + \bar{g} \ln \frac{1}{\tau} + s \bar{g} \ln \left( 1 + \bar{g} \ln \frac{1}{\tau} \right) \right]^{-p}, \quad (A.12)$$

$$\bar{g} = \frac{\beta_2 g_0}{2},$$

Таблица 6. Параметры паде-аппроксимации (24) регулярных функций

n	H(κ)		[ln h <sub>0</sub> (κ)]'	
	p <sub>n</sub>	q <sub>n</sub>	p <sub>n</sub>	q <sub>n</sub>
0	0.166666	1.000000	-2.389114	1.000000
1	2.173343	12.28756	39.93594	1.218909
2	-8.874246	-6.056224	134.2565	-14.76806
3	103.5876	-124.8396	-1759.943	498.1762
4	0	0	14434.97	-2468.179
	[ln h <sub>2</sub> (κ)]'		[ln h <sub>4</sub> (κ)]'	
n	p <sub>n</sub>	q <sub>n</sub>	p <sub>n</sub>	q <sub>n</sub>
0	2.416517	1.000000	5.530725	1.000000
1	-50.63241	-3.794992	13.37787	21.09480
2	-345.9676	-201.7335	630.6971	57.28333
3	9156.772	738.3887	3430.220	252.1934
4	-1285.833	4787.275	0	10511.06
5	-267488.9	-26827.13	0	0
6	109199.7	363530.4	0	0

где s определено в формуле (36). Аналогично, (A.9) примет вид

$$g = \frac{2}{\beta_2} \times \bar{g} \left\{ 1 + \bar{g} \ln \frac{1}{\tau} + s\bar{g} \ln \left( 1 + \bar{g} \ln \frac{1}{\tau} \right) \right\}^{-1}. \quad (A.13)$$

Z-фактор удовлетворяет уравнению (A.1) с  $\gamma(g_0) = -\eta(g_0)$ , а в разложении (A.2)  $A_0^0 = 1$ ,  $A_1^0 = A_1^1 = 0$  и все коэффициенты  $A_N^N$  с  $N \geq 2$  равны нулю. Аналогично (A.8) имеем для  $N \geq 2$

$$A_N^{N-1} = A_2^1 (-\beta_2)^{N-2},$$

$$A_N^{N-2} = A_2^1 (-\beta_2)^{N-2} (N-1) \times \left\{ -\frac{\beta_3}{\beta_2^2} \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n} + O(1) \right\}, \quad (A.14)$$

что после суммирования дает

$$Z = 1 + \frac{A_2^1 g_0}{\beta_2} - \frac{A_2^1 g_0}{\beta_2} \left\{ 1 + \beta_2 g_0 \ln \frac{\Lambda}{m} + g_0 \frac{\beta_3}{\beta_2} \ln \left( 1 + \beta_2 g_0 \ln \frac{\Lambda}{m} \right) \right\}^{-1}. \quad (A.15)$$

Учитывая связь  $A_2^1 = -\delta_2$ , выражая  $m$  через  $\tau$

и опуская несущественный постоянный множитель, имеем с нужной точностью

$$Z = 1 + \frac{2\delta_2}{\beta_2^2} \bar{g} \left\{ 1 + \bar{g} \ln \frac{1}{\tau} + s\bar{g} \ln \left( 1 + \bar{g} \ln \frac{1}{\tau} \right) \right\}^{-1}. \quad (A.16)$$

Учитывая соотношения

$$\frac{K_2}{\tilde{K}_2} = m^2, \quad \frac{K_2}{K_0} = \frac{Z}{m^2}, \quad \frac{K_4 K_0}{K_2^2} = -\frac{g}{m^4} \quad (A.17)$$

и подставляя (A.12), (A.13), (A.16), приходим к формулам (33) для  $f_i(\kappa)$ . Отличие Z-фактора от единицы соответствует поправкам порядка  $g_0 / \ln \tau$ , которыми мы систематически пренебрегали, и строго говоря, является превышением точности. Однако без учета Z-фактора комбинация  $f_0 f_2$  окажется регулярной функцией, что приведет к неправильному поведению  $\eta(g)$  при малых  $g$ . Поэтому функция  $h_{sing}$ , соответствующая Z-фактору, введена в формулах (33) минимальным образом для обеспечения правильной сингулярности в  $f_0 f_2$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

## Паде-аппроксимация регулярных функций

В табл. 6 приведены коэффициенты  $p_n$ ,  $q_n$  в выражении (24) для паде-аппроксимации регулярных функций  $H(\kappa)$ ,  $[\ln h_i(\kappa)]'$ ; даются аппроксиманты наиболее низкого порядка, которые по нашим представлениям имеют полную точность. При выделении сингулярностей использовались значения  $\kappa_c = 0.074850$  и  $\bar{g} = 1.020385$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Суслов, ЖЭТФ **134**, 490 (2008).
2. И. М. Суслов, ЖЭТФ **138**, 508 (2010).
3. И. М. Суслов, ЖЭТФ **135**, 1129 (2009).
4. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb, M. S. Green, Academic, New York (1976), Vol. VI.
5. D. S. Gaunt and A. J. Guttmann, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb, M. S. Green, Academic, New York (1974), Vol. 3.
6. S. Mc Kenzie, M. F. Sykes, and D. S. Gaunt, J. Phys. A: Math. Gen. **12**, 871 (1979).
7. S. Mc Kenzie and D. S. Gaunt, J. Phys. A: Math. Gen. **13**, 1015 (1980).
8. S. Mc Kenzie, M. F. Sykes, and D. S. Gaunt, J. Phys. A: Math. Gen. **12**, 743 (1978).
9. P. Butera and M. Comi, hep-th/0112225.
10. J. K. Kim and A. Patrascioiu, Phys. Rev. D **47**, 2588 (1993).
11. A. Vladikas and C. C. Wong, Phys. Lett. B **189**, 154 (1987).
12. R. Kenna and C. B. Lang, Phys. Rev. E **49**, 5012 (1994).
13. W. Bernreuther, M. Cockeler, and M. Kremer, Nucl. Phys. B **295** [FS21], 211 (1988).
14. A. J. Guttmann, J. Phys. A: Math. Gen. **11**, L103 (1978).
15. C. A. de Carvalho, S. Caracciolo, and J. Frölich, Nucl. Phys. B **215** [FS7], 209 (1983).
16. P. Grassberger, R. Hegger, and L. Schafer, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 7265 (1994).
17. А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ **56**, 2087 (1969).
18. M. Lüscher and P. Weisz, Nucl. Phys. B **300**, 325 (1988).
19. G. A. Baker, *Essentials of Padé-Approximants*, Academic, New York (1975).
20. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
21. И. М. Суслов, ЖЭТФ **127**, 1350 (2005).
22. И. М. Суслов, ЖЭТФ **120**, 5 (2001).
23. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).
24. К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение*, Мир, Москва (1975).
25. J. Frölich, Nucl. Phys. B **200** [FS4], 281 (1982).
26. M. Aizenman, Comm. Math. Soc. **86**, 1 (1982).
27. B. Freedman, P. Smolensky, and D. Weingarten, Phys. Lett. B **113**, 481 (1982).
28. M. Lüscher and P. Weisz, Nucl. Phys. B **290** [FS20], 25 (1987); **295** [FS21], 65 (1988); **318**, 705 (1989).
29. R. F. Dashen and H. Neuberger, Phys. Rev. Lett. **50**, 1897 (1983).
30. I. M. Suslov, arXiv: 0806.0789.