

T_c НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВБЛИЗИ ПЕРЕХОДА АНДЕРСОНА

*И. М. Суслов**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 27 декабря 2012 г.

Согласно теореме Андерсона, температура перехода T_c неупорядоченного сверхпроводника определяется средней плотностью состояний и не меняется при пересечении порога локализации. Это верно в предположении самоусредняемости параметра порядка, нарушение которой ожидается в области сильной локализации. В связи с утверждениями о сильном повышении T_c в окрестности перехода Андерсона мы провели систематическое исследование возможных нарушений самоусредняемости. Сильные отклонения от теоремы Андерсона возможны из-за резонансов на квазидискретных уровнях, приводящих к локализации параметра порядка на атомном масштабе. Этот эффект определяется свойствами отдельных примесей и не имеет прямой связи с переходом Андерсона. В частности, мы не видим оснований говорить о «фрактальной сверхпроводимости» вблизи порога локализации.

DOI: 10.7868/S0044451013120000

1. ВВЕДЕНИЕ

Общая картина сосуществования сверхпроводимости с андерсоновской локализацией сформирована в работах Булаевского и Садовского [1–5] (см. также [6, 7]). Согласно теореме Андерсона [8], температура перехода T_c неупорядоченного сверхпроводника определяется средней плотностью состояний и не зависит от вида одночастичных собственных функций. Поскольку средняя плотность состояний не имеет особенности в точке перехода Андерсона, то и T_c не меняется при пересечении точки перехода. Кроме того, в точке перехода остается конечным коэффициент при градиентном члене в функционале Гинзбурга–Ландау, отвечающий за существование сверхпроводящего отклика. В локализованной фазе система разбивается на квазинезависимые блоки размера порядка радиуса локализации ξ и сверхпроводимость подавляется за счет размерного эффекта, когда расстояние между уровнями в таком блоке становится больше T_c .

В недавних работах Фейгельмана и др. [9, 10] высказано утверждение о росте T_c при приближении к переходу Андерсона с металлической стороны и продолжении роста в локализованной фазе (с дальнейшим проходом через максимум), что

связывается с мультифрактальным характером волновых функций; при этом T_c зависит от куперовской константы взаимодействия g степенным, а не экспоненциальным образом. С формальной точки зрения, это утверждение не противоречит работам [1–5]. Действительно, теорема Андерсона справедлива в предположении самоусредняемости параметра порядка, фактически сводящейся к его независимости от координат; согласно оценкам работ [3, 4], при движении из металлической фазы в локализованную имеет место тенденция к нарушению самоусредняемости и возникновению пространственно-неоднородной сверхпроводимости: тем самым признается, что истинное значение T_c может быть повышено по сравнению с теоремой Андерсона. Противоречие между работами [1–5] и [9, 10] носит скорее идеологический характер. Авторы работ [1–5] исходят из того, что локализация противодействует существованию сверхпроводимости; поэтому последняя в локализованной фазе сталкивается со множеством проблем [2, 5], которые ей, тем не менее, удается преодолеть. Утверждение же о росте T_c за порогом подвижности [9, 10] указывает, что сверхпроводимость не просто «выживает», но и «процветает» в локализованной фазе: это выглядит подозрительно с физической точки зрения и противоречит экспериментальной ситуации, которая находится в полном соответствии с работами [1–5].

*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Настоящая работа имеет целью разобраться в возникших противоречиях. Фактически суть вопроса состоит в том, как и в какой мере может нарушаться самоусредняемость параметра порядка. Эффективный подход к решению таких вопросов состоит в исследовании влияния на T_c отдельных дефектов [11–14]. Так, при периодическом расположении плоских дефектов перпендикулярно оси z на расстоянии L друг от друга изменение T_c определяется формулой¹⁾

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\lambda_0^3 L} g^2 \int dz [\nu_0 \nu_1(z) + \nu_1(z)^2], \quad (1)$$

если вблизи дефекта нет локализованных состояний; здесь g — куперовская константа взаимодействия, $\nu_1(z)$ — отклонение локальной плотности состояний $\nu(z)$ от ее невозмущенного значения ν_0 , $\lambda_0 = g\nu_0$ — безразмерная константа связи, T_{c0} — температура перехода в отсутствие дефектов, интегрирование проводится по окрестности одного дефекта. Для слабых дефектов в формуле (1) можно ограничиться линейным по $\nu_1(z)$ членом, который в точности соответствует теореме Андерсона и определяет изменение T_c , обусловленное изменением средней плотности состояний. В общем случае $\nu_1(z)$ может быть порядка ν_0 и уже формула (1) предсказывает возможность существенного нарушения теоремы Андерсона: оно связано с тем, что в целом постоянный параметр порядка подвержен влиянию сильных дефектов, которые индуцируют его локальное увеличение или уменьшение. Еще более сильные нарушения теоремы Андерсона возникают при наличии вблизи дефекта локализованных состояний, выходящих на уровень Ферми (рис. 1). В этом случае возможен режим локализации параметра порядка на плоских дефектах, в результате чего T_c вообще не зависит от L и определяется формулой БКШ $T_c = 1.14\omega_0 \exp(-1/\lambda_{2D})$ с константой связи λ_{2D} , соответствующей отщепленной двумерной зоне (рис. 1). Переход от одного режима к другому при изменении параметров происходит очень резко, так что промежуточная ситуация малоинтересна. Формально описанные результаты относятся к периодическому расположению плоских дефектов, однако их характер показывает, что предположение о периодичности несущественно; тем самым они дают полную картину для малой концентрации «примесей» в одномерной геометрии.

¹⁾ Для простоты предполагаем, что плоский дефект изменяет только плотность состояний. Существуют обобщения формулы (1), учитывающие изменения константы взаимодействия g [12, 13] и частоты обрезания ω_0 [14].

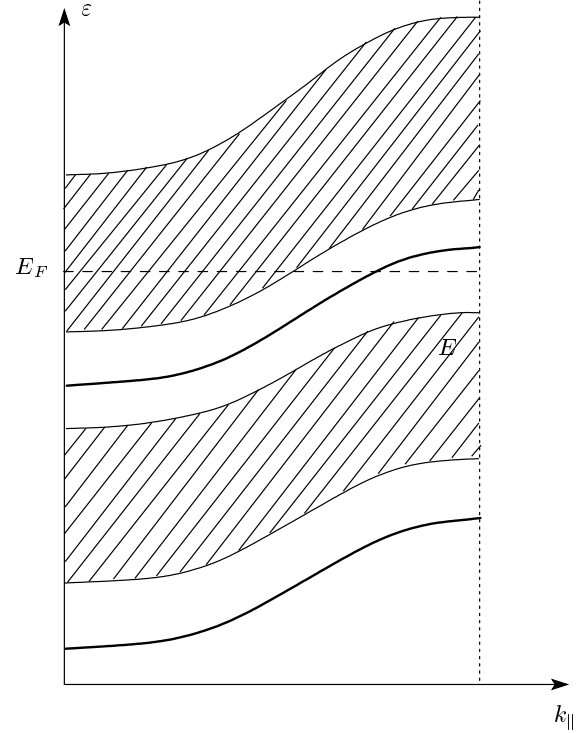


Рис. 1. При расположении плоских дефектов перпендикулярно оси z задача допускает разделение переменных, что позволяет ввести продольный квазиимпульс $k_{||}$. При фиксированном $k_{||}$ спектр состоит из совокупности зон, от которых отщепляются дискретные уровни; с учетом зависимости от $k_{||}$ эти уровни превращаются в двумерные зоны, которые могут выходить на уровень Ферми

Аналогичные эффекты имеют место и в случае точечных дефектов: при этом режим локализации параметра порядка связан с существованием квазилокальных уровней (рис. 2). Детальное изучение этих эффектов позволяет получить полную картину возможных нарушений самоусредняемости параметра порядка. Основной вывод состоит в том, что нарушение самоусредняемости определяется свойствами отдельных дефектов и не имеет прямой связи с переходом Андерсона. При этом возможны две характерные ситуации.

Если беспорядок создается слабыми примесями (рис. 3а), то самоусредняемость вообще не нарушается и картина Булаевского–Садовского применима буквально. При этом порог подвижности лежит вблизи затравочной границы зоны и при подходе к нему с металлической стороны T_c резко убывает из-за уменьшения плотности состояний, так что сверхпроводимость становится практически не на-

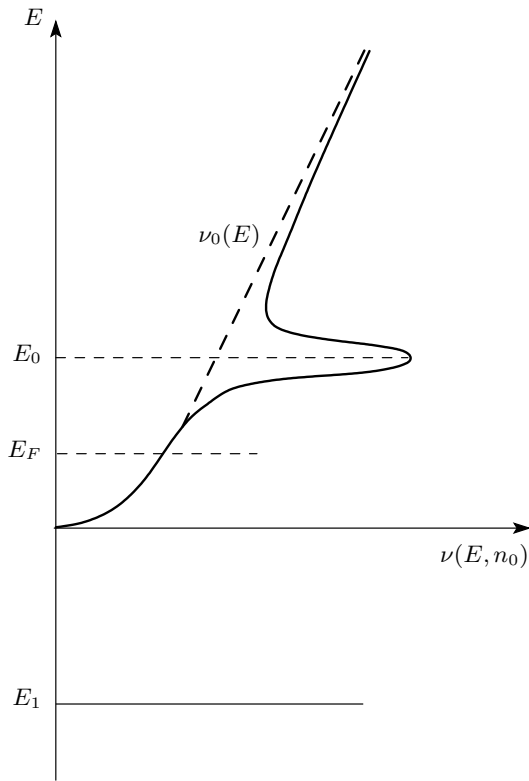


Рис. 2. При помещении в узел n_0 идеальной решетки достаточно сильного точечного дефекта возникают локальный (E_1) и квазилокальный (E_0) уровни. Последний соответствует максимуму локальной плотности состояний $\nu(E, n_0)$

блюдаемой еще до достижения порога подвижности. Такая ситуация характерна для традиционных сверхпроводников, которые являются хорошими металлами, так что вносимые в них примеси сильно экранируются и практически всегда являются слабыми. Экспериментальная ситуация полностью соответствует сказанному выше [5].

При сильном беспорядке (рис. 3б) порог подвижности может находиться в области практически постоянной плотности состояний²⁾ и падение T_c при приближении к порогу подвижности не наблюдается. Согласно теории среднего поля, истинная температура перехода T_c оказывается довольно высокой и соответствует локализации параметра порядка на малом количестве «резонансных» примесей, приводящих к образованию квазилокальных состояний

²⁾ Согласно результатам Жарекешева [15], для модели Андерсона с промежуточным и сильным беспорядком, в центре зоны имеется широкое плато, на котором плотность состояний почти постоянна.

на уровне Ферми. В согласии с работами [9, 10] T_c степенным образом зависит от константы связи, но вопреки им не имеет существенной зависимости от положения уровня Ферми; это устраняет иллюзию, что локализация «помогает» сверхпроводимости. В окрестности истинной T_c сверхпроводимость является практически не наблюдаемой, так как характеризуется малым объемом мейсснеровской фазы и малыми значениями критического тока. Легко наблюдаемой она становится, когда распространяется на весь объем: это происходит при некоторой эффективной температуре, которую можно назвать «объемной» T_c ; теоретически ее можно определить как T_c системы с удаленными «резонансными» примесями. Она качественно (но не количественно) соответствует теореме Андерсона и на этом уровне подтверждает картину Булаевского – Садовского. В этом случае поведение T_c определяется «прямоугольной» зависимостью (рис. 3б), которая экспоненциально слабо отличается от горизонтальной прямой вблизи порога подвижности E_c , и экспоненциально слабо отличается от вертикальной прямой вблизи точки исчезновения сверхпроводимости E^* . Такая ситуация характерна для высокотемпературных сверхпроводников, где сосуществование локализации и сверхпроводимости легко наблюдаемо [5].

Для истинной T_c справедлива оценка

$$T_c \sim ga^{-d} \sim \lambda_0 J \tag{2}$$

(a — постоянная решетки, J — ширина зоны, d — размерность пространства), на первый взгляд указывающая, что «комнатная» сверхпроводимость является вполне распространенным явлением. В действительности рост T_c при увеличении λ_0 ограничен величиной ω_0/π , где ω_0 — частота обрезания, что для фононного механизма соответствует значениям, уже достигнутым в высокотемпературных сверхпроводниках; дальнейшее увеличение T_c требует использования более высокочастотных бозевских возбуждений. Кроме того, наблюдение истинной T_c возможно, по-видимому, лишь при использовании сканирующей туннельной или сквидовской микроскопии [16].

Подчеркнем во избежание недоразумений, что результат (2) получен в рамках теории среднего поля. При этом конфигурация параметра порядка соответствует наличию некоторого постоянного значения во всем объеме, на фоне которого происходят резкие всплески большой амплитуды в окрестности малого количества резонансных примесей, концентрация которых порядка T_c/J . Параметр порядка можно считать положительным (разд. 2), так что

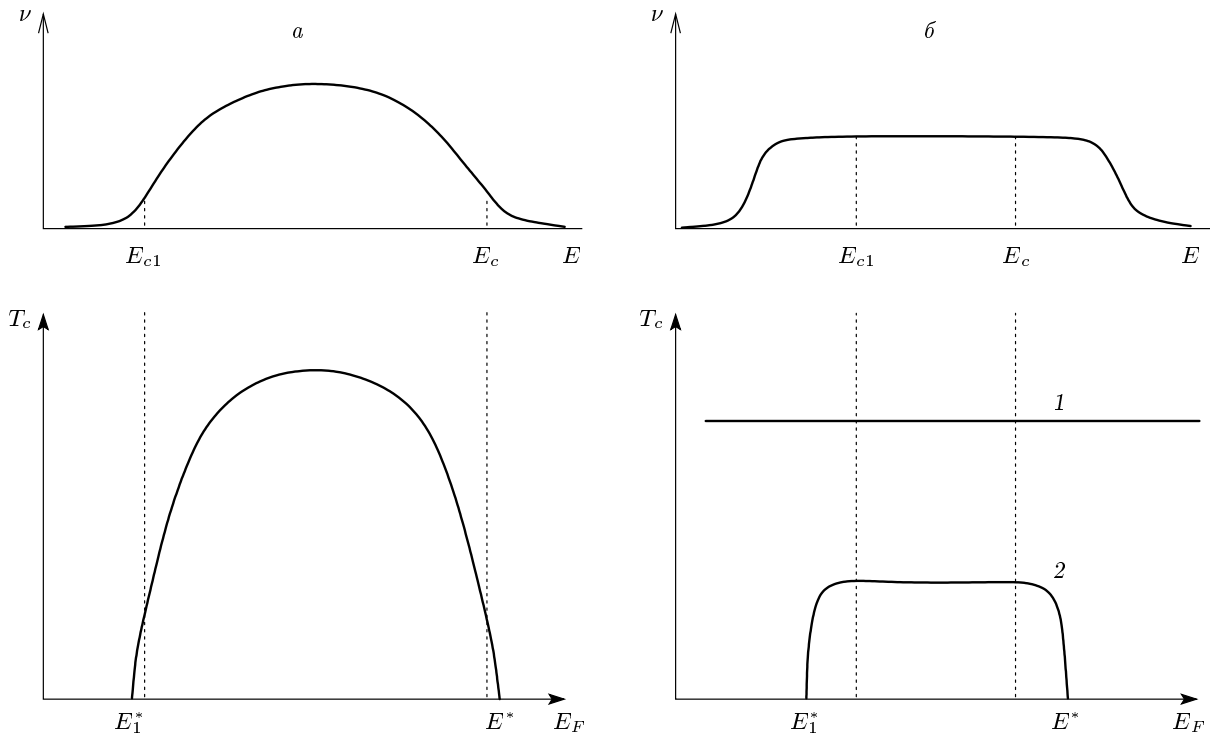


Рис. 3. а) Если беспорядок создается слабыми примесями, то нарушения самоусредяемости не происходит; T_c сильно падает вблизи порога подвижности из-за уменьшения плотности состояний. б) В случае сильного беспорядка истинная T_c (1) (в рамках теории среднего поля) определяется локализацией параметра порядка на редких резонансных примесях, тогда как для объемной T_c (2) справедлива прямоугольная зависимость

его фаза постоянна во всем объеме. При переходе к флуктуационной теории модуль параметра порядка меняется слабо, но возникают существенные пространственные флуктуации его фазы. Если пренебречь постоянным фоновым значением параметра порядка, то система распадается на почти независимые сверхпроводящие капли, фазы которых свободно флуктуируют, разрушая макроскопическую когерентность сверхпроводящего состояния. Учет постоянного фонового значения приведет к появлению джозефсоновских связей между каплями и возникновению корреляций между их фазами. Последовательный флуктуационный анализ такой системы является нетривиальной проблемой, однако общий характер результатов легко понять на основе работ по гранулированным сверхпроводникам [17]. Если отношение T_c/J не слишком мало, то резонансные примеси окажутся близко друг к другу и джозефсоновские связи между каплями будут достаточно сильными для стабилизации среднеполевого решения практически при том же значении T_c (в этом смысле его правомерно называть «истинным»); при малой же концентрации резонансных примесей

флуктуации понизят T_c по сравнению со среднеполевым результатом (2) до значения, несколько превышающего объемную T_c (см. ниже разд. 7).

Согласно результатам работ [9, 10]

$$T_c \sim g^{1/\gamma}, \quad f \sim (T_c/J)^\gamma, \quad (3)$$

где f — доля объема, занимаемого сверхпроводимостью, $\gamma = 0.57$ — параметр, связанный с фрактальной размерностью волновых функций. Мы не отрицаем существования конфигураций параметра порядка, приводящих к результатам типа (3) (разд. 3), однако выражение (2) дает более высокое значение T_c ; при этом конфигурация параметра порядка определяется редкими всплесками вблизи резонансных примесей, происходящими на атомном масштабе и имеющими объемную концентрацию $f \sim T_c/J$. Если рассматривать проблему сверхпроводимости с вариационной точки зрения, то можно сказать, что в настоящей работе предьявлена более удачная пробная функция по сравнению с работами [9, 10]. Таким образом, результаты настоящей работы соответствуют выражению (3) с $\gamma = 1$ и не содержат информации о мультифрактальности; поэтому нет никаких основа-

ний говорить о «фрактальной сверхпроводимости» [10] в окрестности порога локализации.

В недавней работе Бурмистрова и др. [18] получены результаты, аналогичные [9, 10] в рамках ренормгруппового подхода Финкельштейна [19]. Однако эти работы существенно различаются как по исходным предположениям, так и по обсуждаемому физическому механизму, поэтому нет оснований считать, что одна работа подтверждает другую. Если в работах [9, 10] сделана попытка выйти за пределы самоусредняемости при фиксированном значении константы связи, то в [18] учитывается зависимость константы связи от беспорядка, а самоусредняемость принимается на веру. По последней причине результаты настоящей работы не могли быть воспроизведены в работе [18], а рассмотренный там эффект является более слабым.

2. ТЕОРЕМА АНДЕРСОНА И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ T_c

Основой для описания пространственно-неоднородной сверхпроводимости является уравнение Горькова для сверхпроводящего параметра порядка $\Delta(r)$:

$$\Delta(r) = \int K(r, r') \Delta(r') d^d r' \quad (4)$$

с ядром $K(r, r')$ в представлении точных одноэлектронных состояний

$$K(r, r') = gT \sum_{\omega} \sum_{s, s'} \frac{\varphi_s^*(r) \varphi_s(r') \varphi_{s'}^*(r) \varphi_{s'}(r')}{(\epsilon_s - i\omega)(\epsilon_{s'} + i\omega)}, \quad (5)$$

где $\varphi_s(r)$ — собственные функции одночастичной задачи, ϵ_s — собственные энергии (отсчитанные от уровня Ферми), а суммирование проводится по мацубаровским частотам $\omega_n = \pi T(2n + 1)$ с целым n . Следуя Де Жену [20], используем обрезание по частотам $|\omega| < \omega_0$, соответствующее взаимодействию между электронами

$$V(r, r'; \omega) = -g \theta(\omega_0 - |\omega|) \delta(r - r'), \quad (6)$$

которое является строго локальным и может быть задано независимо от вида одночастичных собственных функций (в отличие от обрезания по импульсам используемого в оригинальной формулировке БКШ, где взаимодействие задается матричными элементами по плоским волнам). При отсутствии магнитных эффектов собственные функции $\varphi_s(r)$ могут быть выбраны действительными, а их ортогональность приводит к правилу сумм [20]

$$\int K(r, r') d^d r' = g\nu_F(r) \ln \frac{1.14\omega_0}{T}, \quad (7)$$

где $\nu_F(r) \equiv \nu(0, r)$ — локальная плотность состояний,

$$\nu(\epsilon, r) = \sum_s |\varphi_s(r)|^2 \delta(\epsilon - \epsilon_s), \quad (8)$$

на уровне Ферми. При выводе (7) предположено, что $\nu(\epsilon, r)$ как функция ϵ медленно меняется на масштабе T_c ; в общем случае под $\nu_F(r)$ надо понимать локальную плотность состояний, сглаженную по энергии на масштабе T_c .

Теорема Андерсона следует из (4) в предположении самоусредняемости параметра порядка, когда $\Delta(r)$ и $K(r, r')$ могут усредняться по беспорядку независимо друг от друга. Поскольку $\langle \Delta(r) \rangle$ не зависит от r ввиду пространственной однородности в среднем, то использование правила сумм (7) дает

$$\langle \Delta \rangle = g \langle \nu_F \rangle \ln \frac{1.14\omega_0}{T} \langle \Delta \rangle, \quad (9)$$

что приводит для T_c к формуле БКШ, содержащей среднюю плотность состояний $\langle \nu_F \rangle$. Последняя не изменяется в точке перехода Андерсона, что указывает на аналогичное поведение T_c . Более детальную информацию можно получить, усредняя (4) по переменной r :

$$\langle \Delta \rangle = g \ln \frac{1.14\omega_0}{T} \langle \nu_F(r) \Delta(r) \rangle. \quad (10)$$

Поскольку функцию $\Delta(r)$ можно считать положительной³⁾, имеем

$$\nu_{min} \langle \Delta \rangle < \langle \nu_F(r) \Delta(r) \rangle < \nu_{max} \langle \Delta \rangle, \quad (11)$$

где ν_{min} и ν_{max} — минимальное и максимальное значение $\nu_F(r)$. Отсюда следует неравенство для T_c

$$1.14\omega_0 \exp(-1/g\nu_{min}) < T_c < 1.14\omega_0 \exp(-1/g\nu_{max}), \quad (12)$$

которое можно также получить из известных теорем теории матриц [13, разд. 2]. Согласно (12), степенная зависимость T_c от константы связи g [9, 10] является невозможной, если для $\nu_F(r)$ существует верхняя граница ν_{max} .

Вблизи перехода Андерсона имеются систематические причины для роста флуктуаций $\nu_F(r)$ [3, 4]. Как замечено в работе [5], коррелятор

³⁾ Ядро $K(r, r')$ при действительных $\varphi_s(r)$ может быть записано в виде $gT \sum_{\omega} |G_{\omega}(r, r')|^2$ (см. (5)) и является положительным, а куперовская неустойчивость соответствует минимальному характеристическому числу (максимальному собственному значению) и реализуется на собственной функции, которая не имеет узлов (теорема Энтча) [21].

$\langle \nu(E + \omega, r) \nu(E, r') \rangle$ при $r = r'$ совпадает со спектральной плотностью Березинского–Горькова [22], которая определяется диффузионным полюсом с наблюдаемым коэффициентом диффузии $D(\omega, q)$ [23], так что

$$\langle \nu(E + \omega, r) \nu(E, r) \rangle \sim \text{Re} \int \frac{d^d q}{-i\omega + D(\omega, q)q^2}. \quad (13)$$

В металлической фазе статический коэффициент диффузии $D(0, q)$ действителен, так что $\langle \nu_F(r)^2 \rangle$ расходится в точке перехода как D^{-1} . В локализованной фазе аналогичную оценку можно получить из самосогласованной теории локализации [24], итерируя уравнение (112) в работе [23]:

$$D(\omega, q) = (-i\omega) d(q) + \omega^2 d_1(q), \quad (14)$$

$$d(q) \sim \xi^2, \quad d_1(q) \sim \xi^4 |\tau|^{-1}$$

(τ — расстояние до перехода), откуда $\langle \nu_F(r)^2 \rangle \sim |\tau|^{-1}$ и возрастание флуктуаций происходит симметрично по две стороны перехода⁴⁾. Оценки коррелятора (13) в критической точке, основанные на мультифрактальности волновых функций [10], дают при $\omega \rightarrow 0$ зависимость $\omega^{-\gamma}$, что при обрезании расходимости на масштабе T_c дает $\nu_{max} \sim \nu_0 (J/T_c)^{\gamma/2}$ и максимальное значение $T_c \sim g^{2/\gamma}$, допускаемое неравенством (12), качественно согласуется с результатами работ [9, 10]. Таким образом, если для T_c достигается верхняя оценка (12), то в точке перехода имеется максимум, значение которого степенным образом зависит от g .

В действительности, распределение величин $|\varphi_s(r)|^2$ имеет степенные хвосты [10] и коррелятор (13) не определяет ни типичного, ни максимально достижимого значения $\nu_F(r)$. Фактически приведенная оценка T_c для слабого беспорядка не достигается, а для сильного — превышает. В этом смысле подход работы [10], основанный на замене матричных элементов $M_{ijkl} = \int d^d r \varphi_i(r) \varphi_j(r) \varphi_k(r) \varphi_l(r)$ их средними значениями (при усреднении независимо от параметра порядка) с самого начала представляется ненадежным.

Более эффективным является подход, основанный на исследовании эффектов от отдельных примесей: он позволяет работать с конкретными реализациями случайного потенциала и снимает все вопросы, связанные с усреднением. Вводя примеси одну за другой, легко убедиться (разд. 4), что неограниченные значения $\nu_F(r)$ могут возникать лишь при

⁴⁾ В самосогласованной теории $D \sim \tau$ в металлической фазе [24].

наличии квазидискретных уровней (рис. 2). Проблема квазидискретных уровней имеет общий характер: легко представить флуктуацию случайного потенциала, при которой некоторая область пространства отделена от окружения достаточно высоким барьером; соответствующие ей уровни могут иметь сколь угодно слабое уширение и, попадая на уровень Ферми, приводят к неограниченному возрастанию $\nu_F(r)$. Исследованию этих вопросов посвящен следующий раздел.

3. РЕЗОНАНСЫ НА КВАЗИДИСКРЕТНЫХ УРОВНЯХ

Предположим, что спектр системы дискретный, а в окрестности уровня Ферми имеется только одно состояние; тогда в сумме по s, s' в (5) можно сохранить один член,

$$K(r, r') = gT \sum_{\omega} \frac{\varphi_0^2(r) \varphi_0^2(r')}{\epsilon_0^2 + \omega^2} \equiv gA(T) \varphi_0^2(r) \varphi_0^2(r'), \quad (15)$$

и из уравнения (4) имеем

$$\Delta(r) = X \varphi_0^2(r),$$

$$X = gA(T) \int \varphi_0^2(r') \Delta(r') d^d r'. \quad (16)$$

Условие самосогласования этих выражений определяет T_c :

$$1 = gA(T)I_4, \quad I_4 = \int \varphi_0^4(r) d^d r. \quad (17)$$

Вычисление $A(T)$ можно проводить без учета обрезания по частотам, так как сумма сходится на верхнем пределе

$$A(T) = T \sum_{\omega} \frac{1}{\epsilon_0^2 + \omega^2} = \frac{1}{2\epsilon_0} \text{th} \frac{\epsilon_0}{2T}. \quad (18)$$

При точном резонансе ($\epsilon_0 = 0$) имеем $A(T) = 1/4T$, откуда

$$T_c = gI_4/4, \quad (19)$$

т. е. T_c степенным образом зависит от константы связи g . В общем случае

$$T_c = \frac{\epsilon_0}{\ln(\epsilon_c + \epsilon_0) - \ln(\epsilon_c - \epsilon_0)}, \quad \epsilon_c = \frac{gI_4}{2} \quad (20)$$

(рис. 4a) и решение существует при условии

$$|\epsilon_0| < \epsilon_c. \quad (21)$$

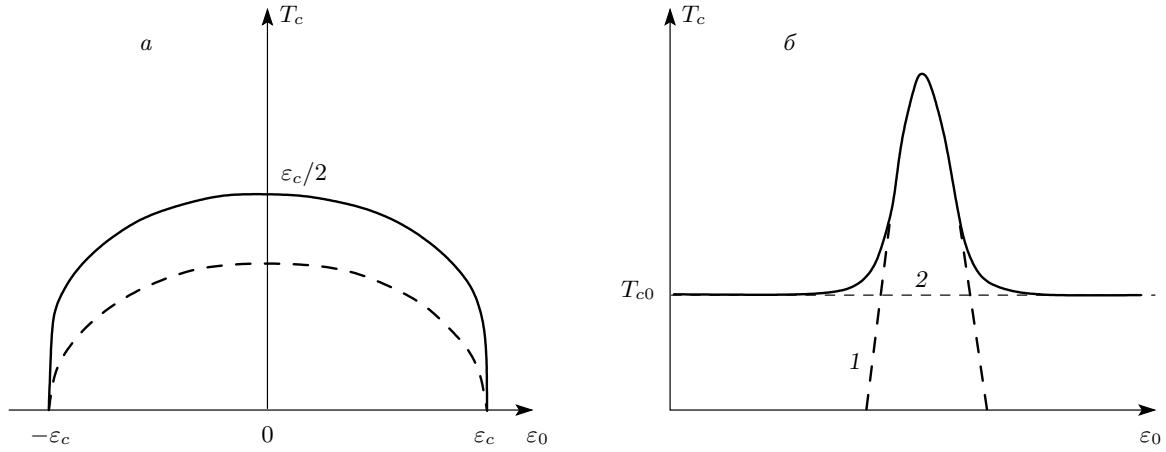


Рис. 4. а) Зависимость T_c одноуровневой системы в зависимости от положения уровня ϵ_0 при отсутствии затухания (сплошная кривая); затухание γ приводит к сдвигу кривой вниз на величину порядка γ (штриховая кривая). б) То же, для ситуации, когда квазидискретный уровень находится на фоне непрерывного спектра: 1 — локализованная сверхпроводимость, k — объемная T_c

На первый взгляд, рассмотренный режим разрушается за счет флуктуаций⁵⁾ или взаимодействия с непрерывным спектром; в действительности это не так (см. ниже) и главной проблемой является возможность совмещения дискретного уровня с уровнем Ферми.

Действительно, пусть система имеет конечный размер L , а ее состояния распространяются по всему объему. Тогда уровень Ферми находится посередине между двумя дискретными уровнями⁶⁾, и ϵ_0 определяется средним расстоянием $J(L/a)^{-d}$ между ними; оценивая $I_4 \sim L^{-d}$ из условия нормировки, получим

$$\epsilon_0 \sim J(L/a)^{-d}, \quad \epsilon_c \sim gL^{-d} \quad (22)$$

и условие (21) не может быть выполнено в режиме слабой связи, в котором только и имеют смысл теории типа БКШ.

Попробуем установить для рассматриваемой конечной системы слабую связь с резервуаром, так чтобы, меняя значение химического потенциала в последнем, совместить его с дискретным уровнем. Однако из этого ничего не получится, так как локальный уровень Ферми в системе (по-прежнему лежащий между двумя дискретными уровнями) будет выравниваться с уровнем Ферми в резервуаре. Реальное перетекание электронов не произойдет из-за

электронейтральности, и проблема решится минимальной деформацией: образуется двойной слой на границе между системой и резервуаром, который и выравнивает уровни Ферми.

По той же причине ситуацию нельзя улучшить за счет локализации состояний. На первый взгляд, в этом случае $\epsilon_0 \sim J(L/a)^{-d}$, $\epsilon_c \sim g\xi^{-d}$ (где ξ — радиус локализации $\varphi_0(r)$), так что условие (21) сводится к $g \gtrsim Ja^d(L/\xi)^{-d}$ и может быть выполнено при достаточно больших L . На самом же деле, блоки размера ξ являются квазинезависимыми и у каждого из них есть свой локальный уровень Ферми; эти уровни выравниваются из-за образования двойного слоя между блоками, и фактически указанные оценки справедливы лишь при $L \sim \xi$. Сказанное, по сути, является механизмом образования кулоновской щели [25].

По-видимому, единственная ситуация, в которой не срабатывают приведенные аргументы, — когда L имеет атомный порядок величины. Действительно, на таких масштабах: а) нельзя говорить об уровне Ферми; б) возможно нарушение электронейтральности; в) нельзя говорить о двойном слое, поскольку он сравним с размерами системы. Поэтому эффекты сильного нарушения самоусредняемости можно полностью проанализировать путем рассмотрения однопримесной задачи (разд. 4).

Уже на этом этапе можно установить связь с результатами работ [9, 10]. В рамках рассматриваемой там строго одночастичной картины флуктуации дискретной системы уровней относительно уровня Фер-

⁵⁾ Если состояние $\varphi(r)$ является локализованным, то согласно (20) сверхпроводящий переход происходит в конечной системе; разумеется, это артефакт теории среднего поля и в действительности переход разрушается флуктуациями.

⁶⁾ В отношении эффекта четности см. сноску 16.

ми ничем не ограничены; поэтому резонансы возможны на любых масштабах L . При этом воспроизводятся все основные утверждения работ [9, 10]: T_c имеет степенное поведение как функция g и не зависит от частоты обрезания ω_0 , тогда как параметр порядка $\Delta(r)$ повторяет форму волновой функции (см. (16)) и при мультифрактальности последней будет также мультифрактальным⁷⁾. Однако эта картина полностью разрушается при учете электронейтральности, так как резонансы на больших масштабах становятся невозможными. Фактически крупномасштабные флуктуации несущественны и в одночастичной картине: согласно (17), (19), при точном резонансе $T_c \sim gL^{-d}$ и максимальное значение соответствует малым масштабам.

Покажем, что рассмотренный режим может сохраняться и при наличии непрерывного спектра. В этом случае уровень ϵ_0 приобретает конечное затухание γ , которое может быть учтено в формуле (15) путем замены

$$\epsilon_0 \pm i\omega \rightarrow \epsilon_0 \pm i\omega \pm i\gamma \operatorname{sign} \omega, \quad (23)$$

так что

$$A(T) = T \sum_{\omega} \frac{1}{\epsilon_0^2 + (|\omega| + \gamma)^2} \approx \frac{1}{\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{\epsilon_0}{\gamma + bT}, \quad (24)$$

где мы оценили сумму интегралом, введя обрезание $|\omega| > bT$ (при выборе $b = 4/\pi$ такая оценка почти совпадает с точным результатом (18) при $\gamma = 0$). Нетрудно видеть, что конечность γ качественно приводит к тому, что кривая на рис. 4а сдвигается вниз на величину порядка γ , а следовательно, решение сохраняется при $\gamma \lesssim \epsilon_c$.

При учете конечности ω_0 получим вместо (24)

$$A(T) \approx \frac{1}{\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{\epsilon_0(\omega_0 - bT)}{\epsilon_0^2 + (\omega_0 + \gamma)(\gamma + bT)}, \quad (24')$$

и легко убедиться, что конечность ω_0 несущественна при $\omega_0 \gg \epsilon_c$. В обратном предельном случае, $\omega_0 \ll \epsilon_c$, допустимые значения ϵ_0 и γ имеют порядок $(\epsilon_c \omega_0)^{1/2}$, а максимальное значение T_c оказывается порядка ω_0 ; фактически ограничение $T_c < \omega_0/\pi$ очевидно, так как при $T > \omega_0/\pi$ в сумме по ω не остается ни одного члена.

⁷⁾ На наш взгляд, нет сомнений в том, что в [9, 10] неявным образом рассматривался тот же самый эффект, но использованная процедура усреднения приводила к доминированию больших масштабов.

Для исследования влияния непрерывного спектра на параметр порядка можно использовать для ядра $K(r, r')$ приближение

$$K(r, r') = K_0(r - r') + gA(T)\varphi_0^2(r)\varphi_0^2(r'), \quad (25)$$

в котором пренебрегается обратным влиянием дискретного уровня на непрерывный спектр. Как показывает опыт [11, 12], такое приближение обеспечивает качественно правильное описание и его можно обосновать в некоторых предельных случаях⁸⁾.

Имея в виду рассмотрение периодических конфигураций, приведем решение уравнения (4) с ядром (25) для конечной системы размера L с периодическими граничными условиями при $L \ll \xi_0 \tau^{-1/2}$, где $\tau = (T - T_{c0})/T_{c0}$, ξ_0 — длина когерентности, T_{c0} — температура перехода, соответствующая непрерывному спектру⁹⁾. Переходя к фурье-представлению, имеем

$$\begin{aligned} \Delta_q &= gA(T)X \frac{\langle \varphi_0^2 \rangle_q}{1 - K_0(q)}, \\ X &= L^{-d} \sum_q \langle \varphi_0^2 \rangle_{-q} \Delta_q \end{aligned} \quad (26)$$

и условие самосогласования этих выражений дает

$$1 = gA(T) \left[L^{-d} \sum_q \langle \varphi_0^2 \rangle_q \langle \varphi_0^2 \rangle_{-q} + L^{-d} \sum_q \frac{K_0(q)}{1 - K_0(q)} \langle \varphi_0^2 \rangle_q \langle \varphi_0^2 \rangle_{-q} \right]. \quad (27)$$

Используя разложение по q^2

$$1 - K_0(q) = \lambda_0 \tau + \frac{1}{2} \lambda_0 \xi_0^2 q^2 + \dots, \quad (28)$$

нетрудно видеть, что главный вклад во вторую сумму (27) дают малые q и при условии $L \ll \xi_0 \tau^{-1/2}$ можно ограничиться членом с $q = 0$. Тогда уравнение самосогласования принимает вид

$$1 = gA(T) \left[I_4 + \frac{1}{\lambda_0 L^d \tau} \right], \quad (29)$$

⁸⁾ В разд. 4 рассматривается задача об одной примеси с учетом обратного влияния на непрерывный спектр.

⁹⁾ Появление характерного масштаба $\xi(T) = \xi_0 \tau^{-1/2}$ обсуждалось ранее [11] для задачи о плоских дефектах. При $L \gg \xi(T)$ ситуация фактически соответствует независимым дефектам; при этом параметр порядка убывает при удалении от них на масштабе $\xi(T)$. В обратном случае, $L \ll \xi(T)$, он практически постоянен в пространстве между дефектами. В дальнейшем (разд. 5) окажутся актуальными конфигурации с малой концентрацией ($\sim T_c/E_F$) резонансных примесей, расстояния между которыми $a(E_F/T_c)^{1/3}$ заведомо меньше, чем $\xi_0 \sim a(E_F/T_c)$.

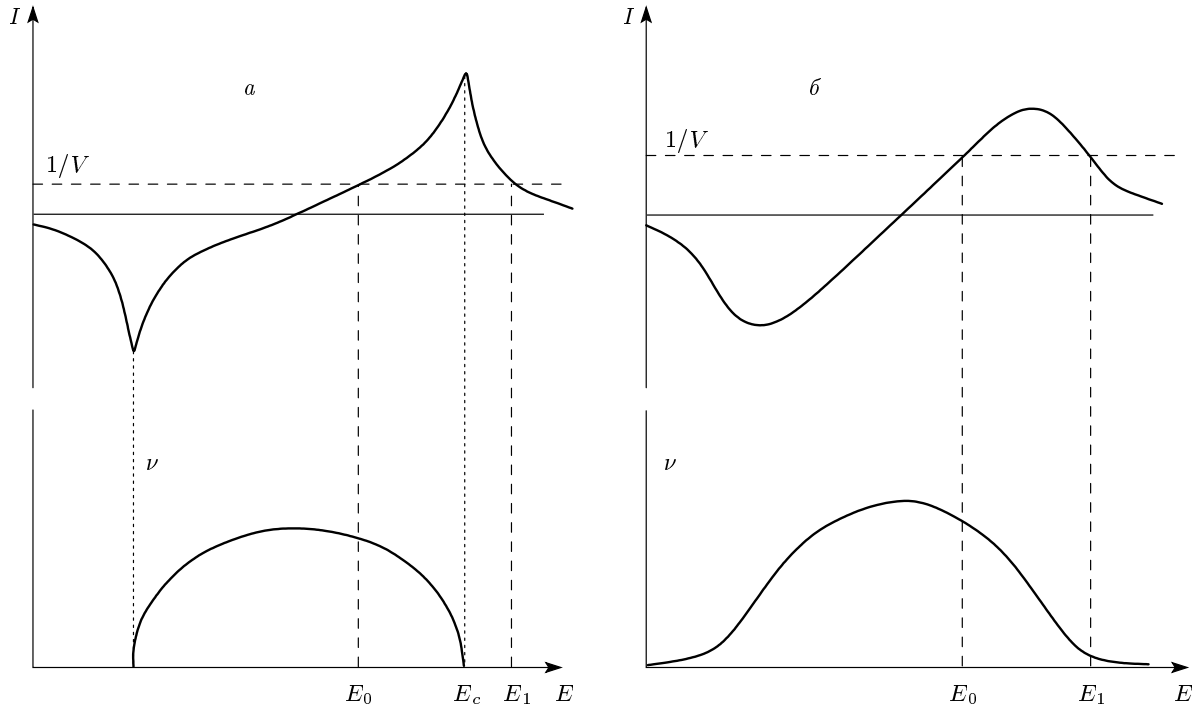


Рис. 5. а) При внесении примеси $V\delta_{nn_0}$ в идеальную решетку уравнение $1 = VI(E)$ имеет при больших V два решения, E_1 и E_0 , которые соответствуют локальному и квазилокальному уровням. б) Если примесь вносится в неупорядоченную решетку, то оба решения соответствуют квазилокальным уровням

а аналогичные приближения в (26) дают

$$\Delta(r) = \text{const} \left[\varphi_0^2(r) + \frac{1}{\lambda_0 L^{d_T}} \right]. \quad (30)$$

Если $T_{c0} \ll \epsilon_c$, то зависимость T_c от ϵ_0 имеет вид, показанный на рис. 4б. В нулевом приближении имеются две независимые подсистемы — квазилокальная с температурой перехода (20) (если затухание γ мало) и непрерывная с $T_c = T_{c0}$, тогда как T_c составной системы определяется максимальным из двух значений. Взаимодействие двух подсистем оказывается слабым и приводит лишь к сглаживанию излома в зависимости $T_c(\epsilon_0)$ на масштабе $T_{c0}(a/L)^{d/2}$, если функция $\varphi(r)$ локализована на атомном масштабе a . Из вида решения (30) ясно, что параметр порядка $\Delta(r)$ практически постоянен при малых τ и локализован на масштабе a при больших τ , причем переход от одного режима к другому очень резкий — происходит своеобразный «переход Андерсона» для сверхпроводящих электронов. Таким образом, локализованный режим сохраняется при наличии непрерывного спектра, если соответствующее ему значение T_c существенно превышает T_{c0} . При этом существование непрерывного спектра оказывает стабилизирую-

щее воздействие на сверхпроводимость, так как параметр порядка отличен от нуля во всем объеме.

4. ОДНОПРИМЕСНАЯ ЗАДАЧА

Если $G_{nn'}^0$ — функция Грина идеальной решетки, $V_n = V\delta_{nn_0}$ — потенциал примеси, то функция Грина $G_{nn'}$ возмущенной системы определяется уравнением Дайсона [26]:

$$G_{nn'} = G_{nn'}^0 + G_{nn_0}^0 V G_{n_0n'}. \quad (31)$$

Полагая $n = n_0$, имеем замкнутое уравнение для $G_{n_0n'}$, решение которого подставляется в формулу (31):

$$G_{nn'} = G_{nn'}^0 + G_{nn_0}^0 \mathcal{T} G_{n_0n'}, \quad (32)$$

$$\mathcal{T} = \frac{V}{1 - V G_{n_0n_0}^0},$$

где \mathcal{T} -матрица рассеяния в данном случае сводится к константе. Для идеальной решетки G_{nn}^0 не зависит от n :

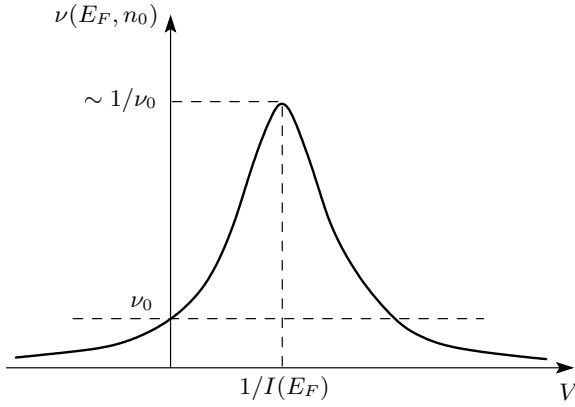


Рис. 6. Локальная плотность состояний в точке n_0 как функция потенциала примеси

$$G_{nn}^0 = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{E - \epsilon_k + i0} = \int \frac{\nu_0(\epsilon) d\epsilon}{E - \epsilon + i0} \equiv I(E) - i\pi\nu_0(E), \quad (33)$$

так что \mathcal{T} -матрица не содержит зависимости от n_0 . Условие $1 - VI(E) = 0$ соответствует возникновению локального (если $\nu_0(E) = 0$) или квазилокального (если $\nu_0(E) \neq 0$) уровня [26, 27] (рис. 5). Локальная плотность состояний на узле n_0

$$\nu(E, n_0) = \frac{\nu_0(E)}{[1 - VI(E)]^2 + [\pi V\nu_0(E)]^2} \quad (34)$$

имеет резкий максимум в окрестности резонанса $1 - VI(\epsilon_0) = 0$ (рис. 6), значение в котором

$$[\nu(E, n_0)]_{res} = I(\epsilon_0)^2 / \pi^2 \nu_0(\epsilon_0) \quad (35)$$

неограниченно возрастает вблизи затравочного края спектра, когда $\nu_0(\epsilon_0) \rightarrow 0$. Вблизи края зоны $G_{nn'}^0$ может вычисляться в континуальном приближении и при $d = 3$ имеет вид

$$G_{nn'}^0 \rightarrow G^0(r - r') = -\pi\nu_0 \frac{e^{ik_F|r-r'|}}{k_F|r-r'|}, \quad (36)$$

$|r - r'| \gtrsim a,$

так что отличие $\nu(E, n_0)$ от $\nu_0(E)$ максимально при $n = n_0$ и стремится к нулю при $|n - n'| \rightarrow \infty$.

Мацубаровская функция Грина получается из (32) заменой $E \rightarrow \epsilon_F + i\omega$, где $\epsilon_F = 0$ при соответствующем выборе начала отсчета энергии. Полагая также $n_0 = 0$, имеем для сверхпроводящего ядра

$$K(r, r') = gT \sum_{\omega} |G_{\omega}(r, r')|^2 = gT \sum_{\omega} |G_{\omega}^0(r-r')|^2 + gT \sum_{\omega} G_{\omega}^0(r) \mathcal{T}_{\omega} G_{\omega}^0(r') G_{-\omega}^0(r-r') + gT \sum_{\omega} G_{-\omega}^0(r) \mathcal{T}_{-\omega} G_{-\omega}^0(r') G_{\omega}^0(r-r') + gT \sum_{\omega} |G_{\omega}^0(r)|^2 |\mathcal{T}_{\omega}|^2 |G_{\omega}^0(r')|^2 \equiv K_0(r-r') + K_1(r, r'). \quad (37)$$

Решение уравнения (4) с ядром (37) ищем в виде

$$\Delta(r) = \Delta_0 + \Delta_1(r), \quad (38)$$

где функция $\Delta_1(r)$ локализована вблизи $r = 0$. Подставляя в (4) и используя правило сумм (7), имеем

$$\Delta(r) = \int K_0(r-r')\Delta(r') d^3 r' + g\nu_1(r) \ln \frac{1.14\omega_0}{T} \Delta_0 + F(r), \quad (39)$$

где $\nu_1(r)$ — отклонение локальной плотности состояний от ν_0 и

$$F(r) = \int K_1(r, r')\Delta_1(r') d^3 r'. \quad (40)$$

Поскольку рассмотрение изолированных примесей неактуально (см. сноску 5), предположим их периодическое расположение и будем искать решение уравнения Горькова для конечной системы размера L с периодическими граничными условиями при $L \ll \xi_0 \tau^{-1/2}$. Разрешим (39) относительно $\Delta(r)$ переходом к фурье-представлению и преобразуем выражения в квадратных скобках аналогично (27): постоянный член соответствует Δ_0 , тогда как локализованный определяет $\Delta_1(r)$:

$$\Delta_0 = \frac{K_0(0)}{\lambda_0 L^3 \tau} \left[\Delta_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} g \langle \nu_1 \rangle_0 + \langle F \rangle_0 \right],$$

$$\Delta_1(r) = \Delta_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} g\nu_1(r) + F(r), \quad (41)$$

где $\langle \dots \rangle_0$ — нулевая фурье-компонента. Выписывая явное выражение для $F(r)$ и полагая в интегралах¹⁰⁾

$$\Delta_1(r') G_{\omega}^0(r-r') \approx \Delta_1(r') G_{\omega}^0(r), \quad (42)$$

¹⁰⁾ Это приближение не является вполне строгим, но фактически используется лишь для оценок: соответствующие члены характеризуются параметрами λ_{02} и λ_{12} , которые несущественны ни вдали от резонанса, ни в его окрестности (см. Приложение).

приведем (41) к виду

$$\Delta_0 = \frac{K_0(0)}{\lambda_0 L^3 \tau} \ln \frac{1.14\omega_0}{T} [g\langle\nu_1\rangle_0 \Delta_0 + g\langle\nu_1 \Delta_1\rangle_0], \quad (43a)$$

$$\Delta_1(r) = \Delta_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} g\nu_1(r) + gT \sum_{\omega} Z_{\omega} |G_{\omega}^0(r)|^2, \quad (43b)$$

где введены величины

$$Z_{\omega} = \mathcal{T}_{\omega} Y_{\omega} + \mathcal{T}_{-\omega} Y_{-\omega} + |\mathcal{T}_{\omega}|^2 X_{\omega},$$

$$\begin{aligned} X_{\omega} &= \int \Delta_1(r) |G_{\omega}^0(r)|^2 d^3r, \\ Y_{\omega} &= \int \Delta_1(r) G_{\omega}^0(r) d^3r. \end{aligned} \quad (44)$$

Подставляя $\Delta_1(r)$ из (43b) в выражения (44) и оценивая возникающие интегралы

$$\begin{aligned} g \int \nu_1(r) |G_{\omega}^0(r)|^2 d^3r &\equiv \lambda_{01}, \\ g \int |G_{\omega}^0(r)|^2 |G_{\omega'}^0(r)|^2 d^3r &\equiv \lambda_{11}, \\ g \int \nu_1(r) G_{\omega}^0(r) d^3r &\equiv \lambda'_{02} + i\lambda''_{02} \text{sign} \omega, \\ g \int G_{\omega}^0(r) |G_{\omega'}^0(r)|^2 d^3r &\equiv \lambda'_{12} + i\lambda''_{12} \text{sign} \omega, \end{aligned} \quad (45)$$

с учетом выражений для $G_{\omega}^0(r)$ и $\nu_1(r)$ (штрихом и двумя штрихами отмечаем действительную и мнимую части)

$$\begin{aligned} G_{\omega}^0(r) &= -\frac{\pi\nu_0}{k_F r} \exp \left\{ -\frac{|\omega|}{v_F} r + ik_F r \text{sign} \omega \right\}, \\ \nu_1(r) &= -\pi\nu_0^2 \frac{\mathcal{T}'' \cos 2k_F r + \mathcal{T}' \sin 2k_F r}{(k_F r)^2}, \end{aligned} \quad (46)$$

легко убедиться, что интегралы сходятся уже при $\omega, \omega' = 0$, что позволяет считать параметры $\lambda_{01}, \lambda_{11}$ и т. д. постоянными и записать (44) в виде

$$\begin{aligned} X_{\omega} &= X, \quad Y_{\omega} = Y' + iY'' \text{sign} \omega, \\ Z_{\omega} &= 2\mathcal{T}'_{\omega} Y' - 2|\mathcal{T}''_{\omega}| Y'' + |\mathcal{T}_{\omega}|^2 X. \end{aligned} \quad (47)$$

Область вдали от резонанса. Естественным масштабом для энергетической зависимости \mathcal{T} -матрицы является ширина зоны J , что позволяет считать \mathcal{T}'_{ω} и $|\mathcal{T}''_{\omega}|$ независимыми от ω всюду, кроме окрестности резонанса (см. ниже). Тогда Z_{ω} также не зависит от ω и подставляя $\Delta_1(r)$ из (43b) в выражения (44), можно получить линейную систему уравнений для

Δ_0 и Z (см. Приложение), условие разрешимости которой дает

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\lambda_0 L^3} \int d^3r \frac{\nu_0 \nu_1(r) + \nu_1(r)^2}{\nu_0^2}, \quad (48)$$

что является естественным обобщением результата (1): первый член в числителе соответствует теореме Андерсона, тогда как второй определяет отклонения от нее. Конфигурация параметра порядка показывает, что (48) соответствует делокализованному режиму.

Легко видеть, что для слабых примесей ($|V| \ll J$)

$$\mathcal{T}' \approx \mathcal{T} \sim Va^3, \quad \mathcal{T}'' \sim Va^3(V/J)(k_F a), \quad (49)$$

где мы имеем в виду ситуацию вблизи края зоны, считая $k_F a \ll 1$; оценки для энергий вблизи центра зоны получаются при $k_F a \sim 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \nu_0 \langle\nu_1\rangle_0 &\sim a^3 \nu_0^2 (V/J)(k_F a)^{-2}, \\ \langle\nu_1^2\rangle_0 &\sim a^3 \nu_0^2 (V^2/J^2)(k_F a)^{-1}, \end{aligned} \quad (50)$$

так что андерсоновский член является главным как по параметру V/J , так и по параметру $(k_F a)^{-1}$. Вне области резонанса оценка (50) справедлива и при $V \sim J$.

Делокализованный режим сохраняется, если условие резонанса $1 \approx VI(E_F)$ формально выполнено, но плотность состояний $\nu(E_F)$ достаточно велика и обеспечивает сильное затухание квазилокального состояния. В этом случае (определение ϵ_0 и γ см. в (54))

$$\mathcal{T}' \sim Ja^3 \frac{J\epsilon_0}{\gamma^2}, \quad \mathcal{T}'' \sim Ja^3 \frac{J}{\gamma} \quad (51)$$

и при условии $\gamma \gtrsim \epsilon_0$ справедлива оценка

$$\nu_0 \langle\nu_1\rangle_0 \sim \langle\nu_1^2\rangle_0 \sim a^3 \nu_0^2 (k_F a)^{-2}, \quad (52)$$

т. е. андерсоновский член имеет тот же порядок, что и поправка к нему.

Окрестность резонанса. Если ϵ_0 — корень уравнения $1 = VI(\epsilon)$, то вблизи него

$$1 - VI(\epsilon) = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{E_0}, \quad E_0 \sim J, \quad (53)$$

откуда

$$\mathcal{T} = \frac{VE_0}{\epsilon - \epsilon_0 + i\gamma}, \quad \gamma = \pi VE_0 \nu(\epsilon_0). \quad (54)$$

При переходе к мадубаровскому представлению получим

$$\mathcal{T}_{\omega} = \frac{VE_0}{i\omega - \epsilon_0 + i\gamma \text{sign} \omega} \equiv \mathcal{T}'_{\omega} - i|\mathcal{T}''_{\omega}| \text{sign} \omega, \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{T}'_{\omega} &= -VE_0 \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0^2 + (|\omega| + \gamma)^2}, \\ |\mathcal{T}''_{\omega}| &= VE_0 \frac{|\omega| + \gamma}{\epsilon_0^2 + (|\omega| + \gamma)^2}, \end{aligned} \quad (56)$$

так что независимость \mathcal{T} -матрицы от ω имеет место при

$$|\omega| \ll \gamma \quad \text{или} \quad k_F a \gg \omega/J, \quad (57)$$

т. е. не слишком близко к затравочному краю зоны. Если это условие не выполняется¹¹⁾, то нельзя пренебрегать зависимостью от ω величин \mathcal{T}'_{ω} и $|\mathcal{T}''_{\omega}|$, а следовательно Z_{ω} . Фактически оказывается существенной одна комбинация

$$S = T \sum_{\omega} Z_{\omega}, \quad (58)$$

и подстановка $\Delta_1(r)$ из (43b) в выражения (44) позволяет выразить Z_{ω} через Δ_0 и S ; подставляя выражение для Z_{ω} в (58) и (43), получим линейную систему уравнений для Δ_0 и S ; записывая условие ее разрешимости и сохраняя лишь главные члены (см. Приложение), получим

$$\begin{aligned} \left(\tau - \frac{\nu_0 \langle \nu_1 \rangle_0 + \langle \nu_1^2 \rangle_0}{\lambda_0 L^3 \nu_0^2} \right) \times \\ \times (-1 + \lambda_{11} V^2 E_0^2 A(T)) + \tau_c^2 = 0, \end{aligned} \quad (59)$$

где $A(T)$ соответствует выражению (24). Уравнение (59) описывает типичную ситуацию, связанную с пересечением термов. Ноль первой круглой скобки соответствует делокализованному режиму, описываемому уравнением (48), ноль второй скобки — уравнению для T_c для локализованной сверхпроводимости (ср. с (17), (24)) тогда как член $\tau_c^2 \sim (a/L)^3$ снимает вырождение термов в точке пересечения (рис. 7).

5. СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ АНДЕРСОНА

Обычно исследование локализации проводится на основе модели Андерсона, описываемой дискретной версией уравнения Шредингера со случайным потенциалом: затравочный спектр является зоной с шириной J , тогда как значения потенциала V_n на узлах решетки являются независимыми случайными

¹¹⁾ В этом случае множитель $\exp(-|\omega|/v_F)$ ограничивает вклад в интегралы (45) атомным масштабом, на котором выражения (46) уже не применимы.

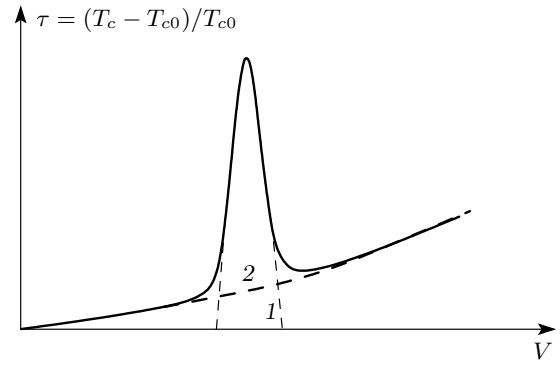


Рис. 7. Зависимость T_c от потенциала примеси V для малой концентрации примесей: 1 — локализованная сверхпроводимость, 2 — делокализованный режим

величинами, имеющими распределение $P\{V\}$ шириной порядка W , которое будем считать прямоугольным. Чтобы от однопримесной задачи перейти к модели Андерсона, достаточно принять, что потенциал примесей V флуктуирует в интервале $(-W, W)$, а их концентрация c постепенно увеличивается от малых значений до значений порядка единицы.

Формально результаты разд. 4 соответствуют периодическому расположению примесей, однако в действительности их периодичность несущественна: каждая примесь вызывает лишь локальную деформацию параметра порядка и при малой концентрации эти деформации независимы. Если $\Delta_1(r)$ и $\nu_1(r)$ соответствуют однопримесной задаче, то конфигурации

$$\Delta(r) = \Delta_0 + \sum_i \Delta_1(r - r_i), \quad (60)$$

$$\nu_F(r) = \nu_0 + \sum_i \nu_1(r - r_i)$$

соответствуют задаче с несколькими примесями в точках r_i : это следует из локализации ядра $K_1(r, r')$ по обоим переменным вблизи точки расположения дефекта. Из (41) ясно, что амплитуда $\Delta_1(r)$ пропорциональна Δ_0 , так что $\Delta_1(r) = \Delta_0 f(r)$ и подстановка (60) в (10) дает для T_c , близких к T_{c0} :

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{m}{\lambda_0^2 L^3 g} \int d^3 r [\nu_1(r) + \nu_1(r) f(r)], \quad (61)$$

где m — число примесей в объеме L^3 , а $f(r) =$

$= \nu_1(r)/\nu_0$ из сопоставления с (48)¹²); эффект пропорционален концентрации примесей, а их расположение значения не имеет. Для справедливости теоремы Андерсона достаточно условие $|f(r)| \ll 1$, которое выполняется для слабых примесей. В случае неодинаковых примесей результат (61) нужно усреднить по распределению $P(V)$.

В режиме сильной локализации параметра порядка каждая примесь становится практически не зависимой от окружения и T_c системы определяется теми из них, которые наиболее близки к резонансу; если непрерывное распределение $P(V)$ является достаточно широким, то условие резонанса, близкое к точному, всегда реализуется с некоторой вероятностью. Тем самым концентрация резонансных примесей конечна и их квазипериодическое расположение стабилизирует среднеполевое решение.

Сказанное полностью проясняет ситуацию для малой концентрации примесей. Чтобы перейти к более высокой концентрации, заметим, что в уравнениях (31), (32) нигде не использовано, что $G_{nn'}^0$ относится к идеальной решетке; поэтому те же уравнения описывают внесение дополнительной примеси в уже неупорядоченный сверхпроводник. Замечая, что

$$G_{n_0 n_0}^0 = \sum_s \frac{|\varphi_s(n_0)|^2}{E - \epsilon_s + i0} = \int d\epsilon \frac{\nu(\epsilon, n_0)}{E - \epsilon + i0}$$

и заменяя $\nu(\epsilon, n_0)$ на среднее значение $\langle \nu(\epsilon) \rangle$, получим то же представление $I(E) - i\pi\nu(E)$, что и в (33), с предсказуемым поведением функций $I(E)$ и $\nu(E)$ (рис. 5б).

Слабые примеси. В этом случае поведение функций $I(E)$ и $\nu(E)$ отличается от их поведения в идеальном кристалле лишь небольшим сглаживанием ван-хововских сингулярностей (рис. 5б). Учет зависимости от n_0 приведет к флуктуациям формы этих зависимостей, которое будет также невелико. Отсюда ясно, что для слабых примесей ($|V| \ll J$) резонансы не возникают и локализация параметра порядка на них невозможна.

В делокализованном режиме результат (61) удобно переписать в другом виде. Подставляя в уравнение (10) однопримесную конфигурацию $\Delta(r) = \Delta_0 + \Delta_0 f(r)$, $\nu(r) = \nu_0 + \nu_1(r)$, получим для эффек-

тивной плотности состояний, входящей в формулу БКШ:

$$\nu_{eff} = \frac{\nu_0 + \nu_0 \langle f \rangle + \langle \nu_1 \rangle + \langle \nu_1 f \rangle}{1 + \langle f \rangle}. \quad (62)$$

Вычитая результат с $f \equiv 0$ и сохраняя главные по L^{-d} члены, имеем

$$\begin{aligned} \nu_{eff} - \langle \nu \rangle &= \langle \nu_1 f \rangle = \frac{\langle \nu_1^2 \rangle}{\nu_0} = \frac{\nu_0 (\mathcal{T}')^2}{4k_F L^3}, \\ \langle \nu \rangle - \nu_0 &= \langle \nu_1 \rangle = -\frac{\nu_0 \mathcal{T}'}{2k_F^2 L^3}, \end{aligned} \quad (63)$$

где учтено, что для слабых примесей в выражении (46) можно ограничиться лишь членом с $\mathcal{T}' \approx V + V^2 I(E_F)$. Вводя примеси одну за другой и усредняя по V ,

$$\begin{aligned} \nu_{eff} - \langle \nu \rangle &\sim c\nu_0 \frac{W^2}{J^2} (k_F a)^{-1}, \\ \langle \nu \rangle - \nu_0 &\sim c\nu_0 \frac{W^2}{J^2} (k_F a)^{-2}, \end{aligned} \quad (64)$$

видим, что при увеличении концентрации примесей приращение величины $\nu_{eff} - \langle \nu \rangle$ на фактор $k_F a$ меньше, чем приращение $\langle \nu \rangle - \nu_0$. Вблизи края зоны для достаточно больших концентраций имеем $\langle \nu \rangle \gg \nu_0$, так что $\nu_{eff} - \langle \nu \rangle \sim k_F a \langle \nu \rangle$ и отклонения от теоремы Андерсона малы. Вблизи центра зоны $k_F a \sim 1$ и отклонения $\langle \nu \rangle$ от ν_0 малы вплоть до концентраций $c \sim 1$, так же, как и отклонения ν_{eff} от $\langle \nu \rangle$; при этом $\nu_{eff} - \langle \nu \rangle \ll \langle \nu \rangle$. Из сказанного ясно, что для слабых примесей самоусредняемость вообще не нарушается.

В трехмерном случае изолированные слабые примеси не приводят к образованию связанных состояний в области энергий, лежащих вне затравочного спектра (это ясно из рис. 5а), а появление конечной плотности состояний в этой области является коллективным эффектом, связанным с длинноволновыми флуктуациями края зоны. Пусть в области размера L происходит флуктуация, состоящая в том, что интервал изменения V оказывается несколько ограниченным, $(-W, W - 2\delta)$ вместо $(-W, W)$. Тогда среднее значение потенциала в этой области понижается на величину δ , а вероятность флуктуации $\exp(-L^d \delta / W)$ не будет слишком малой, если $L^d \delta / W \lesssim 1$. Подобные флуктуации, происходящие на разных масштабах, и создают конечную плотность состояний за пределами затравочного спектра¹³. Если размер L указанной флуктуации доста-

¹² Соотношение $\Delta_1(r) = \Delta_0 \nu_1(r) / \nu_0$ для слабого беспорядка следует из второго уравнения (41), если пренебречь величиной $F(r)$, имеющей второй порядок малости. Его справедливость в делокализованном режиме без предположения малости $\nu_1(r)$ является нетривиальным результатом, выражаемым уравнением (48).

¹³ Представление о размахе длинноволновых флуктуаций можно получить, заметив, что в предельных случаях происходит сдвиг зоны как целого на величину W или $-W$, т.е. сами по себе (без учета частичной дискретизации спектра) они не приводят к неограниченным значениям $\nu_F(r)$.

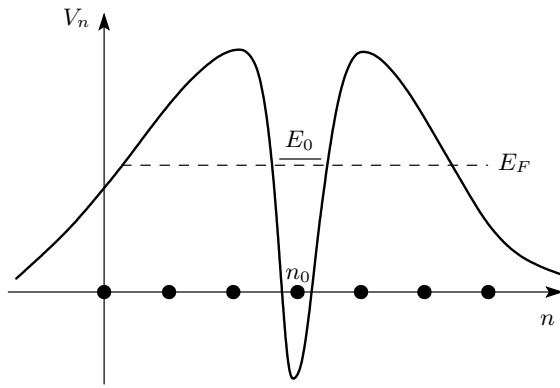


Рис. 8. Типичная флуктуация случайного потенциала, приводящая к возникновению квазилокального состояния в глубине разрешенной зоны

точно велик для существования в ней сверхпроводимости, то последняя не будет отличаться от сверхпроводимости в исходной системе с несмещенным краем зоны, т. е. примеси не будут нарушать постоянство параметра порядка. Вблизи затравочного края зоны такие флуктуации сильно перекрываются и сверхпроводимость оказывается квазиоднородной. Пространственная разделенность флуктуаций возникает лишь в области сильной локализации, где их описание можно производить в терминах размерного эффекта (разд. 6).

Сильные примеси. При малой концентрации сильных примесей ($|V| \gtrsim J$) поведение функций $I(E)$ и $\nu(E)$ по-прежнему будет не сильно отличаться от их поведения в идеальном кристалле. Однако в окрестности максимума $I(E)$ появится конечная плотность состояний, которая, на первый взгляд, затруднит возникновение резонансов в этой области. Но при этом возникает новое явление. Поскольку теперь $G_{n_0 n_0}^0$ зависит от n_0 , уширение квазилокального уровня будет определяться не средней плотностью состояний, а ее локальным значением в точке n_0 , которое флуктуационным образом может оказаться малым. В результате появляется возможность резонансов даже для энергий вблизи центра зоны, т. е. там, где они были запрещены в идеальной решетке. Типичная ситуация, когда локальная плотность состояний $\nu_F(n_0)$ мала, связана с большими значениями случайного потенциала в окрестности n_0 ; если в узел n_0 помещается примесь с большим отрицательным V , то возникает характерная резонансная конфигу-

рация (рис. 8)¹⁴. В «минимальном» варианте такая конфигурация соответствует наличию высоких барьеров на ближайших соседях узла n_0 , тогда как значение потенциала на этом узле подобрано так, чтобы соответствующий ему уровень попадал в интервал порядка T_c вблизи уровня Ферми (вероятность этого порядка T_c/W). Для конечной зоны запирающим является как большое положительное, так и большое отрицательное значение потенциала, поэтому при $W \gg J$ такие значения возникают с вероятностью p , не слишком отличной от единицы. Таким образом, вероятность «минимальной» флуктуации

$$P_{res} \sim p^Z T_c/W, \quad (65)$$

где Z — число ближайших соседей. Легко видеть, что подобные резонансы могут возникать при любых положениях уровня Ферми. В области флуктуационного хвоста плотность состояний мала естественным образом и создавать слабопроницаемый барьер нет необходимости; поэтому множитель p^Z будет отсутствовать, но для попадания уровня в нужную часть спектра требуется более маловероятная форма эффективной потенциальной ямы¹⁵. По мере роста концентрации примесей эффективная ширина зоны будет увеличиваться и в соответствии с этим будет смещаться максимум функции $I(E)$. Однако общий механизм возникновения резонансов, так же как и оценка их вероятности, при любой концентрации остаются неизменными.

Поскольку истинная температура перехода является трудно наблюдаемой, актуально рассмотрение объемной T_c , которую можно определить как T_c системы с исключенными резонансными примесями. Для сильных, но нерезонансных примесей, два члена в формуле (48) оказываются одного порядка величины (см. (50), (52)), а примеси можно считать независимыми вплоть до концентраций $c \sim 1$, так как порог подвижности лежит вдали от затравочного края спектра и $k_F a \sim 1$. О справедливости теоре-

¹⁴ Согласно [28], такие конфигурации ответственны за возникновение мультифрактальной статистики. При этом хвосты функций распределения определяются не фрактальными кластерами, а одиночными пиками, что коррелирует с излагаемой точкой зрения. Таким образом, мы не игнорируем существование мультифрактальности, а лишь по-другому описываем ее влияние на сверхпроводимость.

¹⁵ Строго говоря, резонансные конфигурации указанного типа возможны и для слабых примесей в окрестности затравочного края спектра. Однако такие конфигурации с необходимостью являются крупномасштабными (из-за ограниченности высоты барьера и отсутствия уровней в мелкой яме малого радиуса), поэтому имеют ничтожную вероятность и несовместимы с электронейтральностью (разд. 3).

мы Андерсона можно говорить лишь на качественном уровне: T_c определяется эффективной плотностью состояний, которая отличается от средней множителем порядка единицы.

6. РАЗМЕРНЫЙ ЭФФЕКТ В ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ФАЗЕ

В локализованной фазе система разбивается на квазинезависимые блоки размера ξ , сверхпроводимость в которых подавляется из-за размерного эффекта. Для логической завершенности изложения приведем анализ последнего на основе уравнения Горькова. Сверхпроводимость в образцах малых размеров изучалась во многих работах (см. обзор [29]), но обсуждаемые в них вопросы:

а) неадекватность большого канонического ансамбля из-за фиксированности числа электронов в гранулах,

б) эффекты четности,

в) недостаточность приближения среднего поля,

г) отсутствие резкого фазового перехода, и пр., специфичны именно для конечных систем и совершенно неактуальны в настоящем контексте. Если утверждение о ненадежности среднеполевого подхода в принципе правильно, то все попытки выхода за его пределы (начиная от модифицированных среднеполевых приближений до точного решения Ричардсона и прямого численного счета) основаны на использовании усеченного гамильтониана БКШ, который сам по себе навязывает определенный тип спаривания, что в общем случае не является адекватным¹⁶⁾. Что касается уравнения Горькова, то оно соответствует перевальному приближению в функциональном интеграле [30, 31] и является наиболее обоснованным из всех приближений среднеполевого типа; при этом взаимодействие задается физически прозрачным образом и независимо от вида одноэлектронных состояний (разд. 2). Точность приближения определяется параметром Гинзбурга, что в случае сверхпроводника обеспечивает малость флуктуаций (за исключением некоторых специфических ситуаций: так, в конечных системах флуктуации имеют качественное значение, размывая фазовый переход). К уравнению Горькова можно также прийти, исходя из уравнений Элиашберга, в пределе локального взаимодействия [14].

¹⁶⁾ Состояние φ_s спаривается со своим комплексно сопряженным, что правильно лишь при постоянстве параметра порядка [20].

Рассмотрим кубический образец размера L , приняв периодические граничные условия для электронных собственных функций. В чистом сверхпроводнике последние имеют вид плоских волн, так что $|\varphi_s(r)|^2 = L^{-d}$ и локальная плотность состояний (8) не зависит от r . Тогда $\Delta(r) = \text{const}$ есть точное решение уравнения Горькова (4), которое приводится к виду

$$\Delta = gT \sum_{\omega} L^{-d} \sum_s \frac{1}{\epsilon_s^2 + \omega^2} \Delta \quad (66)$$

и в случае непрерывного спектра совпадает с (9). В малом энергетическом интервале спектр можно считать состоящим из эквидистантных уровней с расстоянием Ω между ними

$$\epsilon_s = \Omega(s + 1/2), \quad \Omega = 1/\nu_F L^d, \quad (67)$$

где принято, что уровень Ферми лежит посередине между двумя дискретными уровнями¹⁷⁾. Подстановка в формулу (66) и суммирование по s дает

$$1 = gT \sum_{\omega} \frac{\pi \nu_F}{|\omega|} \text{th} \frac{\pi |\omega|}{\Omega}. \quad (68)$$

При малых Ω аргумент гиперболического тангенса велик и можно положить $\text{th} x = 1 - 2e^{-2x}$, откуда

$$\frac{1}{g\nu_F} = \ln \frac{1.14\omega_0}{T} - 4e^{-2\pi^2 T/\Omega}, \quad (69)$$

где мы ограничились во второй сумме по ω главными членами с $\omega = \pm\pi T$. Вычитая аналогичное уравнение с $\Omega = 0$, легко получить

$$T_c = T_{c0} \left[1 - 4e^{-2\pi^2 T_{c0}/\Omega} \right], \quad \Omega \ll T_{c0}. \quad (70)$$

При $T \rightarrow 0$ в формуле (68) можно перейти от суммирования к интегрированию и получить уравнение, определяющее критическое значение Ω , при котором исчезает сверхпроводимость:

$$\frac{1}{g\nu_F} = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{d\omega}{2\omega} \text{th} \frac{\pi\omega}{\Omega_c} = \ln \frac{\pi\omega_0}{\Omega_c} - \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\text{ch}^2 x} dx. \quad (71)$$

Учитывая, что последний интеграл равен $\ln(\pi/4\gamma)$, где $\ln \gamma = C = 0.577$ — постоянная Эйлера, и сопоставляя с результатом для T_{c0} ,

$$1 = g\nu_F \ln \frac{4\gamma\omega_0}{\Omega_c}, \quad 1 = g\nu_F \ln \frac{2\gamma\omega_0}{\pi T_{c0}}, \quad (72)$$

¹⁷⁾ Такое предположение общепринято [29] для случая четного числа электронов N ; при нечетном N полагают $\epsilon_s = \Omega s$, но считают уровень $\epsilon_0 = 0$ заблокированным, — т. е. занятым неспаренным электроном и не участвующим в процессах рассеяния. В последнем случае результаты аналогичны, но соответствуют меньшим T_c .

легко видеть, что

$$\Omega_c = 2\pi T_{c0}. \quad (73)$$

Чтобы найти зависимость T_c от Ω вблизи Ω_c , преобразуем (68) с помощью формулы суммирования Пуассона [32]

$$\frac{1}{g\nu_F} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi s} \int_{-\pi\omega_0/\Omega}^{\pi\omega_0/\Omega} dx \frac{\text{th } x}{2x} \exp\left\{i\frac{s\Omega}{\pi T}x\right\}, \quad (74)$$

где член с $s = 0$ соответствует (71). При $s \neq 0$ интегралы сходятся при больших $|x|$ и в них можно положить $\omega_0 = \infty$. Ввиду четности по s их можно вычислять при $s > 0$; тогда контур сдвигается в верхнюю полуплоскость, где главный вклад определяется полюсом $x = i\pi/2$. При $\Omega/T \gg 1$ достаточно сохранить члены с $s = 0, \pm 1$,

$$\frac{1}{g\nu_F} = \ln \frac{4\gamma\omega_0}{\Omega} - 4e^{-\Omega/2T}, \quad (75)$$

и, вычитая аналогичное уравнение с $T = 0$, получить

$$T_c = \frac{\Omega_c}{2 \ln [4\Omega_c/(\Omega_c - \Omega)]}, \quad \Omega \rightarrow \Omega_c. \quad (76)$$

Покажем, что в приведенных координатах

$$y = T_c/T_{c0}, \quad x = \Omega/\Omega_c \quad (77)$$

возникает универсальная зависимость $y(x)$. Действительно, вычитая из (68) аналогичное уравнение с $\Omega = 0$, имеем

$$\ln \frac{T}{T_{c0}} = T \sum_{\omega} \frac{\pi}{|\omega|} \left(\text{th} \frac{\pi|\omega|}{\Omega} - 1 \right), \quad (78)$$

где ω_0 можно устремить к бесконечности. Подставляя для ω мацубаровские значения $\pi T(2n+1)$, зависимость $y(x)$ можно представить в параметрической форме:

$$y = \exp F(t), \quad x = t^{-1} \exp F(t),$$

$$F(t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\text{th} \frac{\pi(2n+1)t}{2} - 1 \right], \quad (79)$$

где параметр t пробегает от нуля до бесконечности. Вид зависимости $y(x)$, полученной численно на основе (79), показан на рис. 9: эта зависимость экспоненциально мало отличается от горизонтальной прямой вблизи $y = 1$ и экспоненциально мало отличается от вертикальной прямой вблизи $x = 1$.

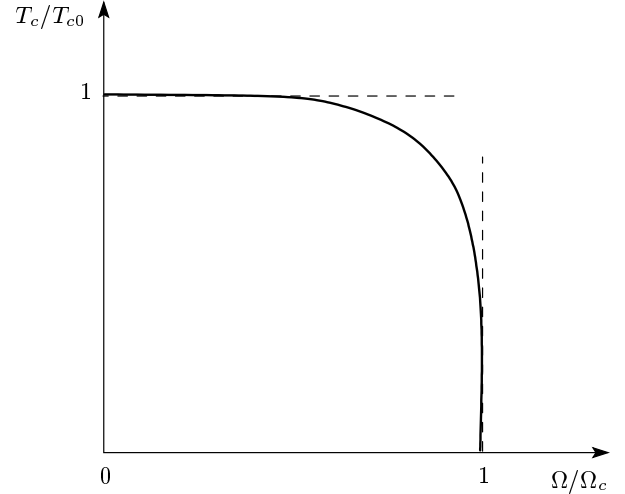


Рис. 9. Зависимость T_c от расстояния между уровнями Ω в конечной системе. В приведенных переменных $y = T_c/T_{c0}$, $x = \Omega/\Omega_c$ она является универсальной

Для неупорядоченного сверхпроводника приведенное рассмотрение полностью сохраняется в предположении самоусредняемости параметра порядка¹⁸⁾. Полученные результаты можно использовать для описания зависимости T_c от расстояния до перехода в локализованной фазе, когда система распадается на квазинезависимые блоки размера ξ , так что в качестве Ω нужно использовать величину

$$\Omega(E) \sim J(\xi/a)^{-d} \sim J(|E - E_c|/J)^{d\nu}, \quad (80)$$

где ν — критический индекс радиуса локализации. Согласно разд. 5, предположение о самоусредняемости справедливо буквально для слабого беспорядка и на качественном уровне для сильного беспорядка при отсутствии резонансов. В последнем случае T_c определяется эффективной плотностью состояний, отличающейся от средней множителем порядка единицы, который плавно меняется как функция параметров. Поэтому сохраняется характер сингулярностей (70) и (76), которые определяют поведение вблизи E_c и E^* (рис. 3) и наиболее ярко характеризуют зависимость T_c от ϵ_F .

¹⁸⁾ При этом, конечно, вместо эквидистантного расположения уровней надо использовать реалистичную статистику типа вигнер-дайсоновской, но это мало влияет на результаты [29].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа разрешает противоречие, возникшее между двумя сериями работ [1–5] и [9, 10]. Результаты в некотором смысле носят компромиссный характер. С одной стороны, в отношении объемной сверхпроводимости полностью подтверждается картина Булаевского и Садовского [1–5]. С другой стороны, истинная температура перехода T_c в сильно неупорядоченном сверхпроводнике не совпадает с объемной и обусловлена редкими всплесками параметра порядка, происходящими на атомном масштабе; в согласии с [9, 10] она имеет степенную зависимость от константы связи и не зависит от частоты обрезания. Однако она не имеет существенной зависимости от положения уровня Ферми и никак не коррелирует с переходом Андерсона. По этой причине мы не видим оснований говорить о «фрактальной сверхпроводимости» [10] вблизи порога локализации.

Изложенные результаты получены в рамках теории среднего поля, которая безусловно справедлива в делокализованном режиме. Существенная модификация результатов при переходе к флуктуационной теории может ожидать лишь для локализованного режима; при этом модуль параметра порядка меняется слабо, но нужно учитывать пространственные флуктуации его фазы. Существенно, что роль флуктуаций определяется конкретными значениями параметров модели: так, если отношение T_c/J не слишком мало, то концентрация резонансных примесей оказывается довольно высокой и джозефсоновские связи между локализованными на них сверхпроводящими «каплями» достаточно велики для стабилизации сверхпроводимости (эти связи определяются не столько перекрытием хвостов решений, локализованных на отдельных примесях, сколько наличием постоянного фонового вклада, растущего при уменьшении L (см. (30)). Напротив, если $T_c/J \rightarrow 0$, то джозефсоновские связи между каплями малы и флуктуации сильно понижают T_c по сравнению со среднеполевым значением. Однако, как показывают нелинейные уравнения Гинзбурга–Ландау, выведенные в работе [11] для локализованного режима, при понижении температуры происходит интенсивное отрастание хвостов у решений, локализованных на дефектах; это увеличивает джозефсоновскую связь между каплями и среднеполевое решение стабилизируется еще до достижения объемной T_c . Аналогичные соображения справедливы в отношении эффектов кулоновской блокады [30].

При сопоставлении полученных результатов с экспериментом нужно иметь в виду, что предположение о непрерывном распределении $P(V)$ в модели Андерсона не очень реалистично; действительно более соответствует некоторый дискретный (и не очень густой) набор значений V . Поэтому в большинстве реальных систем описанные резонансы не будут наблюдаться, независимо от концентрации и расположения примесей. Однако в небольшом числе систем эффект резонансов окажется большим и будет носить устойчивый характер. Заметим, что модель Андерсона с несколькими сортами периодически расположенных примесей можно рассматривать как модель для высокотемпературных сверхпроводников. Возможность интерпретации «сверхпроводящего взрыва» 1987 г. как локализации параметра порядка отмечалась ранее [11]; в свете настоящей работы можно ожидать, что такая локализация происходит не только на плоскостях Cu–O, но и на отдельных атомах. На адекватность такой модели указывают: а) практическое совпадение максимально достигнутых T_c с величиной ω_0/π ; б) оптимистичные оценки для T_c ; в) подавление изотоп-эффекта в режиме $\epsilon_c \ll \omega_0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

К решению уравнения Горькова с ядром (37)

Восполним некоторые технические детали, опущенные в основном тексте.

В далекой от резонанса области можно считать \mathcal{T}'_ω и $|\mathcal{T}''_\omega|$ независимыми от ω : тогда Z_ω также не зависит от ω . Подставляя $\Delta_1(r)$ из (43b) в выражения (44) для X_ω и Y_ω , имеем представление (47) с параметрами

$$\begin{aligned} X &= \Delta_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} \lambda_{01} + \frac{\omega_0}{\pi} \lambda_{11} Z, \\ Y' &= \Delta_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} \lambda'_{02} + \frac{\omega_0}{\pi} \lambda'_{12} Z, \\ Y'' &= \Delta_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} \lambda''_{02} + \frac{\omega_0}{\pi} \lambda''_{12} Z. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Тогда для Z_ω имеем

$$Z = \Delta_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} B_2 + Z \frac{\omega_0}{\pi} B_3, \quad (\text{A.2})$$

что вместе с уравнением (43a) дает систему уравнений для Δ_0 и Z

$$\begin{aligned} \Delta_0 \left[-\frac{1}{B_1} + g\langle\nu_1\rangle_0 + g^2\langle\nu_1^2\rangle_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} \right] + \\ + g\frac{\omega_0}{\pi}\lambda_{01}Z = 0, \\ \Delta_0 B_2 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} + Z \left[-1 + \frac{\omega_0}{\pi}B_3 \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

где введены коэффициенты

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{K_0(0)}{\lambda_0 L^3 \tau} \ln \frac{1.14\omega_0}{T}, \\ B_2 &= 2\mathcal{T}'\lambda'_{02} - 2\mathcal{T}''\lambda''_{02} + |\mathcal{T}|^2\lambda_{01}, \\ B_3 &= 2\mathcal{T}'\lambda'_{12} - 2|\mathcal{T}''|\lambda''_{12} + |\mathcal{T}|^2\lambda_{11}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Вдали от резонанса члены, содержащие ω_0 , имеют малость $\sim \omega_0/J$ и ими можно пренебречь¹⁹⁾; тогда условие разрешимости (A.3) дает результат (48).

В окрестности резонанса нельзя пренебрегать зависимостью от ω величин \mathcal{T}'_ω и $|\mathcal{T}''_\omega|$, а следовательно, Z_ω . Подставляя $\Delta_1(r)$ из (43b) в выражения (44) для X_ω и Y_ω , имеем представление (47) с параметрами

$$\begin{aligned} X &= \Delta_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} \lambda_{01} + \lambda_{11}S, \\ Y' &= \Delta_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} \lambda'_{02} + \lambda'_{12}S, \\ Y'' &= \Delta_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} \lambda''_{02} + \lambda''_{12}S, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

откуда для Z_ω

$$\begin{aligned} Z_\omega &= \Delta_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} [2\mathcal{T}'_\omega\lambda'_{02} - 2|\mathcal{T}''_\omega|\lambda''_{02} + |\mathcal{T}'_\omega|^2\lambda_{01}] + \\ &+ S [2\mathcal{T}'_\omega\lambda'_{12} - 2|\mathcal{T}''_\omega|\lambda''_{12} + |\mathcal{T}'_\omega|^2\lambda_{11}]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Подстановка в выражения (58) и (43) дает систему уравнений для Δ_0 и S :

$$\begin{aligned} \Delta_0 \left[-\frac{1}{B_1} + g\langle\nu_1\rangle_0 + g^2\langle\nu_1^2\rangle_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} \right] + \\ + g\lambda_{01}S = 0, \\ \Delta_0 C_1 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} + S [-1 + C_2] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} C_1 &= 2\lambda'_{02}\sigma_1 - 2\lambda''_{02}\sigma_2 + \lambda_{01}\sigma_3, \\ C_2 &= 2\lambda'_{12}\sigma_1 - 2\lambda''_{12}\sigma_2 + \lambda_{11}\sigma_3, \\ \sigma_1 &= T \sum_\omega \mathcal{T}'_\omega, \quad \sigma_2 = T \sum_\omega |\mathcal{T}''_\omega|, \\ \sigma_3 &= T \sum_\omega |\mathcal{T}'_\omega|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

¹⁹⁾ Имеются в виду традиционные сверхпроводники. При $\omega_0 \sim J$ «окрестность резонанса» существенно расширяется и фактически захватывает всю зону.

Условие разрешимости системы (A.7) дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{B_1} - g\langle\nu_1\rangle_0 - g^2\langle\nu_1^2\rangle_0 \ln \frac{1.14\omega_0}{T} \right) (-1 + C_2) + \\ + C_1 g \lambda_{01} \ln \frac{1.14\omega_0}{T} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

В окрестности резонанса, когда $\epsilon_0 \sim \gamma \sim T$, имеем оценки

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\sim VE_0, \quad \sigma_2 \sim VE_0 \ln \frac{\omega_0}{T}, \\ \sigma_3 &\sim \frac{(VE_0)^2}{T}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

что позволяет сохранить только главные члены; в результате (A.9) упрощается,

$$\begin{aligned} \left(\tau - \frac{g^2\nu_0\langle\nu_1\rangle_0 + g^2\langle\nu_1^2\rangle_0}{\lambda_0^3 L^3} \right) (-1 + \lambda_{11}\sigma_3) + \\ + \frac{\lambda_{01}^2}{\lambda_0^3 L^3} g\sigma_3 = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

и приводится к виду (59); последний член существен лишь вблизи точки пересечения термов, когда $\epsilon_0 \sim \gamma \sim \epsilon_c$, и в оценках (A.10) нужно T заменить на ϵ_c .

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Булаевский, М. В. Садовский, Письма в ЖЭТФ **39**, 524 (1984).
2. L. N. Bulaevskii and M. V. Sadovskii, J. Low-Temp. Phys. **59**, 89 (1985).
3. Л. Н. Булаевский, М. В. Садовский, Письма в ЖЭТФ **4**, 76 (1986).
4. Л. Н. Булаевский, С. В. Панюков, М. В. Садовский, ЖЭТФ **92**, 380 (1987).
5. M. V. Sadovskii, Phys. Rep. **282**, 225 (1997); M. V. Sadovskii, *Superconductivity and Localization*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (2000).
6. M. Ma and P. A. Lee, Phys. Rev. B **32**, 5658 (1985).
7. A. Kapitulnik and G. Kotliar, Phys. Rev. Lett. **54**, 473 (1985); Phys. Rev. B **33**, 3146 (1986).
8. P. W. Anderson, J. Phys. Chem. Sol. **11**, 26 (1959); А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **35**, 1158 (1958).
9. M. V. Feigelman, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. A. Yuzbashyan, Phys. Rev. Lett. **98**, 027001 (2007).

10. M. V. Feigelman, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. Cuevas, *Ann. Phys.* **325**, 1368 (2010).
11. И. М. Суслов, ЖЭТФ **95**, 949 (1989); ФТТ **31**, 278 (1989).
12. И. М. Суслов, СФХТ **4**, 2093 (1991).
13. Ю. А. Кротов, И. М. Суслов, ЖЭТФ **107**, 512 (1995).
14. Ю. А. Кротов, И. М. Суслов, ЖЭТФ **111**, 717 (1997).
15. И. Х. Жарекешев, Вестник Евразийского НУ **77**, 41 (2010).
16. N. C. Koshnick, H. Bluhm, M. E. Huber, and K. A. Moler, *Science* **318**, 1440 (2007); H. Bluhm, N. Koshnick, J. Bert et al., *Phys. Rev. Lett.* **102**, 136802 (2009).
17. B. Mühlischlegel, D. J. Scalapino, and R. Denton, *Phys. Rev. B* **6**, 1767 (1972); G. Deutscher, Y. Imry, and L. Gunter, *Phys. Rev. B* **10**, 4598 (1974).
18. I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 017002 (2012).
19. А. М. Финкельштейн, Письма в ЖЭТФ **45**, 37 (1987).
20. P. G. Gennes, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 225 (1964).
21. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1967).
22. В. Л. Березинский, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **77**, 2449 (1979).
23. И. М. Суслов ЖЭТФ, **108**, 1686 (1995).
24. D. Vollhardt and P. Wölfle, *Phys. Rev. B* **22**, 4666 (1980); *Phys. Rev. Lett.* **48**, 699 (1982).
25. А. Л. Эфрос, Б. И. Шкловский, *Электронные свойства легированных полупроводников*, Наука, Москва (1979).
26. Дж. Займан, *Современная квантовая теория*, Мир, Москва (1971).
27. A. A. Maradudin, E. W. Montroll, G. H. Weiss, and I. P. Ipatova, *Sol. St. Phys.*, Academ. Press., New York (1972).
28. I. E. Smolyarenko and B. L. Altshuler, *Phys. Rev. B* **55**, 10451 (1997).
29. J. von Delft, *Ann. der Phys. (Leipzig)* **10**, 219 (2001).
30. К. Б. Ефетов, ЖЭТФ **78**, 2017 (1980).
31. А. В. Свидзинский, *Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости*, Наука, Москва (1982).
32. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1977).