

ПРОВОДИМОСТЬ КОНЕЧНЫХ СИСТЕМ И СКЕЙЛИНГ В ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ

И. М. Суслов*

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 февраля 2012 г.

Полная проводимость (кондактанс) конечной системы играет центральную роль в скейлинговой теории локализации [1]. Обычно она определяется формулами Ландауэра, в которых остаются непроясненными вопросы: а) об исключении контактного сопротивления в многоканальном случае; б) о соответствии ландауэровской проводимости внутренним свойствам системы; в) о связи с коэффициентом диффузии $D(\omega, q)$ бесконечной системы. Ответ на эти вопросы получен ниже в рамках двух подходов: (1) самосогласованной теории локализации Вольхардта–Вольфле и (2) квантовомеханического анализа, основанного на модели оболочек. Оба подхода приводят к одинаковому определению проводимости конечной системы, тесно связанному с определением Таулеса. В рамках самосогласованной теории получены соотношения конечно-размерного скейлинга и вычислены функции Гелл-Манна–Лоу $\beta(g)$ для размерностей пространства $d = 1, 2, 3$. В отличие от ранних попыток такого рода [24], металлическая и локализованная фазы рассматриваются единым образом, так что кондактанс конечной системы не имеет сингулярности в критической точке. В двумерном случае разложение $\beta(g)$ по $1/g$ согласуется с результатами σ -моделей в двухпетлевом приближении и зависит от ренормировочной схемы в высших петлях; использование же размерной регуляризации для перехода к $d = 2 + \epsilon$, по-видимому, несовместимо с физической сутью проблемы. Проведено сопоставление с результатами численного моделирования и физическим экспериментом. Обсуждаются условия наблюдения локализационного закона $\sigma(\omega) \propto -i\omega$ для проводимости и ситуация в высших размерностях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Скейлинговая теория локализации, предложенная в работе [1], основана на рассмотрении так называемого параметра Таулеса

$$g_L = \frac{J_L}{W_L} = \frac{G_L}{e^2/\hbar}, \tag{1}$$

равного полной проводимости (кондактансу) $G_L = \sigma_L L^{d-2}$ кубического блока размера L (σ_L — удельная проводимость, d — размерность пространства) в единицах e^2/\hbar , или отношению параметров J_L и W_L эффективной модели Андерсона, получаемой при составлении бесконечной системы из блоков размера L (рис. 1). Эквивалентность двух представлений следует из оценки интегралов перекрытия $J_L \sim \hbar/\tau_D$ через диффузионное время $\tau_D = L^2/D_L$, оценки W_L как расстояния Δ_L между уровнями в блоках,

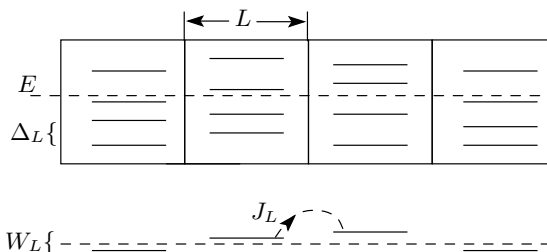


Рис. 1. Скейлинговое построение Таулеса. Бесконечная система составляется из блоков размера L ; если в каждом блоке сохранить лишь один уровень, ближайший к рассматриваемой энергии E , то возникает эффективная модель Андерсона с интегралом перекрытия J_L и разбросом уровней W_L

$\Delta_L \sim 1/\nu_F L^d$, и использования соотношения Эйнштейна $\sigma_L = e^2 \nu_F D_L$ между проводимостью σ_L и коэффициентом диффузии D_L (ν_F — плотность состояний на уровне Ферми).

*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Основной интерес представляет поведение параметра Таулеса g_L при увеличении L : если $g_L \rightarrow \infty$, то система находится в металлической фазе (гибридизация «блочных» собственных функций происходит с практически равными весами), если $g_L \rightarrow 0$, то система является андерсоновским диэлектриком (гибридизация блочных собственных функций практически не происходит, и они остаются локализованными в пределах блоков). Поскольку блок размера nL может быть получен из n^d блоков размера L , величина g_{nL} является функцией g_L , т. е. $g_{nL} = F(g_L, n)$, что при $n \rightarrow 1$ может быть записано в дифференциальной форме

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \beta(g), \quad (2)$$

т. е. в виде уравнения Гелл-Манна–Лоу [2]. Асимптотики β -функции,

$$\beta(g) = \begin{cases} d - 2, & g \gg 1, \\ \ln g, & g \ll 1, \end{cases} \quad (3)$$

получаются из очевидного поведения кондактанса в металле, $G_L = \sigma_\infty L^{d-2}$, и в диэлектрике $G_L \propto \exp\{-\text{const} \cdot L\}$. Функция $\beta(g)$ при $d \leq 2$ всюду отрицательна, что соответствует локализации всех состояний. При $d > 2$ она имеет корень g_c , соответствующий точке перехода Андерсона, со степенным поведением проводимости $\sigma \propto \tau^s$ в зависимости от расстояния до перехода τ .

Успех качественных соображений работы [1] стимулировал попытки придать им количественную форму. Вопрос о проводимости конечной системы стал предметом оживленной дискуссии [3–14] (см. обзор [15]), результатом которой явилось утверждение ландауэровского подхода [5, 12] как правильного способа описания. Этот подход сводит кинетическую задачу о проводимости к квантовомеханической задаче рассеяния.

Формула Ландауэра для строго одномерного (одноканального) проводника следует из простых соображений. Если на рассматриваемую систему слева падает единичный поток электронов (рис. 2а), то он проходит направо с вероятностью T (T — коэффициент прохождения) и отражается с вероятностью $R = 1 - T$. Ток через систему пропорционален T , тогда как разность химических потенциалов определяется разностью плотности электронов слева ($1 + R$) и справа (T), т. е. $1 + R - T = 2(1 - T)$. Поэтому проводимость системы по Ландауэру пропорциональна $T/(1 - T)$, что с учетом коэффициента дает [5]

$$G_{Land} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{T}{1 - T}. \quad (4)$$

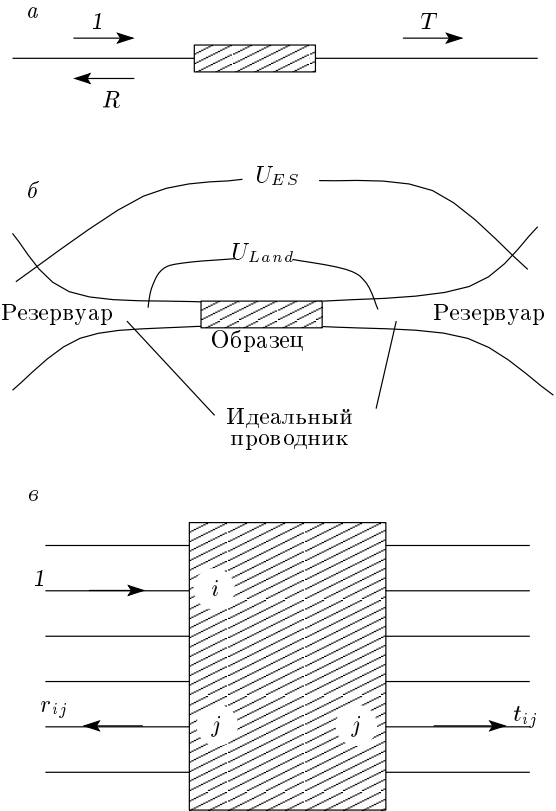


Рис. 2. а) К формуле Ландауэра (4); б) различие между формулами (4) и (5) связано с тем, что напряжение U_{ES} измеряется между двумя резервуарами, а напряжение U_{Land} — между идеальными проводниками; в) многоканальная матрица рассеяния

Несколько отличный результат был получен Эконому и Сукулисом [6] из теории линейного отклика:

$$G_{ES} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} T. \quad (5)$$

Дальнейшие исследования показали [12, 15], что формула (4) соответствует четырехконтактной, а формула (5) — двухконтактной схеме измерений (рис. 2б); различие между ними соответствует контактному сопротивлению $2\pi\hbar/e^2$ между резервуаром и идеальным проводником:

$$\frac{1}{G_{Land}} = \frac{1}{G_{ES}} - \frac{2\pi\hbar}{e^2}. \quad (6)$$

Переход от одномерного образца к d -мерному требует рассмотрения многоканального случая, который описывается матрицей рассеяния, показанной на рис. 2в: плоская волна единичной амплитуды, поступающая в канал i , дает в канале j прошедшую

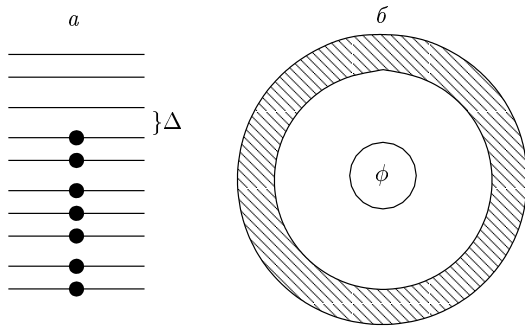


Рис. 3. При строго квантовомеханическом описании конечная система имеет в статическом пределе нулевую проводимость (а) и нулевое сопротивление (б)

волну с амплитудой t_{ij} и отраженную волну с амплитудой r_{ij} . Многоканальный аналог формулы (5) имеет вид [3, 7, 11, 15]

$$G_{ES} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{ij} |t_{ij}|^2. \quad (7)$$

Вычитание контактного сопротивления резервуара по схеме (6) на численном уровне [16] согласуется с определением Таулеса [17], связывающего проводимость с реакцией на граничные условия¹⁾. Однако многоканальные обобщения формулы (4) оказались неоднозначными [3, 8, 11, 13], и вопрос о правильном учете контактного сопротивления остается открытым.

Из сказанного выше ускользает тот факт, что проводимость конечной системы является плохо определенной величиной. При строго квантовомеханическом описании конечная система имеет дискретный спектр и основное состояние соответствует заполнению электронами нижних уровней (рис. 3а)²⁾. Если основное состояние является бестоковым, то конечная проводимость G_L может быть связана лишь с переходами в возбужденные состояния, которые отделены от основного конечной щелью Δ ; в

¹⁾ Определение Таулеса лежит в основе эквивалентности двух представлений в (1). Параметр J_L можно оценить как ширину зоны, в которую превращается уровень при периодическом повторении блока размера L : она определяется сдвигом уровня при переходе от периодических условий к антипериодическим. Определение Таулеса физически вполне удовлетворительно, но требует анализа функций распределения [17], и его трудно сформулировать в терминах усредненных величин; поэтому оно почти не используется в аналитической теории.

²⁾ Для простоты ограничиваемся невзаимодействующими электронами в случайном потенциале и рассматриваем одну проекцию спина.

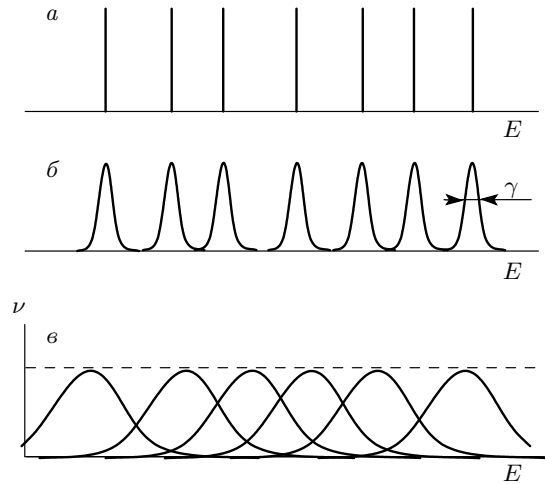


Рис. 4. Уровни дискретного спектра (а) приобретают ширину γ из-за конечного времени жизни (б). Если предел $L \rightarrow \infty$ берется до предела $\gamma \rightarrow 0$, то уширенные уровни сильно перекрываются и образуют непрерывную плотность состояний (в)

пределе нулевой частоты ω такие переходы отсутствуют и

$$\text{Re } G_L(\omega) = 0, \quad \omega \rightarrow 0. \quad (8)$$

Любопытно, что в геометрии Ааронова–Бома (рис. 3б) основное состояние является токовым, если магнитный поток ϕ , проходящий через кольцеобразный проводник, не равен целому или полужелому числу квантов $\phi_0 = \hbar c/e$ [14]; через систему протекает незатухающий ток при отсутствии напряжения, так что сопротивление R_L также обращается в нуль,

$$\text{Re } R_L(\omega) \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow 0 \quad (9)$$

(противоречия с формулой (8) нет ввиду наличия $\text{Im } G_L(\omega)$).

Указанная проблема хорошо известна. Так, формулы теории линейного отклика снабжены предписанием, что входящие в них δ -функции должны быть уширены на величину γ , после чего берется термодинамический предел $L \rightarrow \infty$ и лишь затем предел $\gamma \rightarrow 0$. Фактически для уровней дискретного спектра вводится затухание γ , в результате чего возникает непрерывная плотность состояний (рис. 4). Для конечной системы указанная процедура становится невозможной и затухание γ должно оставаться конечным. Возникает вопрос о способе введения такого затухания и о его зависимости от параметров.

Попытки изучения этого вопроса предпринимались в работах [18–21], основанных на «модели обо-

лочек», разработанной в ядерной физике для описания взаимодействия дискретного спектра «мишени» с континуальным спектром рассеиваемых частиц [22]. К сожалению, в этих работах на ранней стадии вводился формализм σ -моделей, что сильно затемняло физику вопроса. Кроме того, затравочный коэффициент диффузии считался заданной константой, тогда как он сам зависит от степени открытости системы.

При выводе формул Ландауэра из теории линейного отклика [6–8, 15] указанная проблема обходится следующим образом: считается, что к изучаемой системе присоединены контакты из идеального проводника, которые могут быть сделаны достаточно массивными; тогда спектр системы становится квази-прерывным и затухание γ можно устремить к нулю. Таким образом, ландауэровская проводимость относится не к изучаемой системе, а к составной системе «образец + подводящие провода». Это отчетливо проявляется в том, что матричные элементы, входящие в формулу Кубо, определяются интегрированием по области идеального проводника.

Возникает вопрос, в какой степени формулы (4)–(7) отражают внутренние свойства изучаемой системы. Для большей наглядности введем потенциальный барьер на границе образца и идеального проводника. При стремлении высоты барьера к бесконечности ландауэровское сопротивление неограниченно возрастает, тогда как с самой системой ничего не происходит. Напротив, при уменьшении высоты барьера контактное сопротивление на границе исчезает, но возникает опасность сильного влияния окружения на изучаемый образец.

Еще один вопрос связан с тем, что проводимость конечной системы должна быть тесно связана с макроскопическим коэффициентом диффузии $D(\omega, q)$, в общем случае обладающим пространственной и временной дисперсией. В ландауэровском подходе эта связь совершенно не просматривается.

Таким образом, к настоящему времени остаются непроясненными вопросы:

- а) об исключении контактного сопротивления резервуара в многоканальном случае;
- б) о связи формул (4), (5), (7) с внутренними свойствами изучаемой системы;
- в) о связи проводимости конечной системы с коэффициентом диффузии $D(\omega, q)$.

В настоящей работе предлагаются ответы на поставленные вопросы. Они получены в рамках двух подходов: 1) самосогласованной теории локализации Вольхардта–Вольфле [23, 24] и 2) квантовомеханического анализа, основанного на модели оболочек

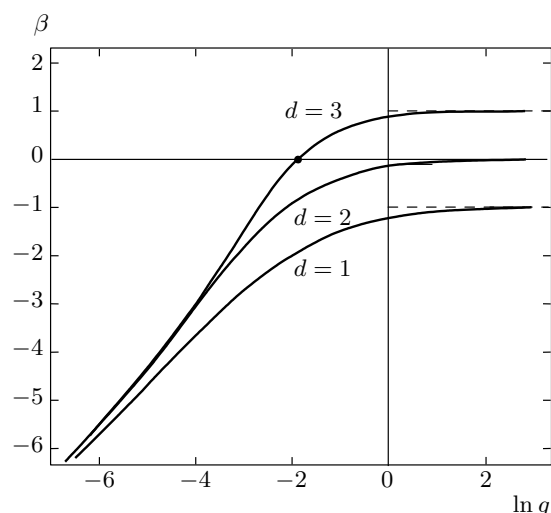


Рис. 5. Функции $\beta(g)$ для $d = 1, 2, 3$, полученные в настоящей работе

чек [18, 22]. Оба подхода приводят к одинаковому определению проводимости конечной системы, тесно связанному с определением Таулеса; это является сильным аргументом в пользу адекватности самосогласованной теории. Далее в рамках этой теории вычисляются функции Гелл-Манна–Лоу для $d = 1, 2, 3$ (рис. 5); в отличие от аналогичного вычисления в работе [24] функция $\beta(g)$ не имеет сингулярности в неподвижной точке g_c . Последнее связано с тем, что локализованная и металлическая фазы рассматриваются единым образом, так что проводимость конечной системы не имеет сингулярности в критической точке; это соответствует современным представлениям теории критических явлений [25, 26].

Общая схема теории состоит в следующем. Конечная система является топологически квазиуниверсальной, так что ее эффективная размерность меньше нижней критической. Все состояния такой системы формально локализованы, и можно ввести корреляционный радиус ξ_{0D} ; для него справедливо скейлинговое соотношение

$$\frac{\xi_{0D}}{L} = F\left(\frac{L}{\xi}\right), \quad (10)$$

аналогичное таковому для квазиодномерных систем [27–30]; здесь ξ — корреляционный радиус бесконечной d -мерной системы. Коэффициент диффузии имеет поведение, характерное для диэлектрической фазы,

$$D(\omega, 0) = -i\omega\xi_{0D}^2, \quad (11)$$

и обращается в нуль в соответствии с выражениями (8), (9). Но сказанное справедливо лишь для закрытых систем; в открытой системе появляется конечный коэффициент диффузии D_L , а для параметра Таулеса выводится результат

$$g_L = F_1 \left(\frac{\xi_0 D}{L} \right). \quad (12)$$

Если в уравнении Гелл-Манна–Лоу (2) заменить $\ln L$ на $\ln(L/\xi)$, то g_L представляется как функция L/ξ . Эта функция определяется из соотношений (10), (12) и позволяет, в свою очередь, восстановить $\beta(g)$.

Работа организована следующим образом. В разд. 2 обсуждается ранняя попытка скейлинга, предпринятая Вольхардтом и Вольфле [24], и сформулированы основные отличия от нее настоящей работы. В разд. 3 рассматривается корреляционный радиус $\xi_0 D$ и выводится скейлинговое соотношение (10) для $d < 4$. В разд. 4 проводится переход к открытым системам и получается результат типа (12). В разд. 5 такой же результат получается из модели оболочек; при этом выясняется его физический смысл и обсуждается зависимость от геометрии контактов. В разд. 6 вычисляются функции $\beta(g)$ для $d = 1, 2, 3$ и обсуждается их разложение по $1/g$, которое сопоставляется с результатами σ -моделей [31, 32]; показано, что использование размерной регуляризации в σ -моделях несовместимо с физической сутью проблемы. В разд. 7 проводится сопоставление с результатами численного моделирования [33, 34] и физическим экспериментом [35, 36]. В разд. 8 обсуждается ситуация в высших размерностях $d \geq 4$. В разд. 9 подводятся итоги проведенного рассмотрения и обсуждаются его следствия для распределения кондактансов, пространственной дисперсии коэффициента диффузии и условий наблюдения локализационного закона $\sigma(\omega) \propto -i\omega$.

2. САМОСОГЛАСОВАННАЯ ТЕОРИЯ И СКЕЙЛИНГ

Самосогласованная теория локализации Вольхардта–Вольфле основана на существовании диффузионного полюса в неприводимой четыреххвостке $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q})$, входящей в уравнение Бете–Солпитера и играющей роль вероятности перехода $W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ в квантовом кинетическом уравнении. Использование аппроксимации типа τ -приближения, $D \propto \langle U \rangle^{-1}$, где $\langle \dots \rangle$ — усреднение по импульсам, приводит к урав-

нению самосогласования [23, 24], которое будем писать в виде [30]³⁾

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{D(\omega)}{D_{min}} + \Lambda^{2-d} \int_0^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[-i\omega/D(\omega)] + q^2} \quad (13)$$

(пределы интегрирования пишем для модуля q). Здесь E — энергия порядка ширины зоны, W — амплитуда случайного потенциала, Λ — параметр обрезания по импульсу, D_{min} — характерный масштаб коэффициента диффузии, соответствующий моттовской минимальной проводимости σ_{min} .

Металлический режим возможен лишь при $d > 2$, когда базовый интеграл

$$I(m) = \int_0^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{m^2 + q^2} \quad (14)$$

конечен при $m = 0$; вводя расстояние τ до перехода, имеем

$$D = D_{min} \tau, \quad \tau = \frac{E^2}{W^2} - I(0)\Lambda^{2-d}, \quad (15)$$

т. е. индекс проводимости s равен единице. В локализованной фазе справедлива подстановка $D = -i\omega\xi^2$ и уравнение (13) определяет корреляционный радиус ξ ; в частности, для $d > 2$

$$\xi \sim a |\tau|^{-\nu}, \quad \nu = \begin{cases} 1/(d-2), & 2 < d < 4, \\ 1/2, & d > 4. \end{cases} \quad (16)$$

Попытка использования выражения (13) для вывода скейлинговых уравнений сделана в работе [24] и основана на двух положениях.

1. *Модификация соотношения Эйнштейна.* Согласно работе [24], соотношение Эйнштейна в локализованной фазе модифицируется из-за эффектов нелокальности и приобретает дополнительный экспоненциальный множитель:

$$\sigma_L \sim e^{2\nu_F D L} \exp(-L/\xi). \quad (17)$$

Для получения этого результата рассматривается изменение электронной плотности $\rho(x)$, индуцированное скалярным потенциалом $\varphi(x)$:

$$\rho(x) = \int_{-L/2}^{L/2} \alpha(x-x') \varphi(x') dx', \quad (18)$$

³⁾ Уравнение типа (13) можно вывести путем приближенного решения уравнения Бете–Солпитера [23] или в результате детального анализа спектральных свойств квантового оператора столкновений [37]. Возможность пренебрежения пространственной дисперсией коэффициента диффузии обоснована в работе [37].

где $\alpha(x - x')$ — поляризуемость,

$$\alpha(x - x') = -e^2 \nu_F \left[\delta(x - x') - \frac{1}{2\xi} \exp\left(-\frac{|x - x'|}{\xi}\right) \right]. \quad (19)$$

Для замкнутой системы поток электронов через границы отсутствует, поэтому диффузионный ток

$$j_{diff}(x) = -D_L \frac{d\rho(x)}{dx}$$

на краях системы ($x = \pm L/2$) равен электрическому току $j_e(x) = \sigma_L E$ с обратным знаком; это определяет σ_L . Проводя такие вычисления для

$$\varphi(x) = \varphi_0 - Ex, \quad (20)$$

имеем

$$\rho(x) = e^2 \nu_F \left[E \left(\frac{L}{2} + \xi \right) \exp\left(-\frac{L}{2\xi}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{\xi}\right) - \varphi_0 \exp\left(-\frac{L}{2\xi}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\xi}\right) \right], \quad (21)$$

так что

$$j_e\left(\pm \frac{L}{2}\right) = e^2 \nu_F D_L \left[\frac{\mp \varphi_0 + E(L/2 + \xi)}{2\xi} + \frac{\pm \varphi_0 + E(L/2 + \xi)}{2\xi} \exp\left(-\frac{L}{\xi}\right) \right]. \quad (22)$$

При выборе $\varphi_0 = \pm E(L/2 + \xi)$ имеем

$$j_e\left(\pm \frac{L}{2}\right) = e^2 \nu_F D_L \left(1 + \frac{L}{2\xi} \right) \exp\left(-\frac{L}{\xi}\right) E \quad (23)$$

в согласии с выражением (16). Нетрудно видеть, что этот результат является математическим курьезом и связан с существованием (в рамках принятых приближений) нефизической реакции на постоянный потенциал φ_0 . Несогласованность этих приближений очевидна уже из того, что при $\varphi_0 \neq 0$ значения σ_L , определяемые по $j_e(L/2)$ и $j_e(-L/2)$, не совпадают⁴⁾. Разумеется, корректное рассмотрение приведет к справедливости соотношения Эйнштейна: в рамках самосогласованной теории функции $\sigma(\omega, q)$ и $D(\omega, q)$ считаются независимыми от q [37], что соответствует локальному отклику в координатном представлении; соотношение между ними

⁴⁾ Фактически ядро $\alpha(x, x')$ должно строиться в виде бинарного разложения по собственным функциям оператора диффузии. Кроме того, для открытых систем интегрирование в (18) должно проводиться по всему пространству.

носит локальный характер и не может модифицироваться при ограничении размера системы. Отсутствие множителя $\exp(-L/\xi)$ является катастрофическим для работы [24], так как без него не получается результат $g_L \sim \exp(-\text{const} \cdot L)$ для локализованной фазы.

2. *Модификация уравнения самосогласования.* Для конечной системы в уравнении (13) вводится обрезание на нижнем пределе,

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{D_L}{D_{min}} + \Lambda^{2-d} \int_{\sim 1/L}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{m^2 + q^2}, \quad (24)$$

что после вычитания такого же уравнения с $L = \infty$ дает

$$D_L = D_\infty + D_{min} \Lambda^{2-d} \int_0^{\sim 1/L} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{m^2 + q^2}, \quad (25)$$

$$m = \xi^{-1}.$$

Поскольку $D_\infty \sim \tau$ в металлической и $D_\infty = 0$ в локализованной фазе, коэффициент диффузии D_L конечной системы имеет сингулярность в критической точке. Это противоречит современным представлениям теории критических явлений [25, 26], согласно которым фазовый переход возникает лишь в термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$.

Излагаемая ниже теория также основана на уравнении (13), а указанные дефекты устраняются следующим образом. Конечная система топологически квазиуниверсальна, и все ее состояния формально локализованы, хотя эффективный корреляционный радиус ξ_{0D} совпадает с ξ только в диэлектрическом режиме, тогда как в металле $\xi_{0D} > L$. В результате D_∞ обращается в нуль как в локализованной, так и в металлической фазе. С учетом этого уравнение (25) дает почти правильный результат: последний, как показано ниже, имеет вид

$$D_L = D_{min} \Lambda^{2-d} \frac{1}{L^d} \sum_q \frac{\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}{m^2 + q^2} \Big|_{|\mathbf{x}| \sim L}, \quad (26)$$

$$m = (\xi_{0D})^{-1}$$

и отличается от (25) заменой интеграла на дискретную сумму и конкретизацией способа обрезания. Последнее осуществляется осциллирующим множителем $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$, который при $|\mathbf{x}| \sim L$ эффективно ограничивает вклад в сумму значениями $|\mathbf{q}| \lesssim 1/L$. Указанные модификации принципиальны для получения результата $D_L \sim \exp(-L/\xi)$ в локализованной фазе.

Использование квазиульмерной идеологии не является чисто теоретической конструкцией, но позволяет различить реальное поведение открытых и закрытых систем. Отсутствие сингулярностей в системах малых размеров также проверяется экспериментально. Таким образом, излагаемая теория отличается от теории работы [24] на уровне наблюдаемых следствий.

3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ РАДИУС КВАЗИУЛЬМЕРНОЙ СИСТЕМЫ

3.1. Размерности $2 < d < 4$

Конечная система рассматривается как квазиульмерная, и ее корреляционный радиус ξ_{0D} может быть исследован аналогично тому, как это сделано в работе [30] для квазиодномерных систем. В конечной системе базовый интеграл (14) заменяется на дискретную сумму

$$I(m) = \frac{1}{L^d} \sum_{|\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{1}{m^2 + q^2}, \quad m^{-1} = \xi_{0D}, \quad (27)$$

где разрешенные значения \mathbf{q} имеют вид $2\pi\mathbf{s}/L$, а $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_d)$ — d -мерный вектор с целочисленными компонентами $s_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Мы приняли периодические граничные условия по всем направлениям, что соответствует закрытой системе (разд. 4). Член суммы с $\mathbf{q} = 0$ обеспечивает расходимость суммы $I(m)$ при $m \rightarrow 0$, благодаря которой система всегда оказывается в локализованном режиме. Для (27) удобно провести следующее разбиение

$$I(m) = \frac{1}{L^d} \frac{1}{m^2} + \frac{1}{L^d} \sum_{\substack{\mathbf{q} \neq 0 \\ |\mathbf{q}| < \Lambda}} \left(\frac{1}{m^2 + q^2} - \frac{1}{q^2} \right) + \frac{1}{L^d} \sum_{\substack{\mathbf{q} \neq 0 \\ |\mathbf{q}| < \Lambda}} \frac{1}{q^2} \equiv I_1(m) + I_2(m) + I_3(0), \quad (28)$$

где мы выделили член с $\mathbf{q} = 0$, а к оставшейся сумме добавили и вычли такую же сумму с $m = 0$. Во втором члене $I_2(m)$ можно перейти к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$ и положить $\mathbf{q} = 2\pi\mathbf{s}/L$, после чего он представляется в виде $L^{2-d}H_0(mL)$ (в пренебрежении поправками порядка $m^2\Lambda^{d-4}$). Третий член в (28) при $L \rightarrow \infty$ может быть вычислен путем перехода от суммирования к интегрированию. При конечных L он имеет структуру⁵⁾

⁵⁾ Это получается при использовании α -представления (см. Приложение) с учетом обрезания $|q_i| < \Lambda$.

$$I_3(0) = \Lambda^{d-2} \left\{ b_0 + b_1 \left(\frac{a}{L} \right)^{d-2} + b_2 \left(\frac{a}{L} \right) + b_3 \left(\frac{a}{L} \right)^2 + \dots \right\}, \quad (29)$$

где мы приняли $a = \Lambda^{-1}$. Подставляя (28), (29) в уравнение самосогласования (13), имеем

$$\left(\frac{L}{a} \right)^{d-2} \left[\tau + O(m^2 a^2) + O\left(\frac{a}{L} \right) \right] = b_1 + H_0(mL) + \frac{1}{(mL)^2}, \quad (30)$$

где определение $\tau = E^2/W^2 - b_0$ совпадает с (15), так как b_0 соответствует значению $I(0)$, вычисленному в интегральном приближении. Согласно (30), зависимость ξ_{0D} от τ является регулярной. Выражая τ через корреляционный радиус ξ исследуемой d -мерной системы ($\xi^{-1/\nu} \sim |\tau| = \pm\tau$) и опуская члены, исчезающие при $a \rightarrow 0$, имеем

$$\pm c_d \left(\frac{L}{\xi} \right)^{d-2} = H\left(\frac{L}{\xi_{0D}} \right), \quad (31)$$

$$H(z) = b_1 + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\mathbf{s} \neq 0} \left(\frac{1}{|\mathbf{s}|^2 + (z/2\pi)^2} - \frac{1}{|\mathbf{s}|^2} \right) + \frac{1}{z^2}, \quad (32)$$

что и дает скейлинговое соотношение (10), связывающее ξ_{0D}/L с ξ/L и состоящее из двух ветвей (c_d — положительные коэффициенты, введенные в [30]). Асимптотики $H(z)$,

$$H(z) = \begin{cases} 1/z^2, & z \ll 1, \\ -A(z - z^*), & z \rightarrow z^*, \\ -c_d z^{d-2}, & z \gg 1, \end{cases} \quad (33)$$

следуют из того, что при малых z функция $H(z)$ определяется последним членом в (32), при больших z сумму по \mathbf{s} можно заменить интегралом, тогда как вблизи корня z^* (соответствующего точке перехода) справедливо регулярное разложение. При произвольных z сумма по \mathbf{s} находится численно: вид функции $H(z)$ при $d = 3$ показан на рис. 6. Если ввести переменные

$$y = \xi_{0D}/L, \quad x = \xi/L, \quad (34)$$

то для зависимости $y(x)$ имеем (рис. 7)

$$y = \begin{cases} (c_d/x^{d-2})^{1/2}, & y \gg 1, \\ y^* \pm \text{const}/x^{d-2}, & y \rightarrow y^*, \\ x, & y \ll 1. \end{cases} \quad (35)$$

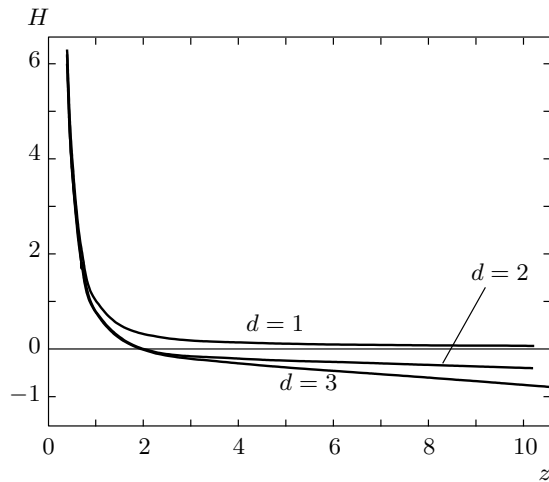


Рис. 6. Функции $H(z)$ для $d = 1, 2, 3$

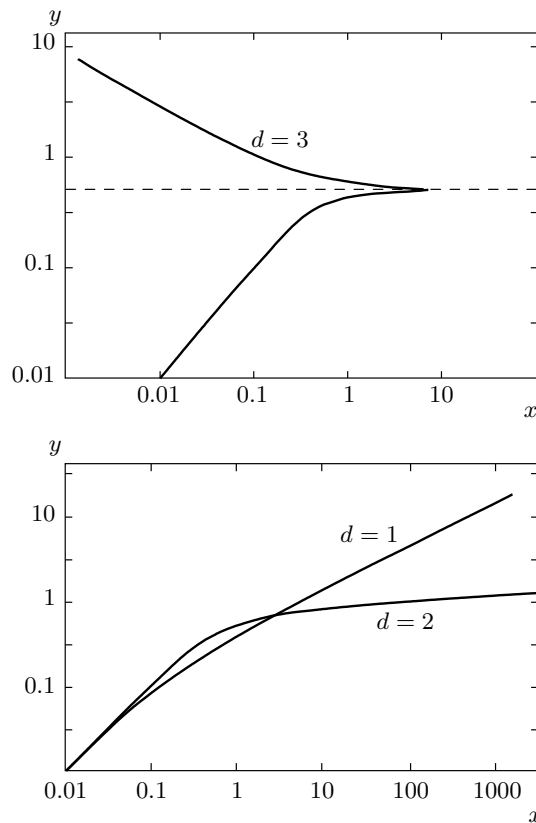


Рис. 7. Зависимости $y = \xi_{0D}/L$ от $x = \xi/L$ для $d = 1, 2, 3$

Значение b_1 в (29) не является универсальным, а зависит от характера обрезания. Ниже при $d = 3$ используется значение $b_1 = -0.226$ для сферического обрезания ($|q| < \Lambda$), но в общем случае его нуж-

но считать подгоночным параметром⁶⁾. Поправки к скейлингу могут быть получены из (30) и имеют такой же вид, как для квазиодномерных систем. Это согласуется с утверждением работы [30] об универсальности их структуры.

3.2. Двумерный случай

В двумерном случае имеем

$$I_3(0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{L}{a} + b_1 + \dots, \quad \frac{E^2}{W^2} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\xi}{a}, \quad (36)$$

и скейлинговое соотношение имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\xi}{L} \right) = H \left(\frac{L}{\xi_{0D}} \right) \quad (37)$$

с прежним определением $H(z)$ (см. рис. 6). Используя асимптотики

$$H(z) = \begin{cases} 1/z^2, & z \ll 1, \\ -(1/2\pi) \ln z, & z \gg 1 \end{cases} \quad (38)$$

имеем $y = x$ для $x \ll 1$ и $y \sim (\ln x)^{1/2}$ для $x \gg 1$ (см. рис. 7). Ниже используется значение параметра $b_1 = 0.1780$ для сферического обрезания.

3.3. Размерности $d < 2$

При $d < 2$ вычитание члена с $m = 0$ не требуется и предел $\Lambda \rightarrow \infty$ можно взять непосредственно в (27). Скейлинговое соотношение имеет вид

$$c_d \left(\frac{L}{\xi} \right)^{d-2} = H \left(\frac{L}{\xi_{0D}} \right), \quad (39)$$

$$H(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\mathbf{s}} \left(\frac{1}{(z/2\pi)^2 + |\mathbf{s}|^2} \right)$$

и состоит из одной ветви, так как функция $H(z)$ является положительной (см. рис. 6). Используя асимптотики

$$H(z) = \begin{cases} 1/z^2, & z \ll 1, \\ c_d/z^{2-d}, & z \gg 1 \end{cases} \quad (40)$$

имеем $y = x$ для $x \ll 1$ и $y \sim x^{(2-d)/2}$ для $x \gg 1$ (см. рис. 7). В одномерном случае функция $H(z)$ считается точно (см. ниже выражения (118)).

⁶⁾ Для кубического ($|q_i| < \Lambda$) обрезания $b_1 = -0.0314$.

4. ПЕРЕХОД К ОТКРЫТЫМ СИСТЕМАМ

4.1. Различие открытых и закрытых систем

Рассмотрим эффективное уравнение диффузии,

$$\frac{\partial f}{\partial t} - D \nabla^2 f = 0, \quad (41)$$

описывающее распределение электронов $f(\mathbf{x}, t)$. В бесконечной системе оператор $-\nabla^2$ имеет собственные функции $e_s(\mathbf{x}) \sim \exp(i\mathbf{q}_s \cdot \mathbf{x})$ и собственные значения $\lambda_s = q_s^2$, тогда как в конечной системе $e_s(\mathbf{x})$ и λ_s становятся нетривиальными. Они определяют эволюцию начального распределения $f_0(\mathbf{x})$ со временем:

$$f(\mathbf{x}, t) = \sum_s A_s \exp(-D\lambda_s t) e_s(\mathbf{x}), \quad (42)$$

$$A_s = (f_0, e_s).$$

Различие закрытых и открытых систем может быть сформулировано на абстрактном уровне. В первом случае минимальное собственное значение λ_0 равно нулю и соответствует постоянной собственной функции

$$\lambda_0 = 0, \quad e_0(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad (43)$$

тогда как во втором случае

$$\lambda_0 > 0, \quad e_0(\mathbf{x}) \neq \text{const}. \quad (44)$$

В первом случае уравнение (42) при $t \rightarrow \infty$ дает

$$f(\mathbf{x}, t)|_{t \rightarrow \infty} = \text{const} = \langle f_0 \rangle, \quad (45)$$

т. е. распределение $f(\mathbf{x}, t)$ стремится к постоянному пределу, равному среднему значению $f_0(\mathbf{x})$ по координатам. Следовательно, окружение не влияет на естественный процесс релаксации, а полное число частиц сохраняется. Во втором случае

$$f(\mathbf{x}, t)|_{t \rightarrow \infty} = A_0 e_0(\mathbf{x}) \exp(-D\lambda_0 t), \quad (46)$$

т. е. распределение по \mathbf{x} стабилизируется, но его амплитуда уменьшается из-за ухода частиц через границы системы. По той же причине их плотность на краях меньше, чем в центре.

Приведем примеры. Пусть одномерная система находится при $0 \leq x \leq L$. Для граничных условий бловского типа

$$f(L) = f(0)e^{i\varphi} \quad (47)$$

разрешенные значения q имеют вид $q_s = (2\pi s + \varphi)/L$ с целым s , так что закрытой системе соответствует

$\varphi = 0$, а предельно открытой — $\varphi = \pi$, т. е. периодические и антипериодические граничные условия. Для более реалистических граничных условий

$$f'_x(0) = \kappa f(0), \quad f'_x(L) = -\kappa f(L) \quad (48)$$

система закрыта при $\kappa = 0$ ввиду отсутствия потока через границу. Предельная открытость достигается при $\kappa = \infty$, т. е. для нулевых граничных условий.

4.2. Затухание электронных состояний и конечность коэффициента диффузии

В открытой системе электроны могут уходить через границы системы, что приводит к конечному времени жизни их состояний. Покажем, что это обеспечивает появление конечного статического коэффициента диффузии.

Рассмотрим коррелятор плотности

$$\mathcal{K}_\omega(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle G_{E+\omega}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_E^A(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle, \quad (49)$$

где G^R и G^A — запаздывающая и опережающая функции Грина. Нетрудно показать, что

$$\mathcal{K}_\omega(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{E + \omega - \epsilon + i0} \times$$

$$\times \frac{1}{E - \omega' - \epsilon - i0} \rho_{\epsilon, \epsilon + \omega'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (50)$$

где $\rho_{\epsilon, \epsilon + \omega}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — спектральная плотность Березинского–Горькова, фурье-образ которой связан с поляризуемостью $\alpha(\omega, q)$ системы [37],

$$\rho_{\epsilon, \epsilon + \omega}(q) = -\frac{\text{Im} \alpha_\epsilon(\omega, q)}{\pi e^2 \omega}. \quad (51)$$

Используя определения кинетических коэффициентов и аналитические свойства обобщенных восприимчивостей [38], нетрудно показать, что [37]

$$\mathcal{K}_\omega(q) = \frac{2\pi\nu_F}{-i\omega + D(\omega, q)q^2}, \quad (52)$$

где $D(\omega, q)$ — наблюдаемый коэффициент диффузии. Подчеркнем, что этот результат имеет общий характер и не ограничен металлической фазой.

Конечность времени жизни электронных состояний приводит к замене мнимых добавок $\pm i0$, входящих в определение запаздывающей и опережающей функций Грина, на $\pm i\gamma$; аналогичные замены возникают в (50). Повторяя указанные вычисления, получим, что в выражении (52) происходит замена

$$-i\omega \rightarrow -i\omega + 2\gamma, \quad (53)$$

которую нужно сделать как в слагаемом $-i\omega$, так и в $D(\omega, q)$. При этом в локализованной фазе остается инвариантной комбинация

$$\frac{-i\omega}{D(\omega, q)} = \frac{-i\omega}{(-i\omega)\xi^2} \rightarrow \frac{-i\omega + 2\gamma}{(-i\omega + 2\gamma)\xi^2}, \quad (54)$$

что имеет простой физический смысл: уширение уровней производилось при неизменных собственных функциях, а потому не изменяется и характеризующий их корреляционный радиус ξ . В статическом пределе происходит замена $D(\omega, q) \rightarrow D_L = 2\gamma\xi^2$, т. е. возникает конечный коэффициент диффузии D_L .

4.3. Модификация уравнения самосогласования

В разд. 3 мы видели, что $D(\omega) \rightarrow 0$ для закрытых систем, что прямо связано с существованием разрешенного значения $\mathbf{q} = 0$; уравнение самосогласования (13) имеет вид

$$\frac{E^2}{W^2} = \Lambda^{2-d} \frac{1}{L^d} \sum_q^{(c)} \frac{1}{m^2 + q^2}, \quad m^{-1} = \xi_{0D}. \quad (55)$$

Для открытой системы корреляционный радиус остается неизменным, но возникает конечный коэффициент диффузии D_L :

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{D_L}{D_{min}} + \Lambda^{2-d} \frac{1}{L^d} \sum_q^{(o)} \frac{1}{m^2 + q^2}. \quad (56)$$

Мы отмечаем как (c) и (o) закрытую и открытую системы, которым соответствует разный набор разрешенных значений \mathbf{q} . Беря разность (55) и (56), имеем

$$D_L = D_{min} \Lambda^{2-d} \frac{1}{L^d} \left(\sum_q^{(c)} \frac{1}{m^2 + q^2} - \sum_q^{(o)} \frac{1}{m^2 + q^2} \right), \quad (57)$$

что и дает определение коэффициента диффузии конечной системы. Это определение содержит существенный произвол, так как конкретный выбор открытой и закрытой систем является предметом соглашения. Для блоховских граничных условий⁷⁾

⁷⁾ В общем случае перед суммой по \mathbf{q} вместо L^{-d} может стоять более сложный нормировочный множитель (см. (108)), который при неаккуратном обращении дает степенные поправки по $1/L$, разрушающие экспоненту в (59). Такие проблемы отсутствуют лишь для собственных функций в виде плоских волн, которые соответствуют блоховским условиям (47). Более реалистичные граничные условия (48) рассмотрены в разд. 5.7.

(47) в качестве эталонов естественно принять системы с $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$,

$$g_L = L^{d-2} \frac{1}{L^d} \left(\sum_q^{(\varphi=0)} \frac{1}{m^2 + q^2} - \sum_q^{(\varphi=\pi)} \frac{1}{m^2 + q^2} \right), \quad (58)$$

где мы перешли от D_L к g_L , положив $D_{min} \Lambda^{2-d} = 1/\hbar v_F$. Выражение (58) естественно называть определением по Таулесу, поскольку g_L определяется изменением граничных условий от периодических к антипериодическим⁸⁾. Такое изменение будем производить только вдоль одной из координатных осей, оставляя периодические условия по остальным направлениям: согласно разд. 5, это соответствует естественной геометрии измерений.

Определение (58) обеспечивает экспоненциальное убывание D_L в локализованной фазе (см. Приложение),

$$g_L = L^{d-2} \frac{4\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{d/2}} m^{d-2} \left(\frac{mL}{2} \right)^{(1-d)/2} e^{-mL}. \quad (59)$$

Происхождение экспоненты можно пояснить следующим образом. Как известно [39], при оценке интегралов от быстроосциллирующих функций,

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx, \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (60)$$

существенны аналитические свойства $f(x)$. Если $f(x)$ имеет на действительной оси скачок n -й производной, то $f_\omega \sim \omega^{-n-1}$. В частности, случай $n = 0$ обычно реализуется при вычислении интеграла в конечных пределах. Если же функция $f(x)$ регулярна на действительной оси, то контур интегрирования смещается в верхнюю полуплоскость и интеграл оказывается экспоненциально малым,

$$f_\omega \sim \exp(-\text{const} \cdot \omega). \quad (61)$$

Аналогичная ситуация имеет место при аппроксимации интеграла дискретной суммой,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx h \sum_{s=-\infty}^{\infty} f(x_s)|_{x_s=hs}, \quad (62)$$

⁸⁾ Строго говоря, в оригинальном определении Таулеса имеются в виду граничные условия для электронных волновых функций, а здесь — для эффективной задачи диффузии. По-видимому, это наиболее точное соответствие, которое можно установить в терминах усредненных величин (см. сноску 2).

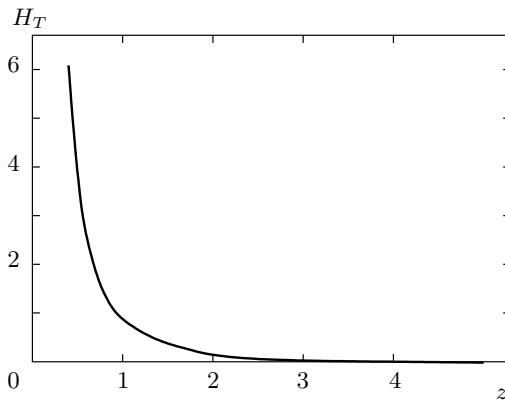


Рис. 8. Функция $H_T(z)$, соответствующая определению по Таулесу, для $d = 1, 2, 3$. В масштабе рисунка все три кривые совпадают

что становится ясным при использовании формулы Пуассона для суммирования [40]:

$$h \sum_{s=-\infty}^{\infty} f(x_s)|_{x_s=hs} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(i \frac{2\pi kx}{h}\right) dx. \quad (63)$$

Член с $k = 0$ соответствует интегралу (62), тогда как поправка к нему имеет порядок $\exp(-\text{const}/h)$. В выражении (58) две суммы по \mathbf{q} в непрерывном приближении равны друг другу и различаются лишь при учете эффектов дискретности, которые ввиду $h \sim 1/L$ имеют порядок $\exp(-\text{const} \cdot L)$.

Результат (58) может быть записан в виде скейлингового соотношения:

$$g_L = H_T\left(\frac{L}{\xi_{0D}}\right), \quad (64)$$

$$H_T(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\mathbf{t}} \frac{(-1)^{2t_1}}{|\mathbf{t}|^2 + (z/2\pi)^2},$$

где суммирование происходит по вектору $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_d)$, компоненты которого t_i пробегают целые значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ при $i = 2, \dots, d$ и полуцелые значения $0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots$ при $i = 1$. Функция $H_T(z)$ всюду положительна (рис. 8) и имеет асимптотики

$$H_T(z) = \begin{cases} 1/z^2, & z \ll 1, \\ (1/\pi) (z/2\pi)^{(d-3)/2} e^{-z}, & z \gg 1. \end{cases} \quad (65)$$

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ ОБОЛОЧЕК

Модель оболочек разработана в ядерной физике для описания взаимодействия дискретного спектра мишени с непрерывным спектром рассеиваемых частиц [22]. В работе [18] ее предложено использовать для описания составной системы «образец + подводющие провода». Проиллюстрируем этот подход на простых моделях физики твердого тела, а затем перейдем к рассмотрению многоканального случая⁹⁾.

5.1. Связь конечной и бесконечной цепочек

Рассмотрим модель, состоящую из двух цепочек — бесконечной верхней ($N \rightarrow \infty$) и конечной нижней (рис. 9a). Для оценок будем считать, что цепочки описываются простейшей моделью Андерсона

$$J\psi_{n+1} + J\psi_{n-1} + \epsilon_n\psi_n = E\psi_n, \quad (66)$$

хотя для большей части изложения это несущественно; верхнюю цепочку считаем идеальным проводником ($\epsilon_n = 0$). В качестве возмущения введем интеграл перекрытия V между узлами n_0 и m_0 двух цепочек (рис. 9a). Матрица гамильтониана в нулевом приближении является блочно-диагональной, а возмущение соответствует появлению недиагональных элементов V в n_0 -й строке и m_0 -м столбце и наоборот; таким образом, матричные элементы оператора возмущения имеют вид

$$V_{nn'} = V (\delta_{nn_0}\delta_{n'm_0} + \delta_{nm_0}\delta_{n'n_0}). \quad (67)$$

Тогда матричное уравнение Дайсона $G = G_0 + G_0VG$ при записи в компонентах имеет вид

$$G_{nn'} = G_{nn'}^0 + G_{nn_0}^0 V G_{m_0n'} + G_{nm_0}^0 V G_{n_0n'}, \quad (68)$$

где $G_{nn'}$ — полная функция Грина системы, $G_{nn'}^0$ — невозмущенная функция Грина, соответствующая двум независимым цепочкам. Считаем, что индекс n пробегает сначала значения $1, 2, \dots, N$ на первой цепочке, а затем значения $N+1, N+2, \dots, N+M$ на второй цепочке; узлы последней будем нумеровать также индексом m . Уравнение (68) легко решается: полагая $n = n_0$ и $n = m_0$, получим замкнутую систему для $G_{n_0n'}$ и $G_{m_0n'}$, решение которой подставляется в (68). Полное выражение для $G_{nn'}$ довольно

⁹⁾ Раздел 5 содержит вывод соотношения (64) другим способом и может быть опущен читателем, интересующимся только результатами.

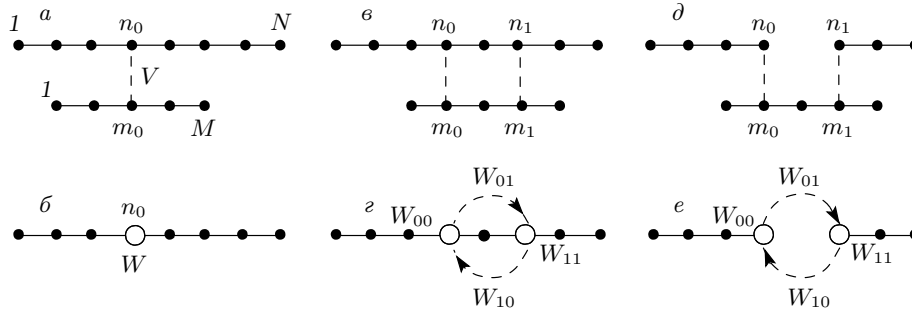


Рис. 9. а) Слабая связь V между двумя цепочками и ее эквивалентная схема в подпространстве 1 (б). в) Две слабые связи между цепочками и соответствующая эквивалентная схема (г). д) Разорванная верхняя цепочка и эффективные переходы между ее частями (е)

громоздко, поэтому приведем только его проекции на подпространство 1 верхней цепочки,

$$G_{nn'} = G_{nn'}^0 + G_{nn_0}^0 \frac{V^2 G_{m_0 m_0}^0}{1 - V^2 G_{m_0 m_0}^0 G_{n_0 n_0}^0} G_{n_0 n'}, \quad (69)$$

и на подпространство 2 нижней цепочки,

$$G_{mm'} = G_{mm'}^0 + G_{m m_0}^0 \times \frac{V^2 G_{n_0 n_0}^0}{1 - V^2 G_{m_0 m_0}^0 G_{n_0 n_0}^0} G_{m_0 m'}. \quad (70)$$

Исследование выражений (69), (70) обнаруживает следующие качественные моменты.

1. *Эффективный рассеиватель.* Если ограничиться движением по верхней цепочке, то возмущение (67) эквивалентно помещению в точку n_0 примесного атома (рис. 9б), которому соответствует эффективный гамильтониан

$$V_{nn'} = W \delta_{nn_0} \delta_{n' n_0}, \quad W = V^2 G_{m_0 m_0}^0. \quad (71)$$

Для доказательства достаточно записать уравнение Дайсона для возмущения (71) и убедиться, что его решение совпадает с (69).

2. *Затухание в конечной системе.* Невозмущенная функция Грина нижней цепочки имеет вид

$$G_{mm'}^0 = \sum_s \frac{e_s(m) e_s^*(m')}{E - \epsilon_s + i0}, \quad (72)$$

где ϵ_s и $e_s(m)$ — соответственно ее собственные значения и собственные векторы. В окрестности уровня ϵ_s в сумме можно ограничиться одним членом, подставляя который в (70), получаем

$$G_{mm'} = \frac{e_s(m) e_s^*(m')}{E - \epsilon_s - V^2 G_{n_0 n_0}^0 |e_s(m_0)|^2}, \quad E \approx \epsilon_s. \quad (73)$$

Поскольку $G_{nn'}^0$ соответствует идеальной цепочке, G_{nn}^0 не зависит от n ,

$$G_{nn}^0 = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{E - \epsilon(k) + i0} \equiv I(E) - i\pi\nu(E), \quad (74)$$

где $\nu(E)$ — плотность состояний для энергии E . Поскольку соотношение (73) справедливо для любого уровня ϵ_s , эффективную функцию Грина нижней цепочки в пренебрежении взаимным влиянием уровней (что оправдано для малых V) можно записать в виде

$$\tilde{G}_{mm'} = \sum_s \frac{e_s(m) e_s^*(m')}{E - \tilde{\epsilon}_s + i\gamma_s}, \quad (75)$$

т. е. уровни дискретного спектра приобретают конечное затухание

$$\gamma_s = \pi V^2 \nu(\epsilon_s) |e_s(m_0)|^2. \quad (76)$$

Отличие $\tilde{\epsilon}_s$ от ϵ_s не имеет качественного значения, и для малых V им можно пренебречь.

3. *Эффективная T-матрица.* Входящая в выражение (69) комбинация

$$T = \frac{V^2 G_{m_0 m_0}^0}{1 - V^2 G_{m_0 m_0}^0 G_{n_0 n_0}^0} \quad (77)$$

есть фактически T -матрица рассеяния [41]. Ее подстановка в борновское выражение вместо оператора возмущения V дает точную амплитуду рассеяния. Рассматривая, как и выше, окрестность уровня ϵ_s , приходим к выводу, что T -матрицу можно записать в виде

$$T \approx V^2 \tilde{G}_{m_0 m_0} \quad (78)$$

в соответствии с определением (75). Заметим, что в борновском приближении $T = V^2 G_{m_0 m_0}^0$, что легко получить из указанного выше представления об

эффективном рассеивателе. Таким образом, точная T -матрица получается из борновской путем замены G^0 на \tilde{G} , что сводится к учету затухания уровней.

5.2. Несколько связей между цепочками

Простейшее усложнение модели состоит во введении нескольких связей между цепочками, связывающих узлы n_0 и m_0 , n_1 и m_1 и т. д. (рис. 9б). В этом случае оператор возмущения определяется как

$$V_{nn'} = V \sum_i (\delta_{nn_i} \delta_{n'm_i} + \delta_{nm_i} \delta_{n'n_i}), \quad (79)$$

а уравнение Дайсона имеет вид

$$G_{nn'} = G_{nn'}^0 + \sum_i (G_{nn_i}^0 V G_{m_i n'} + G_{nm_i}^0 V G_{n_i n'}). \quad (80)$$

Пусть n и n' лежат на верхней цепочке. Тогда $G_{nm_i}^0 = 0$ и уравнение (80) примет вид

$$G_{nn'} = G_{nn'}^0 + \sum_i G_{nn_i}^0 V G_{m_i n'}. \quad (81)$$

С другой стороны, полагая в (80) $n = m_i$, имеем

$$G_{m_i n'} = \sum_j G_{m_i m_j}^0 V G_{n_j n'} \quad (82)$$

и, подставляя в (81), получаем

$$G_{nn'} = G_{nn'}^0 + \sum_{ij} G_{nn_i}^0 V^2 G_{m_i m_j}^0 G_{n_j n'}. \quad (83)$$

Если интересоваться только движением по верхней цепочке, то можно пользоваться эффективным гамильтонианом возмущения

$$V_{nn'} = \sum_{ij} W_{ij} \delta_{nn_i} \delta_{n'n_j}, \quad W_{ij} = V^2 G_{m_i m_j}^0, \quad (84)$$

что соответствует введению рассеивателей W_{ii} в точках n_i и дополнительных интегралов перекрытия W_{ij} между точками n_i и n_j (рис. 9г).

5.3. Разорванная верхняя цепочка

Пусть теперь в верхней цепочке отсутствует участок между узлами n_0 и n_1 (рис. 9д). Все выписанные выше выражения формально сохраняются, но под $G_{nn'}^0$ следует понимать функцию Грина, учитывающую разрыв цепочки. Эквивалентная схема показывает (рис. 9е), что переходы между правой и левой частями верхней цепочки возможны только за счет интегралов перекрытия W_{01} и W_{10} , так что коэффициент прохождения пропорционален $|W_{10}|^2$.

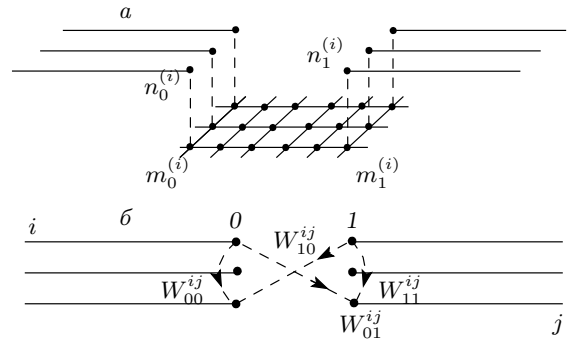


Рис. 10. а) Моделирование системы «образец + + подводящие провода»: идеальные одномерные проволочки имеют слабые связи с изучаемой d -мерной системой. б) Эффективные переходы между проволочками, соответствующие многоканальной матрице рассеяния (см. рис. 2б)

5.4. Многоканальный случай

Теперь перейдем к модели, представляющей непосредственный интерес (рис. 10а): нижняя цепочка заменена на конечную d -мерную систему, точки $m_0^{(i)}$ и $m_1^{(i)}$ которой связаны с узлами $n_0^{(i)}$ и $n_1^{(i)}$ идеальных одномерных цепочек. Эта конструкция моделирует присоединение к изучаемой d -мерной системе подводящих проводов из идеального проводника через слабые связи V .

Выражения (79)–(84) формально сохраняются, если считать, что индекс n_i пробегает значения $n_0^{(i)}$ и $n_1^{(i)}$, а индекс m_i — значения $m_0^{(i)}$ и $m_1^{(i)}$. Поэтому можно сразу ввести эквивалентную схему (рис. 10б), согласно которой i -й провод слева и j -й провод справа связаны переходами W_{00}^{ij} , W_{01}^{ij} , W_{10}^{ij} , W_{11}^{ij} . Сравнивая с ландауэровской матрицей рассеяния (рис. 2б), видим, что амплитуды t_{js} определяются величинами W_{10}^{sj}

$$t_{js} = -2i \exp(2ik_F) \sin k_F \frac{W_{10}^{sj}}{J}, \quad (85)$$

где k_F — фермиевский импульс. Для вывода этого соотношения нужно записать эффективное уравнение Шредингера

$$E\psi_n = J\psi_{n+1} + J\psi_{n-1} + \epsilon_n\psi_n + \sum_{sj} \left[W_{00}^{sj} \delta_{nn_0^{(s)}} \psi_{n_0^{(j)}} + W_{01}^{sj} \delta_{nn_0^{(s)}} \psi_{n_1^{(j)}} + W_{10}^{sj} \delta_{nn_1^{(s)}} \psi_{n_0^{(j)}} + W_{11}^{sj} \delta_{nn_1^{(s)}} \psi_{n_1^{(j)}} \right] \quad (86)$$

и найти решение задачи рассеяния: если падающая волна единичной амплитуды поступает в канал s , то амплитуда в j -м канале имеет вид

$$\psi_n^{(j)} = \begin{cases} \delta_{sj} \exp[ik(n - n_0)] + \\ + r_{sj} \exp[-ik(n - n_0)], & n \leq n_0, \\ t_{sj} \exp[ik(n - n_1)], & n \geq n_1 \end{cases} \quad (87)$$

(k — волновой вектор). Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} J e^{ik} \delta_{sj} + J e^{-ik} r_{sj} = \\ = W_{00}^{js} + \sum_{j'} \left(W_{00}^{jj'} r_{sj'} + W_{01}^{jj'} t_{sj'} \right), \\ J e^{-ik} t_{sj} = \\ = W_{10}^{js} + \sum_{j'} \left(W_{10}^{jj'} r_{sj'} + W_{11}^{jj'} t_{sj'} \right), \end{aligned} \quad (88)$$

решение которой итерациями по $W_{\alpha\beta}^{js}$ приводит к выражению (85). Подставляя (85) в формулу Ландауэра (7), имеем

$$G_L = \frac{e^2}{2\pi\hbar} 4 \sin^2 k_F \frac{V^4}{J^2} \sum_{ij} \left| G_{m_0^{(i)} m_1^{(j)}}^0 \right|^2. \quad (89)$$

Этот результат соответствует борновскому приближению. Для получения точного результата нужно найти T -матрицу системы, что делается в следующем разделе.

5.5. T -матрица в многоканальном случае

Если $\Phi(r) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ — плоская волна, а $\Psi(r)$ — решение задачи рассеяния, то связь между ними определяется уравнением Липпмана – Швингера [41]

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle + G_0 V |\Psi\rangle, \quad (90)$$

которое можно решать итерациями:

$$|\Psi\rangle = \{1 + G_0 V + G_0 V G_0 V + G_0 V G_0 V G_0 V + \dots\} |\Phi\rangle. \quad (91)$$

Положим $G_0 = G_1 + G_2$, где G_2 относится к изучаемой системе, а G_1 — к подводящим проводам, и учтем, что V связывает только G_1 и G_2 , тогда как комбинации $G_1 V G_1$ и $G_2 V G_2$ обращаются в нуль. Считая, что $|\Psi\rangle$ и $|\Phi\rangle$ лежат в подпространстве 1, имеем

$$|\Psi\rangle = \{1 + G_1 V G_2 V + G_1 V G_2 V G_1 V G_2 V + \dots\} |\Phi\rangle. \quad (92)$$

Состояния $|\Psi\rangle$ и $|\Phi\rangle$ по определению связаны S -матрицей, $|\Psi\rangle = S |\Phi\rangle$, так что

$$S = 1 + G_1 V G_2 V \frac{1}{1 - G_1 V G_2 V}. \quad (93)$$

Поскольку T -матрица вводится соотношением $V |\Psi\rangle = T |\Phi\rangle$ [41], имеем $S = 1 + G_0 T$, что в подпространстве 1 сводится к выражению $S = 1 + G_1 T$. Отсюда

$$\begin{aligned} T = V G_2 V \frac{1}{1 - G_1 V G_2 V} = \\ = V \frac{1}{E - H_2 - V G_1 V} V, \end{aligned} \quad (94)$$

где учтено, что $G_2 = (E - H_2)^{-1}$. Полюсы T -матрицы определяются собственными значениями оператора $H_2 + V G_1 V$, которые можно найти по теории возмущений:

$$\lambda_s = \epsilon_s + \langle e_s | V G_1 V | e_s \rangle. \quad (95)$$

Используя явный вид (79) матричных элементов V , получим $\lambda_s = \tilde{\epsilon}_s - i\gamma_s$, где γ_s определяется выражением

$$\gamma_s = \pi V^2 \nu_F \sum_i |e_s(m_i)|^2, \quad (96)$$

естественным образом обобщающим (76). Этот результат можно получить по индукции, присоединяя связи одну за другой и пренебрегая влиянием на $G_{nn'}$ уже включенных связей.

В дальнейшем нас будет интересовать предел малых V . Поэтому можно пренебречь малым количественным влиянием возмущения на собственные значения и собственные функции изучаемой системы и ограничиться лишь качественным эффектом, состоящим в появлении затухания. В борновском приближении T -матрица равна $V G_2 V$ (см. (94)) и имеет полюсы при энергиях ϵ_s . Замена ϵ_s на $\tilde{\epsilon}_s - i\gamma_s$ приводит к замене G^0 на \tilde{G} в выражении (89),

$$G_L = \frac{e^2}{2\pi\hbar} 4 \sin^2 k_F \frac{V^4}{J^2} \sum_{r_\perp, r'_\perp} \left| \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right|_{|x' - x| = L}^2, \quad (97)$$

где \tilde{G} вводится аналогично (75). Здесь введены продольная (x) и поперечная (r_\perp) компоненты вектора \mathbf{r} , а суммирование проводится по точкам присоединения контактов. Переходя к усредненному значению кондактанса и замечая, что $\langle |\tilde{G}|^2 \rangle$ соответствует пределу $\omega \rightarrow 0$ коррелятора плотности (49), можно воспользоваться результатом (52): тем самым установлена связь ландауэровской проводимости с коэффициентом диффузии $D(\omega, q)$. Поскольку выражение (97) относится к открытой системе, предполагается сделанная замена (53), приводящая к конечности коэффициента диффузии. Опуская (здесь и далее) несущественные численные множители, для параметра Таулеса имеем

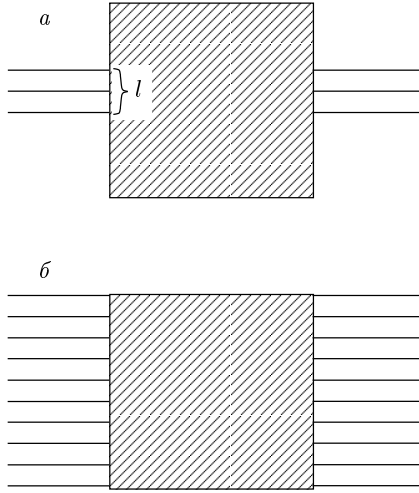


Рис. 11. «Тонкие» (а) и «массивные» (б) контакты, присоединенные к системе

$$g_L = \frac{V^4}{J^4} \frac{J}{D_L} \sum_{r_\perp, r'_\perp} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{|x-x'|=L}, \quad (98)$$

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{L^d} \sum_q \frac{\exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{m^2 + q^2}.$$

5.6. Определение проводимости конечной системы

Пусть система имеет форму d -мерного куба размера L , к которому присоединены N_c одномерных проволочек. При этом будем различать «тонкие» и «массивные» контакты (рис. 11). Все проволочки в первом случае присоединяются к области размера $l \ll \sqrt{L\xi}$ (где $\sqrt{L\xi}$ — характерный масштаб, на котором $K(r, r')$ существенно меняется как функция r_\perp), во втором распределены равномерно по всей грани куба. Для тонких контактов можно положить $r_\perp = 0$ и записать

$$g_L = \frac{V^4}{J^4} N_c^2 \frac{J}{D_L} K(x, x')|_{|x-x'|=L}. \quad (99)$$

В металлической фазе $|e_s(m)|^2 \sim L^{-d}$, и в силу выражения (96) затухание всех состояний имеет один порядок величины,

$$\gamma \sim V^2 \nu_F N_c L^{-d} \sim \frac{V^2}{J^2} N_c \Delta, \quad (100)$$

где Δ — расстояние между уровнями. Удобно ввести параметр

$$k_b = \frac{V^2}{J^2} N_c, \quad (101)$$

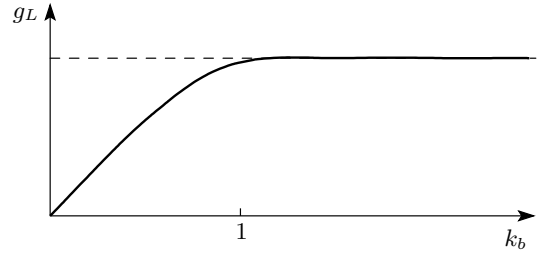


Рис. 12. Зависимость кондуктанса g_L конечной системы от степени ее открытости

имеющий смысл эффективной прозрачности границы раздела. Согласно (99), g_L содержит множитель k_b^2 в явном виде и зависимость $D_L \propto \gamma \propto k_b$ в коэффициенте диффузии, так что $g_L \propto k_b$. Коэффициент пропорциональности можно оценить из условия, что при $k_b \sim 1$ имеем $\gamma \sim \Delta$ и, согласно скейлинговым представлениям (см. (1), (2)), блок размера L находится в критическом режиме, когда $g_L \sim 1$ и $D_L \sim JL^{2-d}$.

$$g_L = k_b L^{d-2} K(x, x')|_{|x-x'|=L}. \quad (102)$$

Этот результат справедлив при $k_b \lesssim 1$, когда применимы оценки по теории возмущений. В области $k_b \gtrsim 1$ ожидается отсутствие зависимости от k_b , так как при этом $\gamma \gtrsim \Delta$ и размытые уровни сильно перекрываются, формируя практически постоянную плотность состояний (см. рис. 4). Нетрудно видеть (рис. 12), что результат (102) при $k_b \sim 1$ соответствует предельно открытой системе¹⁰). Теперь заметим, что множитель k_b можно устранить из (102), не только положив $k_b \sim 1$, но и взяв производную по k_b при $k_b \rightarrow 0$:

$$g_L^{open} = \left. \frac{dg_L(k_b)}{dk_b} \right|_{k_b=0} = L^{d-2} K(x, x')|_{|x-x'|=L}. \quad (103)$$

Мы примем выражение (103) в качестве определения проводимости конечной системы. Физически оно соответствует предельной открытости, но формулируется в терминах почти закрытых систем. Последнее гарантирует, что такое определение отража-

¹⁰) Физически естественно считать, что предельно открытой системе соответствует плато, на которое g_L выходит при $k_b \gtrsim 1$; при этом не следует брать слишком большие k_b , так как «плато» может соответствовать медленной зависимости от k_b из-за усиления влияния на систему ее окружения. Заметим, что при численном моделировании [21] обычно имеют дело с пределом $k_b \rightarrow \infty$.

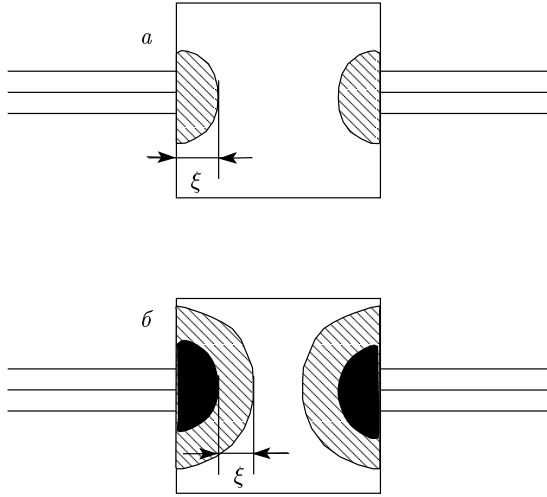


Рис. 13. Ситуация в локализованной фазе. Присоединенные к системе контакты вызывают металлизацию слоя размером порядка ξ вокруг них (а). Если металлизированную область заменить идеальным проводником, то контакты продвигаются в глубь системы и вызывают металлизацию следующего слоя размером порядка ξ (б)

ет внутренние свойства системы, не искаженные влиянием ее окружения. При этом элегантно решается вопрос о контактном сопротивлении резервуара (см. разд. 1): в пределе $k_b \rightarrow 0$ достаточно использовать выражения (5), (7) в духе Эконому – Сукулиса (так как $t_{ij} \rightarrow 0$), а не оригинальную формулу Ландауэра (4) и ее неоднозначные многоканальные обобщения [3, 8, 11, 13]. При вычислении $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ согласно (98) разрешенные значения \mathbf{q} соответствуют закрытой системе и включают значение $\mathbf{q} = 0$, что обеспечивает расходимость g_L при $m \rightarrow 0$, т. е. контактанс идеальной системы ($\xi_{0D} = \infty$) оказывается бесконечным. Это закрывает один из активно дискутировавшихся вопросов [15].

В локализованной фазе переход от (99) к (103) требует более сложной аргументации. Оценка (100) для γ сохраняется при $L \lesssim \xi$. Согласно ей условие $k_b \sim 1$ соответствует критическому состоянию для блока размера ξ . Пусть $k_b \gg 1$; тогда блок размера ξ находится в металлическом режиме, а следовательно, происходит металлизация слоя размером порядка ξ вокруг контактов (рис. 13а). В некотором приближении металлическую область можно заменить идеальным проводником. Тогда контакты продвигнутся в глубь системы и приведут к металлизации следующего слоя размером порядка ξ (рис. 13б) и т. д. Легко понять, что условие $\gamma \gg \Delta$ выполняется

на всех масштабах вплоть до размера L . Такая картина последовательной металлизации формально оправдана при $k_b \gg 1$, но качественно сохраняется при $k_b \sim 1$. В этом случае блоки размера ξ находятся в критическом состоянии и закон их композиции сводится к независимости g_L от L ; поэтому $D_L \sim JL^{2-d}$ так же, как в металлической фазе. При $k_b \ll 1$ металлизация не происходит и условие $\gamma \ll \Delta$ сохраняется на всех масштабах. Нетрудно видеть, что оценка (102) и зависимость от k_b (см. рис. 12) остаются такими же, как в металлическом режиме.

5.7. Эквивалентность с определением по Таулесу

Разрешенные значения \mathbf{q} при суммировании в (98) соответствуют закрытой системе. Принимая в качестве последней систему с периодическими граничными условиями, естественно выбрать ее размер равным L в поперечном направлении и равным $2L$ в продольном направлении. Тогда при $|x - x'| = L$ контакты располагаются на противоположных сторонах цилиндра, в который система оказывается эффективно свернутой. Рассматривая для простоты одномерный случай, имеем

$$K(x, x') = \frac{1}{2L} \sum_s \frac{\exp(iq_s L)}{q_s^2 + m^2} \Big|_{q_s = \frac{2\pi s}{2L}} \quad (104)$$

и, замечая, что $\exp(iq_s L) = (-1)^s$, разделим четные и нечетные s :

$$K(x, x') = \frac{1}{2L} \left(\sum_s \frac{1}{q_s^2 + m^2} \Big|_{q_s = \frac{2\pi s}{L}} - \sum_s \frac{1}{q_s^2 + m^2} \Big|_{q_s = \frac{2\pi s + \pi}{L}} \right). \quad (105)$$

Для блоховских граничных условий (47) разрешенные значения равны $q_s = (2\pi s + \varphi)/L$ и выражение (105) содержит разность членов с $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, так что определение (103) эквивалентно определению по Таулесу (58).

Для более реалистичных граничных условий (48) собственные функции оператора $-\partial^2/\partial x^2$ имеют вид $A_s \sin(q_s x + \psi_s)$, где

$$A_s^2 = \frac{2}{L + 2\kappa/(q_s^2 + \kappa^2)}, \quad \psi_s = \arctg(q_s/\kappa), \quad (106)$$

а разрешенные значения q_s определяются уравнением

$$q_s L + 2 \arctg(q_s/\kappa) = \pi s, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (107)$$

Выражение для $K(x, x')$ имеет вид

$$K(x, x') = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2 \frac{\sin(q_s x + \psi_s) \sin(q_s x' + \psi_s)}{q_s^2 + m^2}, \quad (108)$$

что для закрытой системы ($\kappa \rightarrow 0$) дает

$$K(0, L) = \frac{1}{L} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(q_s L)}{q_s^2 + m^2} \Big|_{q_s = \frac{\pi s}{L}}, \quad (109)$$

где мы преобразовали произведение синусов в разность косинусов и, воспользовавшись четностью по q_s , распространили суммирование на отрицательные s . Замечая, что $\cos q_s L = (-1)^s$ и разделяя четные и нечетные s , получим выражение, совпадающее с (105) с точностью до постоянного множителя. Принятое выше ограничение одномерным случаем несущественно; в d -мерном случае добавится лишь суммирование по поперечным компонентам \mathbf{q} , которое одинаково для двух членов разности (105).

Выше мы имели в виду случай тонких контактов (см. рис. 11а). Для массивных контактов (см. рис. 11б) вместо (103) имеем

$$g_L^{open} = L^{d-2} \frac{1}{N_c^2} \sum_{r_{\perp}, r'_{\perp}} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{|x-x'|=L}. \quad (110)$$

Если одномерные проволоочки присоединены к каждому узлу грани куба, то $N_c = L^{d-1}$ и суммирование по r_{\perp}, r'_{\perp} устраняет поперечные компоненты вектора \mathbf{q} . В результате выражение (110) сводится к результату для одномерного случая. Видим, что естественные определения проводимости конечной системы исчерпываются d -мерными определениями Таулеса (см. рис. 8). Собственно d -мерный случай реализуется в случае тонких контактов (рис. 11а). Эффективную размерность можно понизить на единицу, присоединяя одномерные проволоочки вдоль линии, проходящей через всю грань куба. Для массивных контактов (рис. 11б) эффективная размерность равна единице.

Заметим, что физические соображения определяют g_L с точностью до численного множителя порядка единицы. Такая неопределенность естественна и связана с произвольностью единицы измерения. Физический смысл имеют лишь отношения кондактансов, тогда как фиксация абсолютной шкалы является предметом соглашения.

Таким образом, одно из двух скейлинговых соотношений, (10) и (12) (записанное выше как (64)),

может быть выведено в результате чисто квантово-механического рассмотрения, не использующего самосогласованную теорию локализации. Второе соотношение можно также исследовать другими методами. При этом определением ξ_{0D} нужно считать соотношение (11), в котором $D(\omega, 0)$ — коэффициент диффузии закрытой системы.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ СКЕЙЛИНГОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Согласно разд. 3 и 4, зависимость g_L от L/ξ представляется в параметрической форме

$$\pm c_d \left(\frac{L}{\xi}\right)^{d-2} = H(z), \quad g_L = H_T(z) \quad (111)$$

для $2 < d < 4$ и

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\xi}{L}\right) = H(z), \quad g_L = H_T(z) \quad (112)$$

для $d = 2$. При $d < 2$ имеем представление (111) с верхним знаком, состоящее из одной ветви. Используя асимптотики $H(z)$ (33), (38), (40) и $H_T(z)$ (65), для зависимости g_L от L/ξ (рис. 14) имеем

$$g_L = \begin{cases} c_d (L/\xi)^{d-2}, & g_L \gg 1, \\ g_c \pm B (L/\xi)^{d-2}, & g_L \rightarrow g_c, \\ (1/\pi) (L/2\pi\xi)^{(d-3)/2} e^{-L/\xi}, & g_L \ll 1, \end{cases} \quad (113)$$

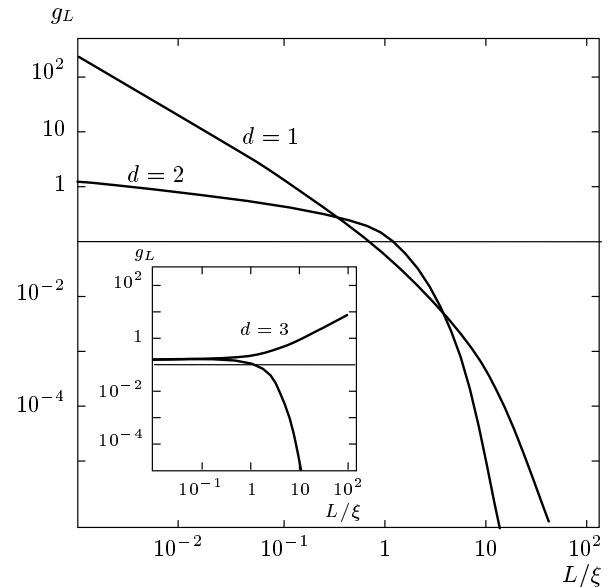


Рис. 14. Зависимости $g_L(L/\xi)$ для $d = 1, 2, 3$

где $g_c = H_T(z^*)$, $B = c_d H'_T(z^*)/H'(z^*)$. При $d < 2$ асимптотики при больших и малых g_L формально совпадают с (113), но критическая точка g_c отсутствует. При $d = 2$ имеем в металлической фазе $g_L = (1/2\pi) \ln(\xi/L)$, что можно представить как логарифмическую поправку к друдевской проводимости g_0 [1],

$$g_L = g_0 - (1/2\pi) \ln(L/a),$$

с прежней асимптотикой (113) при $g_L \ll 1$.

Функция Гелл-Манна–Лоу $\beta(g)$, согласно (2), определяется производной $d \ln g/d \ln L$ и записывается в параметрическом виде

$$g = H_T(z), \quad \beta(g) = (d-2) \frac{H(z)H'_T(z)}{H_T(z)H'(z)} \quad (114)$$

для $d \neq 2$ и

$$g = H_T(z), \quad \beta(g) = -\frac{1}{2\pi} \frac{H'_T(z)}{H'(z)H_T(z)} \quad (115)$$

для $d = 2$. Поскольку величина $H_T(z)$ — положительна, а $H'_T(z)$ и $H'(z)$ — отрицательны (см. рис. 6, 8), функция β отрицательна при $d = 2$, а при $d > 2$ имеет корень, соответствующий корню $H(z)$. Вычисленные β -функции для $d = 1, 2, 3$ представлены выше на рис. 5.

Легко получить разложения $H(z)$ и $H_T(z)$ по z^2 . При $d < 2$ они имеют вид

$$\begin{aligned} H(z) &= 1/z^2 + a_0 - a_2 z^2 + a_4 z^4 - a_6 z^6 + \dots, \\ H_T(z) &= 1/z^2 + \tilde{a}_0 - \tilde{a}_2 z^2 + \tilde{a}_4 z^4 - \tilde{a}_6 z^6 + \dots, \end{aligned} \quad (116)$$

где

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \sum_{\mathbf{s} \neq 0} \frac{1}{(2\pi|\mathbf{s}|)^{2n+2}}, \\ \tilde{a}_{2n} &= \sum_{\mathbf{t} \neq 0} \frac{(-1)^{2t_1}}{(2\pi|\mathbf{t}|)^{2n+2}}, \end{aligned} \quad (117)$$

а векторы \mathbf{s} и \mathbf{t} — такие же, как в (28) и (64). При $d \geq 2$ коэффициент a_0 заменяется на параметр b_1 , введенный в (29) и (36). При $d = 1$ коэффициенты a_{2n} и \tilde{a}_{2n} выражаются через ζ -функцию или числа Бернулли [40] и могут быть получены из явных выражений

$$H(z) = \frac{1}{2z \operatorname{th}(z/2)}, \quad H_T(z) = \frac{1}{z \operatorname{sh} z}, \quad (118)$$

следующих из (39) и (64), с помощью формулы суммирования Пуассона [40]¹¹⁾. Пользуясь (116), можно получить разложение $\beta(g)$ по степеням $1/g$:

¹¹⁾ Эти результаты полезно использовать при численном счете для высших размерностей, чтобы провести аналитическое суммирование вдоль одной из координатных осей.

$$\beta(g) = (d-2) + \frac{a_0 - \tilde{a}_0}{g} + \dots, \quad d \neq 2, \quad (119)$$

$$\beta(g) = -\frac{1}{2\pi g} + \frac{a_2 - \tilde{a}_2}{2\pi g^3} + \dots, \quad d = 2. \quad (120)$$

Последний результат интересно сравнить с разложением, полученным в σ -моделях [31, 34],

$$\tilde{\beta}(t) = -2t^2 + 0 \cdot t^3 + 0 \cdot t^4 - 12\zeta(3)t^5 + \dots, \quad (121)$$

и записанным в терминах переменной $t \sim 1/g$. Пересчитывая (120) к тому же виду, имеем

$$\tilde{\beta}(t) = -2t^2 + 0 \cdot t^3 + 32\pi^4(a_2 - \tilde{a}_2)t^4 + \dots \quad (122)$$

Первые два коэффициента совпадают с (121), тогда как третий зависит от деталей определения g_L (легко понять, что параметр \tilde{a}_2 различен для тонких и массивных контактов). Такая ситуация хорошо известна в квантовой теории поля [42–44], где разложение β -функции имеет такую же структуру, как (121), (122): инвариантными являются лишь два первых коэффициента, тогда как остальные зависят от ренормировочной схемы. Переход от одной схемы к другой соответствует замене переменных $\tilde{t} = f(t)$, связанной с изменением определения ряда. Раскладывая $f(t)$ в ряд и надлежащим образом выбирая коэффициенты, можно преобразовать (122) в (121) [43, 44]. Функция $f(t)$ хорошо определена в рамках теории возмущений, но может иметь сингулярность при $t \sim 1$; в таком случае одна из двух схем является заведомо дефектной [44]. Поскольку в (122) используется физическое определение g_L , такие проблемы могут относиться лишь к разложению (121). В рамках теории возмущений разложения (121) и (122) совершенно эквивалентны.

Такая эквивалентность нарушается в пространстве размерности $d = 2 + \epsilon$. В σ -моделях используется размерная регуляризация, для которой β -функция имеет вид

$$\beta_{2+\epsilon}(g) = \epsilon + \beta_2(g), \quad (123)$$

т. е. зависимость от d имеется лишь в первом коэффициенте разложения по $1/g$. Вычисляя критический индекс ν по производной β -функции в неподвижной точке, имеем результат [31]

$$\nu = 1/\epsilon - (9/4)\zeta(3)\epsilon^2 + \dots, \quad (124)$$

не совпадающий с (16). Этот факт обычно считается доказательством того, что теория Вольхардта–Вольфле не может быть точной.

Однако на ситуацию можно взглянуть с другой точки зрения. Предположим (в соответствии с работами [37, 45]), что теория Вольхардта–Вольфле является правильной. Тогда физическая реальность состоит в наличии точного результата $\nu = 1/\epsilon$ для $d = 2 + \epsilon$ и существовании нетривиальной β -функции для $d = 2$. Последнее не связано с деталями определения g_L , но обусловлено физической сутью проблемы: необходимость логарифмической асимптотики при $g \ll 1$ (см. (3)) означает невозможность обрыва разложения по $1/g$ на конечном числе членов. Такая физическая реальность несовместима с формализмом размерной регуляризации; согласно (123), точный результат $\nu = 1/\epsilon$ возможен лишь для тривиальной функции $\beta_2(g) = A/g$. Попытка описания с помощью такого формализма должна приводить к неразрешимым проблемам. Именно это и наблюдается в современной теории: задача о переходе Андерсона в некотором приближении сводится к σ -модели, однако соответствующая ренормгруппа оказывается неустойчивой относительно включения членов с высшими градиентами [46, 47]. На наш взгляд, интересно построить ренормировку σ -моделей без использования размерной регуляризации; имеются указания на то, что в этом случае градиентная катастрофа отсутствует (см. обсуждение в [47] работы [48]).

Сравним последнюю асимптотику (113) с точными результатами для одномерного случая [49]:

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= \frac{\pi}{2} (\alpha L / \pi)^{-3/2} e^{-\alpha L / 4}, \\ \exp(\ln g) &= 4 e^{-\alpha L}, \\ \langle 1/g \rangle &= \frac{1}{2} e^{2\alpha L}, \end{aligned} \quad (125)$$

где $\alpha \propto W^2$ при слабом беспорядке. Нетрудно видеть, что эффективный корреляционный радиус в зависимости $\exp(-L/\xi)$ зависит от деталей усреднения и в соответствии с физическими представлениями определяется лишь по порядку величины. Такая же неопределенность имеется в излагаемой теории, где ξ определяется соотношением $D(\omega) = (-i\omega)\xi^2$ при условном выборе абсолютной шкалы для $D(\omega)$. При наличии такой неопределенности бессмысленно говорить о точном виде предэкспоненциального множителя, который соответствует переопределению ξ на множитель $1 + O(\ln L/L)$.

7. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ФИЗИЧЕСКИМ И ЧИСЛЕННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

Зависимость g_L от L/ξ для $d = 3$ сопоставляется на рис. 15а с численными данными Жарекеше-

ва [34], в которых оценка g_L проводилась по «ускорению» уровней $K_s = d^2 \epsilon_s / d\varphi^2$ при $\varphi = 0$, где φ — параметр в блоховском граничном условии (47). По порядку величины это соответствует переходу от периодических условий к антипериодическим и является одним из вариантов определения Таулеса. Согласие вполне удовлетворительно для металлической области и окрестности перехода, тогда как в сильнолокализованном режиме имеют место ожидаемые отклонения: они связаны с тем, что теоретические результаты соответствуют $\ln \langle g \rangle$, тогда как численные — $\langle \ln g \rangle$. Согласно (125), различие двух ситуаций соответствует переопределению ξ на постоянный множитель, что в логарифмическом масштабе рис. 15а сводится к параллельному сдвигу.

Сопоставление той же зависимости с экспериментом [36] возможно в предположении, что L заменяется на длину $L_{in} \propto T^{-\alpha}$, характеризующую неупругие процессы. К сожалению, нет оснований считать показатель α одинаковым в металлической и локализованной фазах и следует ожидать его медленного дрейфа при изменении беспорядка. Сопоставление на рис. 15б сделано в предположении, что α является кусочно-постоянной величиной, принимающей различные значения в металле и диэлектрике. Такое предположение не сильно влияет на результаты в критической области, где зависимость g_L от L/ξ является очень медленной. Последняя область слабо представлена на рис. 15б, и он фактически иллюстрирует ситуацию, не слишком близкую к критической точке. С другой стороны, критическое поведение, полученное в работе [36], прекрасно описывается теорией Вольхардта–Вольфле: результаты $s = 1.0 \pm 0.1$ для индекса проводимости и $z = 2.94 \pm 0.30$ для динамического индекса согласуются с теоретическими значениями $s = 1$ и $z = 3$.

Зависимость g_L от L/ξ для $d = 2$ сопоставляется на рис. 16а с численными данными Маркоша [33]. Имеется хорошее согласие для $W > 2$, тогда как в области слабого беспорядка численные результаты обнаруживают сильное нарушение скейлинга. Это может быть связано с аномальной затянутостью баллистического режима [33] или с существованием двумерного перехода металл–диэлектрик. Согласно работе [29], последний возникает примерно в половине случаев и относится к типу Костерлица–Таулеса, что можно согласовать со скейлинговыми представлениями работы [1]. Его возможность, с точки зрения настоящей работы, обусловлена тем, что в общем анализе [37] ситуация при $d = 2$ является особой и, по-видимому, сводится к теории Вольхардта–Вольфле не во всех случаях.

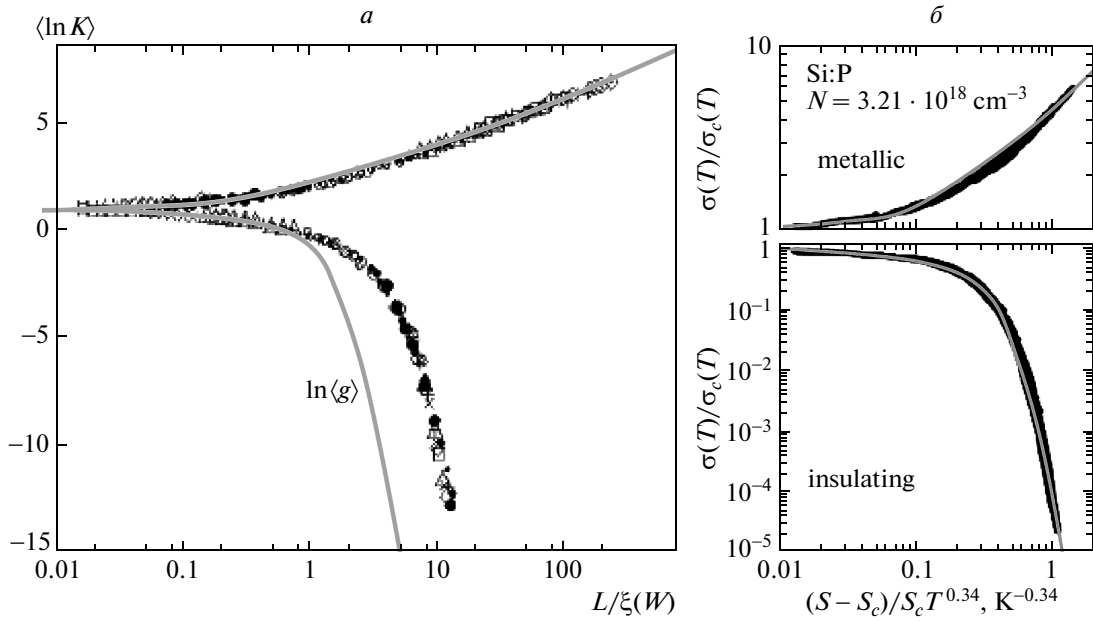


Рис. 15. а) Сравнение теоретических скейлинговых кривых (сплошные линии) для $d = 3$ с численными результатами Жарекешева (точки) [34]. Общая форма кривых определялась без подгоночных параметров, проводились лишь параллельные сдвиги вдоль двух осей (одинаковые для обеих ветвей), соответствующие выбору абсолютного масштаба для g_L и ξ . б) Сравнение тех же зависимостей с экспериментом [36] в предположении $L \propto T^{-\alpha}$, где показатель α подбирался независимо для двух ветвей

Полученная β -функция для $d = 2$ (см. рис. 5) сопоставляется на рис. 16б с эмпирической β -функцией из работы Заварицкой [35] и основанной на возможности замены $L \rightarrow L_{in} \propto T^{-\alpha}$. Любопытно, что использование постоянного значения α позволяет описать ситуацию как при больших, так и при малых g . Небольшие отклонения наблюдаются лишь в области $g \sim 0.1$, где и экспериментальные данные не вполне однозначны.

8. СИТУАЦИЯ В ВЫСШИХ РАЗМЕРНОСТЯХ

8.1. Размерности $d > 4$

При $d > 4$ для $I_2(m)$ в (28) имеем

$$I_2(m) = -m^2 \{c_d \Lambda^{d-4} + O(m^{d-4}, L^{4-d})\}, \quad (126)$$

т. е. в главном приближении аналитическое вычисление возможно при произвольном соотношении m и L^{-1} . Действительно, при $m \gtrsim L^{-1}$ сумму можно оценить интегралом, который сходится на нижнем пределе уже при $m = 0$. Поэтому с конечностью m связаны лишь малые поправки. При $m \lesssim L^{-1}$ главный эффект от конечности L связан с отсутствием

члена $q = 0$, что в интегральном приближении можно оценить как ограничение $|q| \gtrsim L^{-1}$.

Подстановка (126) в уравнение самосогласования показывает, что можно пренебречь членом b_1 и получить скейлинговое соотношение

$$\pm \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2} \quad (127)$$

в переменных

$$y = \frac{\xi_{0D}}{L} \left(\frac{a}{L}\right)^{(d-4)/4}, \quad x = \frac{\xi}{L} \left(\frac{a}{L}\right)^{(d-4)/4}, \quad (128)$$

где мы переопределили общие масштабы ξ_{0D} и ξ так, чтобы сделать все коэффициенты в (127) единичными. Скейлинговые соотношения (127), (128) содержат атомный масштаб a , что связано с неперенормируемостью теории [30]. Точке перехода соответствует $y = 1$, так что

$$\frac{\xi_{0D}}{L} \sim \left(\frac{L}{a}\right)^{(d-4)/4}, \quad \tau = 0, \quad (129)$$

и в соотношении (64) можно взять асимптотику $H_T(z)$ при малых z . Поэтому в окрестности перехода можно заменить ξ_{0D}/L на \sqrt{gL} , и соотношения

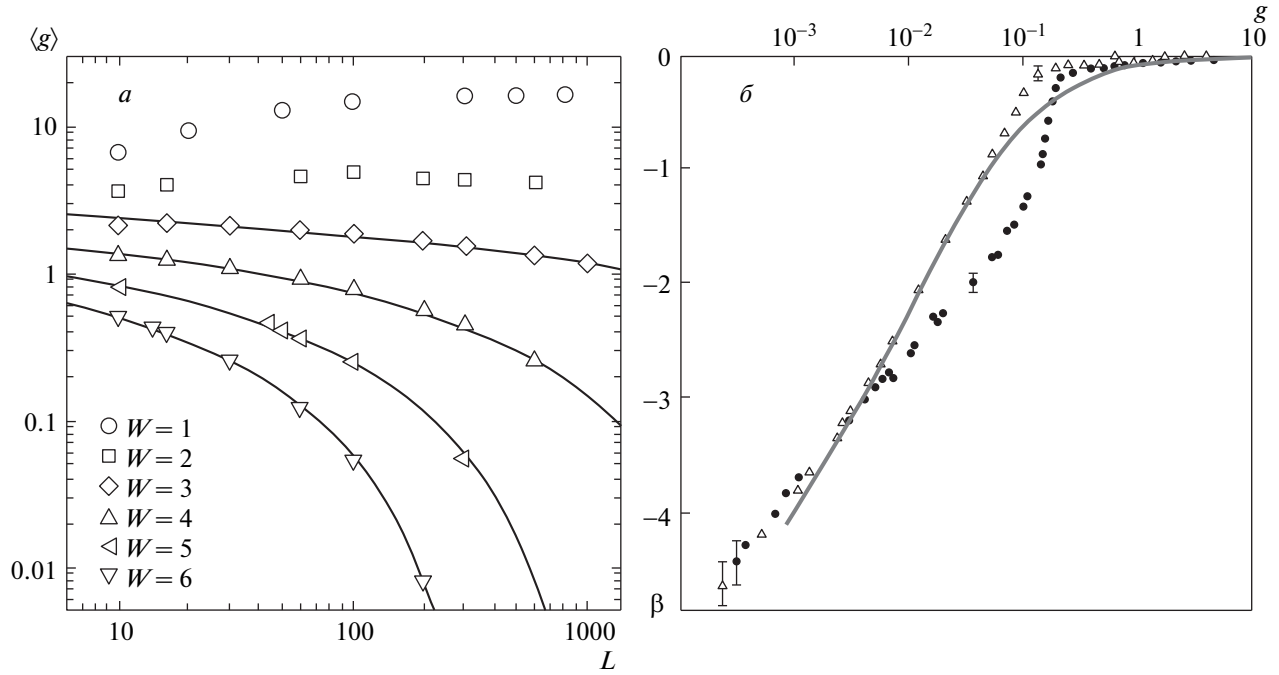


Рис. 16. а) Сравнение теоретических скейлинговых кривых (сплошные линии) для $d = 2$ с численными данными Маркоша (точки) [33, Fig. 37]. Форма кривых определялась без подгоночных параметров, проводились лишь параллельные сдвиги вдоль двух осей. б) Сравнение полученной β -функции при $d = 2$ (см. рис. 5) с эмпирической β -функцией, извлеченной из эксперимента (точки) [35] в предположении $L \propto T^{-\alpha}$. Светлые символы соответствуют свежесколотой поверхности Ge, черные — бикристаллам Ge

(127), (128) определяют связь g_L и ξ/L . В частности, в точке перехода

$$g_L \sim \left(\frac{L}{a}\right)^{(d-4)/2}, \quad \tau = 0. \quad (130)$$

Физический смысл этого результата в том, что в уравнении самосогласования для бесконечной системы (получаемом из соотношений разд. 2),

$$D(\omega) = A\tau + B \left[\frac{-i\omega}{D(\omega)}\right]^{1/2\nu}, \quad (131)$$

можно сделать замены $D(\omega) \rightarrow D_L$, $-i\omega \rightarrow \gamma$ и положить γ (для $\tau = 0$) порядка расстояния между уровнями $\Delta \propto L^{-d}$. При $d < 4$ это дает $g_L = \text{const}$, тогда как при $d > 4$ — результат (130).

8.2. Четырехмерный случай

При $d = 4$ аналогично предыдущему имеем

$$I_2(m) = \begin{cases} -c_4 m^2 \ln \frac{\Lambda}{m} + O(1), & mL \gtrsim 1, \\ -c_4 m^2 \ln(\Lambda L) + O(1), & mL \lesssim 1 \end{cases} \quad (132)$$

и два результата различаются в меру $\ln(mL)$, что в актуальной области сводится к дважды логарифмической величине. В пренебрежении такими величинами можно получить скейлинговое соотношение (127) в переменных

$$y = \frac{\xi_{0D}}{L} [\ln(L/a)]^{-1/4}, \quad x = \frac{\xi}{L} \frac{[\ln(L/a)]^{1/4}}{[\ln(\xi/a)]^{1/2}}. \quad (133)$$

В окрестности перехода можно заменить ξ_{0D}/L на $\sqrt{g_L}$ и, в частности, получить

$$g_L \sim [\ln(L/a)]^{(d-4)/2}, \quad \tau = 0. \quad (134)$$

Как объяснялось в работе [30], возможны обычные скейлинговые построения, если параметр y рассматривать как функцию «модифицированной длины» $\mu(L) = L [\ln(L/a)]^{-1/4}$. В этом случае изменение масштаба $\mu(L)$ позволяет свести все зависимости для $\tau > 0$ и $\tau < 0$ к двум универсальным кривым. Подчеркнем, что при $d \geq 4$ точку перехода нельзя определять из условия $g_L = \text{const}$.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа продолжает линию, начатую в предыдущей публикации [30]. Поскольку имеются серьезные указания на то, что теория Вольхардта–Вольфле предсказывает правильное критическое поведение [37, 45], представляется желательным получить возможно большее число следствий и провести их сопоставление с численным и физическим экспериментами на уровне первичных данных. Такой подход уже продемонстрировал свою плодотворность [30]: так, выяснилось, что результаты для индекса $\nu = 1.3\text{--}1.6$ при $d = 3$, получаемые в численных работах, связаны с тем, что зависимость $L + L_0$ с $L_0 > 0$ интерпретируется как $L^{1/\nu}$ с $\nu > 1$, тогда как первичные данные вполне совместимы с теорией Вольхардта–Вольфле. Полученные выше соотношения конечно-размерного скейлинга и функции Гелл-Манна–Лоу также хорошо согласуются с физическим и численным экспериментами.

В настоящей работе предложено новое определение проводимости конечных систем, отвечающее на сформулированные в разд. 1 вопросы. Существенно, что как самосогласованная теория локализации, так и квантовомеханический анализ, основанный на модели оболочек, приводят к одинаковым определениям, фактически совпадающим с определением Таулеса. Это является очередным серьезным аргументом в пользу правильности самосогласованной теории. Сопоставление разложения β -функции по $1/g$ с результатами σ -моделей показывает, что в двумерном случае нет никаких противоречий на уровне теории возмущений. Далее выясняется, что в случае справедливости самосогласованной теории формализм размерной регуляризации не совместим с физической сутью проблемы. По-видимому это является причиной как градиентной катастрофы, так и противоречия с теорией Вольхардта–Вольфле в пространстве размерности $d = 2 + \epsilon$.

Указанное определение проводимости, по-видимому, поможет разрешить вопрос о патологических сингулярностях в распределении кондактансов [33], которые не могут существовать в конечных системах. Их наблюдение в численных исследованиях [33], вероятно, связано с тем, что исследуемая система недостаточно изолирована от окружения, так что термодинамический предел $L \rightarrow \infty$ эффективно осуществляется вдоль одной из координатных осей.

Из проведенного рассмотрения следует также простая аргументация в отношении пространственной дисперсии коэффициента диффузии. В локализованной фазе легко доказывается [37], что $D(\omega, q)$

имеет регулярное разложение по q^2 . Однако это не исключает появление в точке перехода дробных степеней q [50] ввиду возможности конструкций вида

$$D(\omega, q) \sim (1 + \xi^2 q^2)^n, \quad (135)$$

для которых область применимости регулярного разложения при $\xi \rightarrow \infty$ сжимается в точку. В конечной системе роль ξ переходит к величине ξ_{0D} , не имеющей сингулярностей в точке перехода, и с учетом такой замены соотношение (135) распространяется на металлическую фазу. Однако отсутствие такой дисперсии в металлическом режиме легко проверяется из кинетического уравнения. Согласно анализу [37], вместо (135) справедливо представление

$$D(\omega, q) = (-i\omega)\xi^2 (1 + d_1 q^2 + d_2 q^4 + \dots) \quad (136)$$

с постоянными величинами d_i , не приводящее к патологиям при замене ξ на ξ_{0D} . Заметим также, что точный результат Вегнера $D(\omega, 0) \sim \omega^{(d-2)/d}$ [51], следующий из (131) при $\tau = 0$, не мог бы получиться при наличии существенной пространственной дисперсии $D(\omega, q)$. Любопытно, что в недавних экспериментах по диффузионному расплыванию волнового пакета [52] получено прекрасное согласие с самосогласованной теорией и не обнаружено ни малейших признаков аномальной пространственной дисперсии.

Локализационный закон для проводимости $\sigma(\omega) \propto -i\omega$ был предсказан почти 40 лет назад [53], но никогда не наблюдался экспериментально. Из настоящей работы ясно, что его наблюдение возможно в закрытых системах примерно при тех же условиях, что и наблюдение незатухающего тока в геометрии Ааронова–Бома (см. рис. 3) [54–56].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Асимптотика g_L при $mL \rightarrow \infty$

Рассмотрим сумму (27) для блоховских граничных условий (47) по всем направлениям,

$$I(m) = \frac{1}{L^d} \times \sum_{s_1, \dots, s_d} \frac{1}{m^2 + q_1^2 + \dots + q_d^2} \Big|_{q_i = \frac{2\pi s_i + \varphi_i}{L}}. \quad (A.1)$$

Вводя так называемое α -представление,

$$\frac{1}{m^2 + q^2} = \int_0^\infty d\alpha \exp[-\alpha (q^2 + m^2)], \quad (A.2)$$

имеем

$$I(m) = \int_0^\infty d\alpha \exp(-\alpha m^2) \prod_{j=1}^d S_j(\alpha), \quad (\text{A.3})$$

$$S_j(\alpha) = L^{-1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha d_s^2) \Big|_{q_s = \frac{2\pi s + \varphi_j}{L}}.$$

Используя формулу суммирования Пуассона [40], преобразуем $S_j(\alpha)$ к виду

$$S_j(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \sum_{k_j=-\infty}^{\infty} \exp\left(ik_j\varphi_j - \frac{k_j^2 L^2}{4\alpha}\right). \quad (\text{A.4})$$

Тогда для (A.3) имеем

$$I(m) = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{(4\pi\alpha)^{d/2}} \exp(-\alpha m^2) \times \sum_{\mathbf{k}} \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \frac{|\mathbf{k}|^2 L^2}{4\alpha}\right), \quad (\text{A.5})$$

где введен вектор $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$ и $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \sum_j k_j \varphi_j$. Член с $\mathbf{k} = 0$ соответствует континуальному приближению и вычисляется точно. Главный эффект дискретности определяется членами с $|\mathbf{k}| = 1$, которые при $mL \gg 1$ вычисляются в перевальном приближении. Ограничиваясь ими, имеем

$$I(m) = \frac{m^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \left[\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) + \sqrt{\pi} \left(\frac{mL}{2}\right)^{(1-d)/2} e^{-mL} \sum_{j=1}^d 2 \cos \varphi_j \right]. \quad (\text{A.6})$$

Беря разность двух таких выражений с $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_1 = \pi$,

$$I(m)|_{\varphi_1=0} - I(m)|_{\varphi_1=\pi} = \frac{4\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{d/2}} m^{d-2} \left(\frac{mL}{2}\right)^{(1-d)/2} e^{-mL}, \quad (\text{A.7})$$

получим выражение (59).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
2. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).
3. P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).
4. P. W. Anderson, Phys. Rev. B **23**, 4828 (1981).
5. R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957); Phil. Mag. **21**, 863 (1970).
6. E. N. Economou and C. M. Soukoulis, Phys. Rev. Lett. **46**, 618 (1981).
7. D. S. Fisher and P. A. Lee, Phys. Rev. B **23**, 6851 (1981).
8. D. C. Langreth and E. Abrahams, Phys. Rev. B **24**, 2978 (1981).
9. H. L. Engquist and P. W. Anderson, Phys. Rev. B **24**, 1151 (1981).
10. D. J. Thouless, Phys. Rev. Lett. **47**, 972 (1981).
11. M. Buttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986); M. Buttiker, Y. Imry, R. Landauer, and S. Pinhas, Phys. Rev. B **31**, 6207 (1985).
12. R. Landauer, Z. Phys. **68**, 217 (1987).
13. М. Я. Азбел, J. Phys. C **14**, L225 (1981).
14. M. Buttiker, Y. Imry, and R. Landauer, Phys. Lett. A **96**, 365 (1983).
15. A. D. Stone and A. Szafer, IBM J. Res. Dev. **32**, 384 (1988).
16. D. Braun, E. Hofstetter, F. MacKinnon, and G. Montambaux, Phys. Rev. B **55**, 7557 (1997).
17. D. J. Thouless, Phys. Rep. **13**, 93 (1974).
18. S. Iida, H. A. Weidenmüller, and M. R. Zirnbauer, Ann. Phys. **200**, 219 (1990).
19. A. Atland, Z. Phys. B **82**, 105 (1991).
20. M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. Lett. **69**, 1584 (1992).
21. P. W. Brouwer and K. Frahm, Phys. Rev. B **53**, 1490 (1996).
22. C. Mahaux and H. A. Weidenmüller, *Shell-Model Approach to Nuclear Reactions*, North Holland Publ. Comp., Amsterdam (1969).
23. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980);
24. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. Lett. **48**, 699 (1982).
25. К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и ϵ -разложение*, Мир, Москва (1975).
26. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).

27. J. L. Pichard and G. Sarma, *J. Phys. C* **14**, L127 (1981).
28. A. MacKinnon and B. Kramer, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1546 (1981); *Z. Phys.* **53**, 1 (1983).
29. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **128**, 768 (2005).
30. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **141**, 122 (2012).
31. F. Wegner, *Nucl. Phys. B* **316**, 663 (1989).
32. S. Hikami, in *Quantum Coherence in Mesoscopic Systems*, ed. by B. Kramer, NATO ASI 254, Plenum Press, New York and London (1991).
33. P. Markos, *Acta Phys. Slovaca* **56**, 561 (2006); *cond-mat/0609580*.
34. И. Х. Жарекешев, *Вестник Евразийского НУ* **77**, 41 (2010).
35. Э. И. Заварицкая, *ЖЭТФ* **93**, 952 (1987).
36. S. Waffenschmidt, C. Pfeiderer, and H. V. Loehneysen, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3005 (1999).
37. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **108**, 1686 (1995).
38. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1976).
39. А. Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Наука, Москва (1975).
40. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1977).
41. Дж. Займан, *Современная квантовая теория*, Мир, Москва (1971).
42. А. А. Владимиров, Д. В. Ширков, *УФН* **129**, 407 (1979).
43. G. 't Hooft, in *The Whys of Subnuclear Physics* (Erice, 1977), ed. by A. Zichichi, Plenum Press, New York (1979).
44. I. M. Suslov, arXiv: hep-ph/0605115.
45. H. Kunz and R. Souillard, *J. de Phys. Lett.* **44**, L506 (1983).
46. В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, В. И. Юдсон, *ЖЭТФ* **94**, 255 (1988).
47. F. Wegner, *Z. Phys. B* **78**, 33 (1990).
48. P. K. Mitter and H. R. Ramadas, *Commun. Math. Phys.* **122**, 575 (1989).
49. J. B. Pendry, *Adv. Phys.* **43**, 461 (1994).
50. J. T. Chalker, *Physica A* **167**, 253 (1990); T. Brandes, B. Huckestein, and L. Schweitzer, *Ann. Phys.* **5**, 633 (1996).
51. F. Wegner, *Z. Phys. B* **25**, 327 (1976).
52. G. Lemarie, H. Lignier, D. Delande et al., arXiv: 1005.1540.
53. В. Л. Березинский, *ЖЭТФ* **65**, 1251 (1973).
54. L. P. Levy, G. Dolan, J. Dunsmuir, and H. Bouchiat, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2074 (1990).
55. H. Bluhm, N. Koshnick, J. Bert et al., *Phys. Rev. Lett.* **102**, 136802 (2009).
56. A. C. Bleszynski-Jayich, W. E. Shanks, B. Peaudecerf et al., *Science* **326**, 272 (2009).