

Общая форма уравнения ДМПК

И.М.Суслов

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН,

119334, Москва, Россия

E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Уравнение Дорохова–Мелло–Перейра–Кумара (ДМПК), описывающее эволюцию диагональных элементов многоканальной трансфер-матрицы, используемой для исследования неупорядоченных систем, выводится при минимальных предположениях о свойствах каналов. В общем случае получается уравнение диффузионного типа с тензорным характером коэффициента диффузии и ненулевыми недиагональными элементами. Предложено три варианта диагонального приближения, один из которых воспроизводит обычное уравнение ДМПК и его обобщение, полученное Мутталибом с соавторами. Два других варианта приводят к уравнениям одинаковой структуры, но с различными определениями входящих в них параметров. Они содержат дополнительные вклады, отсутствующие в первом варианте. Конечность коэффициентов при дополнительных вкладах за пределами металлической фазы устанавливается путем вычисления ляпуновских экспонент и их сопоставлением с численными экспериментами. Обсуждается значение полученных уравнений для проблемы распределения кондактансов и для статуса результатов, полученных с помощью нелинейных сигма-моделей.

1. Введение

Уравнение Дорохова–Мелло–Перейра–Кумара (ДМПК) [1, 2, 3, 4] является эффективным инструментом для исследования квазиодномерных неупорядоченных систем и имеет многочисленные физические приложения (см. обзор [5]). Оно описывает эволюцию диагональных элементов многоканальной трансфер-матрицы при увеличении длины системы. Уравнение ДМПК получается из принципа максимума энтропии (т.е. в предположении максимальной случайности, совместимой с симметричными ограничениями) и идеологически близко к теории случайных матриц Вигнера–Дайсона [6]. Оно зависит от одного параметра (длины системы, обезразмеренной на корреляционный радиус) и отражает универсальность, характерную для металлической фазы. Уравнение ДМПК эквивалентно суперсимметричной сигма-модели [7], выведенной из микроскопических гамильтонианов [8, 9], но в отличие от нее позволяет работать с распределениями физических величин. Решение уравнения ДМПК [3, 4] воспроизводит универсальные флуктуации кондактанса и квантовые поправки к нему, полученные из диаграммных вычислений [10, 11].

Метод трансфер-матрицы, лежащий в основе подхода ДМПК, в принципе не ограничен квазиодномерной геометрией. Рассматривая систему N связанных одномерных цепочек и укладывая це-

почки в соответствии с симметрией d -мерной решетки, можно переходить к системам более высокой размерности. Однако, предположения, лежащие в основе уравнения ДМПК, приводят к статистической эквивалентности всех цепочек, что устраняет всякую информацию о топологии пространства в поперечном направлении. Это не позволяет использовать уравнение ДМПК для исследования перехода Андерсона и ограничивает его применимость условиями реализации металлической фазы в соответствующем d -мерном пространстве. При переходе в локализованную фазу d -мерной системы уравнение ДМПК оказывается неадекватным даже для квазиодномерной геометрии: предсказываемая им минимальная ляпуновская экспонента всегда оказывается порядка $1/N$, тогда как разумные микроскопические модели приводят к результату $O(1)$ [12, 13]. Последнее легко понять в режиме сильной локализации, когда проводимость квазиодномерной системы определяется одной резонансной траекторией¹ и система фактически становится строго одномерной.

Из сказанного ясно, что в общем случае предположения, лежащие в основе уравнения ДМПК,

¹ Простой пример построения резонансных траекторий приведен в примечании 4 работы [14]. В режиме сильной локализации вклад резонансных траекторий в проводимость имеет экспоненциальный разброс и она определяется самым прозрачным каналом.

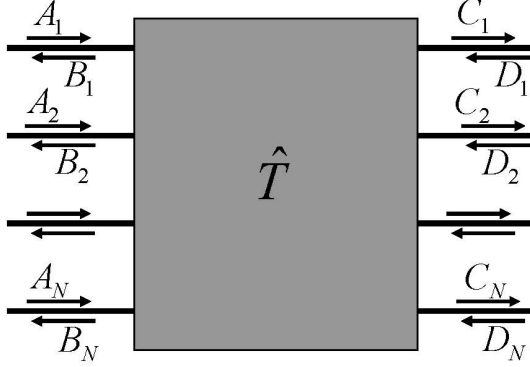


Рис. 1: Многоканальная трансфер-матрица \hat{T} связывает амплитуды плоских волн слева (A_n, B_n) и справа (C_n, D_n) от рассеивателя.

должны быть ослаблены, что в частности необходимо для исследования универсальности, возникающей вблизи перехода Андерсона. Проблема вывода наиболее общей формы уравнения ДМПК осознается научным сообществом и признается достаточно фундаментальной [3, 4, 13, 15]. В частности, одно из возможных обобщений предложено Мутталибом с соавторами [15]–[17].

Как показано ниже, уравнение типа ДМПК может быть выведено при минимальных предположениях о свойствах каналов. В общем случае получается уравнение диффузионного типа с тензорным характером коэффициента диффузии и ненулевыми недиагональными элементами. Мы рассмотрим три варианта диагонального приближения, один из которых воспроизводит обычное уравнение ДМПК и его обобщенную форму, предложенную в [15]–[17]. Два других варианта приводят к уравнениям одинаковой структуры, но с различными определениями входящих в них параметров. Они содержат дополнительный член, отсутствующий в первом варианте и оказавшийся весьма актуальным в недавнем исследовании распределения кондактансов [14].

2. Основные понятия

Представляя систему как набор N связанных одномерных цепочек, будем рассматривать ее как "черный ящик", к которому присоединены контакты, состоящие из идеальных одномерных проводников². Тогда систему можно рассматривать

² Тем самым представление о "каналах" используется в

как эффективный рассеиватель и характеризовать трансфер-матрицей T , связывающей амплитуды волн слева ($A_n e^{ikx} + B_n e^{-ikx}$ в n -м канале) и справа ($C_n e^{ikx} + D_n e^{-ikx}$) от него (Рис.1):

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где A, B, C, D — векторы с компонентами A_n, B_n, C_n, D_n . При записи в векторной форме вид уравнения (1) не зависит от числа каналов, а трансфер-матрица естественным образом представляется в блочном виде; она допускает параметризацию [3, 19]

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda} & \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & \sqrt{1+\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где u, v, u_1, v_1 — унитарные матрицы, а λ — диагональная матрица с положительными элементами λ_i , которые являются собственными значениями эрмитовой матрицы $T_{12}T_{12}^+$. При наличии инвариантности относительно обращения времени возникают соотношения [2, 3]

$$v = u^*, \quad v_1 = u_1^*, \quad (3)$$

которые, как правило, не будут для нас существенны.

Основной интерес представляют параметры λ_i , которые в частности определяют проводимость

$$g = \sum_i \frac{1}{1 + \lambda_i} \quad (4)$$

(в определении Эконому–Соукоулиса [20, 21]). Уравнение ДМПК описывает эволюцию их совместной функции распределения $P(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \equiv P\{\lambda\}$ при изменении длины системы L

$$\frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial L} = \alpha \sum_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[\lambda_i (1 + \lambda_i) J\{\lambda\} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{P\{\lambda\}}{J\{\lambda\}} \right] \quad (5)$$

$$J\{\lambda\} = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

где $\beta = 1$ для ортогонального ансамбля (обычные системы со случайным потенциалом), $\beta = 2$

координатном представлении, что в частности устраняет все проблемы, связанные с затухающими модами [18].

для унитарного ансамбля (системы в сильном магнитном поле), $\beta = 4$ для симплектического ансамбля (системы с сильным спин-орбитальным взаимодействием); параметр α имеет смысл обратной корреляционной длины квазиодномерной системы. Величина $J\{\lambda\}$ хорошо известна в теории случайных матриц [6] и возникает из якобиана преобразовани

$$\prod_{ij} dH_{ij} = J\{\lambda\} \tilde{J}\{Q\} \prod_i d\lambda_i \prod_{ij} dQ_{ij} \quad (6)$$

при переходе от интегрирования по элементам матрицы \hat{H} к интегрированию по ее собственным значениям λ_i и элементам диагонализующей матрицы \hat{Q} ($\hat{H} = \hat{Q}^{-1} \hat{\Lambda} \hat{Q}$). Фактически $J\{\lambda\}$ является функцией распределения уровней, если они находятся в ограниченном интервале с периодическими граничными условиями (дайсоновский круговой ансамбль). В реальных приложениях функция распределения содержит дополнительный множитель, обеспечивающий локализацию спектра в конечном интервале и мало влияющий на распределение близких уровней. Аналогично, распределение $P\{\lambda\} = J\{\lambda\}$ является формальным решением уравнения (5), но не обеспечивает условие нормировки; неизбежно существование дополнительного множителя, эволюция которого и описывается уравнением ДМПК. Как показывает точное решение (5) при $\beta = 2$ [22], дополнительный множитель не сводится к плавной огибающей, определяющей форму плотности состояний, и распределение $P\{\lambda\}$ отличается от $J\{\lambda\}$ уже на локальном уровне; корреляции λ_i определяются якобианом $J\{\lambda\}$ лишь в области малых L , когда λ_i малы. В контексте обобщений уравнения ДМПК это обстоятельство приобретает глубокий смысл (см. примечание 9 в разд. 5).

В строго одномерной системе имеем $J\{\lambda\} = 1$ и уравнение (5) сводится к виду

$$\frac{\partial P(\lambda)}{\partial L} = \alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\lambda(1 + \lambda) \frac{\partial P(\lambda)}{\partial \lambda} \right], \quad (7)$$

а λ совпадает с ландауэровским сопротивлением ρ [23]; такое уравнение получено во многих работах [24]–[28]. В недавней работе автора [14] показано, что общая форма уравнения эволюции в одномерном случае имеет вид

$$\frac{\partial P(\lambda)}{\partial L} = \alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[-\gamma(1 + 2\lambda)P(\lambda) + \lambda(1 + \lambda) \frac{\partial P(\lambda)}{\partial \lambda} \right], \quad (8)$$

а дополнительный член, определяемый параметром γ , является физически значимым: его введение в схему Шапиро [29] позволило объяснить все существенные моменты в распределении кондактансов, чего не удавалось сделать на основе уравнения (7). Вполне естественно, что этот член не воспроизводится уравнением (5) — он исчезает в приближении случайных фаз, использованном при выводе последнего. Однако, он не воспроизводится и обобщенным уравнением ДМПК, полученным в работах Мутталиба с соавторами [15]–[17]

$$\frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial L} = \alpha \sum_i K_{ii} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[\lambda_i(1 + \lambda_i) J_i\{\lambda\} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{P\{\lambda\}}{J_i\{\lambda\}} \right] \quad (9)$$

$$J_i\{\lambda\} = \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^{\beta_{jk}^i}, \quad \beta_{jk}^i = 2K_{jk}/K_{ii}$$

и содержащим в качестве параметров элементы K_{ij} некоторой матрицы \hat{K} .³ Это показывает, что попытки обобщения уравнения ДМПК не являются достаточно продвинутыми и не воспроизводят всех физически существенных вкладов. Это обстоятельство и явилось главной мотивацией настоящей работы.

3. Физические соображения

Вывод уравнения эволюции основан на соотношении

$$\hat{T}_{L+\Delta L} = \hat{T}_L \hat{T}_{\Delta L}, \quad (10)$$

где $\hat{T}_{\Delta L}$ — матрица, близкая к единичной. Форма уравнения ДМПК зависит от статистических свойств параметров ϵ_k , определяющих отклонение $\hat{T}_{\Delta L}$ от единичной матрицы. Эти параметры можно разделить на две группы: для первой

$$\langle \epsilon_k \rangle \neq 0, \quad (11)$$

тогда как для второй

$$\langle \epsilon_k \rangle = 0, \quad \langle \epsilon_k^2 \rangle \neq 0. \quad (12)$$

Наличие параметров типа (12) является необходимым для возникновения уравнения диффузионного типа: поскольку в первом порядке по ϵ_k эффект отсутствует, все вычисления нужно производить с учетом членов второго порядка, что и

³ Зависимость $J_i\{\lambda\}$ от i была не замечена в [16] (см. Приложение B), но в практическом смысле она не очень актуальна [30].

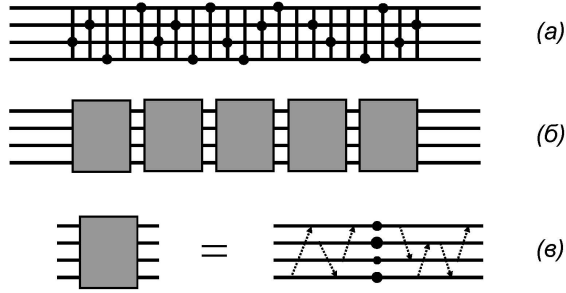


Рис. 2: (а) Типичная квазиодномерная система представляет собой брусок, вырезанный из d -мерной решетки, в который внесены случайно расположенные примеси. (б) Систему можно разделить на эффективные рассеиватели, трансфер-матрицы которых перемножаются. (в) Каждый рассеиватель обеспечивает частичное отражение падающих на него волн и перемешивание каналов; эти два процесса удобно представлять несколько разнесенными в пространстве.

приводит к появлению вторых производных, характерных для уравнения диффузии. Общая стратегия состоит в том, чтобы производить усреднение только по параметрам (12), ничего не предполагая о параметрах первой группы.

Для вывода наиболее общей формы уравнения ДМПК нужно выделить категорию величин, для которых свойство (12) не является модельным предположением, а внутренне присуще по самой их природе. Такие величины хорошо известны и связаны с диагональным беспорядком. В качестве примера рассмотрим уравнение Шредингера со случайным потенциалом, который для наглядности будем задавать на узлах решетки набором независимых случайных переменных V_n (как в модели Андерсона). Функции распределения переменных V_n должны быть одинаковы для сохранения пространственной однородности в среднем. Если среднее значение $\langle V_n \rangle$ отлично от нуля, то оно одинаково для всех n и может быть исключено путем сдвига начала отсчета энергии E , так как случайный потенциал входит в комбинации $V_n - E$. Таким образом, можно принять без ограничения общности

$$\langle V_n \rangle = 0, \quad \langle V_n^2 \rangle = W^2, \quad (13)$$

как это и делается в большинстве теоретических работ.

Это обстоятельство можно использовать следующим образом. Типичная квазиодномерная система представляет собой брусок, вырезанный из d -мерной решетки и содержащий случайно расположенные примеси (рис.2,а). Разобьем ее на последовательность эффективных рассеивателей, содержащих много узлов решетки (Рис.2,б). Каждый рассеиватель обеспечивает существование двух эффектов: (а) частичное отражение падающих на него волн, и (б) перемешивание каналов. Эти два процесса удобно представлять несколько разнесенными в пространстве (Рис.2,в), так что имеется область, где происходит отражение волн без перемешивания каналов, и есть области, которые обеспечивают перемешивание каналов для прошедших и отраженных волн, но не приводят к их отражению. Такое предположение не является существенным, так как о степени пространственной разделенности мы ничего не предполагаем, и она может быть чисто символической. Фактически конструкция, представленная на Рис.2,в, соответствует каноническому представлению трансфер-матрицы в виде произведения (2): нетрудно видеть, что средняя матрица обеспечивает отражение волн без перемешивания каналов, а правая и левая — перемешивание каналов без отражения волн.

Среднюю часть эффективного рассеивателя (Рис.2,в) можно описывать трансфер-матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 - i\epsilon & -i\epsilon \\ i\epsilon & 1 + i\epsilon \end{pmatrix}, \quad (14)$$

соответствующей диагональному беспорядку, создаваемому точечными рассеивателями на независимых одномерных цепочках, так что ϵ — диагональная матрица с действительными элементами ϵ_k , обладающими свойствами (12). Выделяя из (14) множители, не связанные с рассеиванием, примем следующее представление для матрицы $\hat{T}_{\Delta L}$

$$\hat{T}_{\Delta L} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \epsilon^2} & -i\epsilon \\ i\epsilon & \sqrt{1 + \epsilon^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_3 & 0 \\ 0 & w_4 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где w_1, w_2, w_3, w_4 — унитарные матрицы, близкие к единичной, а элементы ϵ_k малы. Принимая для \hat{T}_L каноническое представление (2) и составляя произведение (10), легко видеть, что матрицы w_1, w_2 приводят к малой перенормировке матриц u и v , которой можно пренебречь⁴. Нетрудно видеть,

⁴ Форма уравнения (15) отличается от канонического

что для приведения матрицы $\hat{T}_{L+\Delta L}$ к канонической форме (2) достаточно привести к этой форме произведение

$$\hat{T}' = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda} & \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & \sqrt{1+\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1+\epsilon^2} & -i\epsilon \\ i\epsilon & \sqrt{1+\epsilon^2} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Предположение о диагональном беспорядке для средней части эффективного рассеивателя (Рис.2,в) не является существенным. Действительно, представление о слабых рассеивателях является неизбежным при выводе дифференциального уравнения — в противном случае можно получить лишь уравнение в конечных разностях. Если ориентироваться на описание перехода Андерсона, то следует работать вблизи края зоны идеального кристалла, так как только там слабый беспорядок совместим с локализацией в высших размерностях. Тогда длина волны и длина свободного пробега велики по сравнению с межатомным расстоянием и огибающая волновой функции меняется медленно. Это позволяет огрубить описание, разбивая систему на блоки, малые по сравнению с длиной волны, но содержащие много атомов, и объявляя эти блоки новыми узлами решетки. В результате практически любой короткодействующий случайный потенциал сведется к диагональному гауссовскому беспорядку. Универсальность же, присущая переходу Андерсона как и обычным критическим явлениям [31, 32], делает эквивалентным его описание в центре зоны и вблизи ее края.⁵

4. Общее уравнение эволюции

Изложим общую схему вывода уравнения эволюции, отсылая за деталями вычислений в Приложение А. Параметры λ'_i матрицы \hat{T}'

представления (2) наличием мнимой единицы в средней матрице. Она может быть приведена к (2), но тогда матрицы w_i не будут стремиться к единичной при $\epsilon \rightarrow 0$ и приведут к конечной перенормировке матриц u и v . Использование матрицы (14) в качестве средней матрицы (15) приводит к более громоздким выкладкам.

⁵ В случае сильных рассеивателей дифференциальная форма уравнения должна восстанавливаться при больших L (возможно с другими определениями параметров), когда распределение $P\{\lambda\}$ становится широким и возможно разложение по приращениям аргументов даже для больших приращений.

являются собственными значениями эрмитового "гамильтониана" $H = T_{12}T_{12}^+$, где

$$T_{12} = \sqrt{1+\lambda}u(-i\epsilon) + \sqrt{\lambda}v\sqrt{1+\epsilon^2}, \quad (17)$$

что позволяет вычислить их как функции λ_i ($\lambda'_i = f_i\{\lambda\}$) в виде разложения по ϵ . Составляя функцию распределения λ'_i , имеем

$$P_{L+\Delta L}\{\lambda'\} = \int \prod_i d\lambda_i P_L\{\lambda\} \prod_i \delta(\lambda'_i - f_i\{\lambda\}) \cdot P(\epsilon) P(u, v) d\epsilon du dv. \quad (18)$$

Мы не указываем в явном виде, что функции $f_i\{\lambda\}$ зависят от u, v, ϵ как от параметров. Сделаем замену переменных $y_i = f_i\{\lambda\}$ и перейдем от интегрирования по λ_i к интегрированию по y_i

$$\prod_i d\lambda_i = I\{y\} \prod_i dy_i, \quad (19)$$

тогда как необходимое для этого обращение $\lambda_i = g_i\{y\}$ находится итерациями по ϵ . Интегрирование по y_i снимает δ -функции, приводя к результату

$$P_{L+\Delta L}\{\lambda\} = \int I\{\lambda\} P_L\{g_i\{\lambda\}\} P(\epsilon) P(u, v) d\epsilon du dv, \quad (20)$$

где мы переобозначили λ' на λ . При вычислении якобиана $I\{y\}$ существенно, что его диагональные элементы оказываются порядка единицы, а недиагональные — порядка ϵ^2 , так что фактически он сводится к произведению диагональных элементов. Подставляя $I\{\lambda\}$ и $g_i\{\lambda\}$ в виде разложений по ϵ и раскладывая (20) до второго порядка, проведем усреднение с учетом $\langle \epsilon_k \rangle = 0$, $\langle \epsilon_k \epsilon_{k'} \rangle = \langle \epsilon^2 \rangle \delta_{kk'}$. Полагая $\langle \epsilon^2 \rangle \equiv \alpha \Delta L$, получим⁶

$$\frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial L} = \alpha \sum_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[G_i\{\lambda\} P\{\lambda\} + \sum_j F_{ij}\{\lambda\} \frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial \lambda_j} \right], \quad (21)$$

где введены следующие функции от λ_i (штрихи у знаков суммирования отмечают отсутствие членов с $j = i$)

$$F_{ij}\{\lambda\} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)\lambda_j(1+\lambda_j)} A_{ij},$$

⁶ При огрублении описания, обсуждавшемся в конце разд.3, дисперсии независимых рассеивателей складываются, так что их сумма $\langle \epsilon^2 \rangle$ пропорциональна объему системы, что в квазиодномерном случае дает линейную зависимость от ΔL . При таком определении параметр α называется порядка обратной длины пробега.

$$\begin{aligned}
G_i\{\lambda\} &= (1 + 2\lambda_i) \left(\frac{1}{2} A_{ii} - 1 \right) + \\
&+ \sqrt{\lambda_i(1 + \lambda_i)} \sum_j' \frac{1 + 2\lambda_j}{4\sqrt{\lambda_j(1 + \lambda_j)}} A_{ij} - \tilde{G}_i\{\lambda\}, \\
\tilde{G}_i\{\lambda\} &= \sum_j' \frac{\lambda_i(1 + \lambda_j) B_{ij} + \lambda_j(1 + \lambda_i) C_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} + \\
&+ \sum_j' \frac{\sqrt{\lambda_i(1 + \lambda_i)\lambda_j(1 + \lambda_j)}}{\lambda_i - \lambda_j} D_{ij}
\end{aligned} \tag{22}$$

и использованы обозначения для матриц

$$\begin{aligned}
B_{ij} &= \sum_k \langle |v_{ik}|^2 |u_{jk}|^2 \rangle, \quad C_{ij} = \sum_k \langle |u_{ik}|^2 |v_{jk}|^2 \rangle, \\
D_{ij} &= - \sum_k \langle v_{ik} v_{jk} u_{ik}^* u_{jk}^* + v_{ik}^* v_{jk}^* u_{ik} u_{jk} \rangle, \\
A_{ij} &= \sum_k \langle u_{ik} u_{jk}^* v_{ik}^* v_{jk} + u_{ik}^* u_{jk} v_{ik} v_{jk}^* - \\
&- u_{ik} u_{jk} v_{ik}^* v_{jk}^* - u_{ik}^* u_{jk}^* v_{ik} v_{jk} \rangle.
\end{aligned} \tag{23}$$

Уравнение (21) представляет собой наиболее общую форму уравнения ДМПК: в ней не сделано никаких предположений о статистических свойствах матриц u и v — они даже не обязаны быть случайными. Правая часть уравнения (21) представляет собой сумму полных производных, что обеспечивает сохранение полной вероятности.

5. Диагональные формы

Уравнение (21) — диффузионного типа, причем коэффициент диффузии является тензором с ненулевыми недиагональными компонентами. В общем виде оно слишком громоздко для конструктивного анализа, поэтому рассмотрим возможность его упрощения.

Уравнение (21) радикально упрощается, если предположить диагональный вид для матриц A_{ij} и D_{ij}

$$A_{ij} = A_i \delta_{ij}, \quad D_{ij} = D_i \delta_{ij}. \tag{24}$$

Положим еще $B_{ij} = C_{ij} \equiv K_{ij}$, так как статистические свойства матриц u и v обычно одинаковы. Тогда уравнение (21) приводится к виду (см. Приложение B)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial L} &= \alpha \sum_i \frac{1}{2} A_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[-\gamma_i(1 + 2\lambda_i) P\{\lambda\} + \right. \\
&\left. + \lambda_i(1 + \lambda_i) J_i\{\lambda\} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{P\{\lambda\}}{J_i\{\lambda\}} \right]
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= (2K_{ii} - A_i)/A_i, \\
J_i\{\lambda\} &= \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^{\beta_{jk}^i}, \quad \beta_{jk}^i = 4K_{jk}/A_i,
\end{aligned}$$

что отличается от (9) наличием дополнительных членов с параметрами γ_i и сводится к (8) в одноканальном случае. Наличие этих членов изменяет величину ляпуновских экспонент (разд. 6) и имеет принципиальное значение для проблемы распределения кондактансов (разд. 7).

Условия реализации диагонального приближения рассмотрим для случая унитарного ансамбля, когда матрицы u и v усредняются независимо. Если для унитарной матрицы u ограничиться действительными матричными элементами, то она превращается в ортогональную матрицу \tilde{u} ; чтобы вернуться к унитарной матрице, нужно дописать к элементам матрицы \tilde{u} надлежащие фазовые множители. Производя аналогичную процедуру для матрицы v , положим

$$u_{lk} = \tilde{u}_{lk} e^{i\varphi_{lk}}, \quad v_{lk} = \tilde{v}_{lk} e^{i\phi_{lk}} \tag{26}$$

и подставляя в (23), имеем

$$\begin{aligned}
B_{ij} &= \sum_k \langle |\tilde{v}_{ik}|^2 |\tilde{u}_{jk}|^2 \rangle, \quad C_{ij} = \sum_k \langle |\tilde{u}_{ik}|^2 |\tilde{v}_{jk}|^2 \rangle, \\
D_{ij} &= -2 \sum_k \langle \tilde{v}_{ik} \tilde{v}_{jk} \tilde{u}_{ik} \tilde{u}_{jk} \cos(\phi_{ik} + \phi_{jk} - \varphi_{ik} - \varphi_{jk}) \rangle, \\
A_{ij} &= 4 \sum_k \langle \tilde{v}_{ik} \tilde{v}_{jk} \tilde{u}_{ik} \tilde{u}_{jk} \sin(\varphi_{ik} - \phi_{ik}) \sin(\varphi_{jk} - \phi_{jk}) \rangle.
\end{aligned} \tag{27}$$

Если матрицы \tilde{v} и \tilde{u} полностью случайны, а фазы φ_{ik} и ϕ_{ik} имеют неоднородные распределения, то средние от произведений $\tilde{v}_{ik} \tilde{v}_{jk}$, $\tilde{u}_{ik} \tilde{u}_{jk}$ обращаются в нуль при $i \neq j$, обеспечивая диагональное приближение (24), в котором A_i и K_{ij} не связаны определенным соотношением; при этом для K_{ij} получается тривиальный результат (см. ниже (28)). Если же наоборот, матрицы \tilde{v} и \tilde{u} недостаточно случайны, но фазы φ_{ik} и ϕ_{ik} полностью стохастизированы, то возникает диагональное приближение с нетривиальными K_{ij} и соотношением $A_i = 2K_{ii}$; в результате член с γ_i исчезает и (25) сводится к варианту (9), предложенному Мутталибом и др. [15]–[17]. Наконец, если полностью случайными являются как \tilde{v} , \tilde{u} , так и φ_{ik} , ϕ_{ik} , то усреднение происходит по унитарной группе, приводя к результатам

$$K_{ij} = \sum_k \langle |v_{ik}|^2 \rangle \langle |u_{jk}|^2 \rangle = \frac{1}{N} \quad \text{и} \quad \beta_{jk}^i = 2, \tag{28}$$

$$K_{ij} = \sum_k \langle |u_{ik}|^2 |u_{jk}|^2 \rangle = \frac{1 + \delta_{ij}}{N + 1} \quad \text{и} \quad \beta_{jk}^i = 1 \quad (29)$$

для унитарного и ортогонального ансамбля соответственно, так что уравнение (9) превращается в обычное уравнение ДМПК (5).⁷

Перейдем к третьему варианту диагонального приближения, который представляется наиболее актуальным для приложений. Как обсуждалось в [14, 33], для правильного определения проводимости конечных систем полезно введение полупрозрачных границ, отделяющих рассматриваемую систему от присоединенных к ней идеальных контактов. При переходе к пределу слабо-проницаемых границ возникают универсальные уравнения, не зависящие от способа исключения контактного сопротивления резервуара [34] (все формулы ландауэровского типа [35]–[39] в этом пределе сводятся к варианту Эконому–Соукоулиса [20, 21]), которые затем можно экстраполировать к прозрачности порядка единицы. Такое определение заведомо относится к изучаемой системе (а не составной системе "образец+идеальные провода") и обеспечивает бесконечное значение проводимости для идеальной системы [33].

Будем считать, что слабо-прозрачные границы обусловлены введением точечных рассеивателей на одномерные проводники, присоединенные к системе (Рис.2,а); тогда ее трансфер-матрица \hat{T} переходит в $\hat{T}_0 \hat{T} \hat{T}_0$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 1 - i\kappa & -i\kappa \\ i\kappa & 1 + i\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - i\kappa & -i\kappa \\ i\kappa & 1 + i\kappa \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где κ — диагональная матрица. Приводя (30) к каноническому виду (2), получим в главном приближении при больших κ

$$\begin{aligned} u_1 \sqrt{1 + \lambda} u &= -\kappa \tilde{T} \kappa, \\ u_1 \sqrt{\lambda} v &= -\kappa \tilde{T} \kappa, \\ v_1 \sqrt{\lambda} u &= \kappa \tilde{T} \kappa, \\ v_1 \sqrt{1 + \lambda} v &= \kappa \tilde{T} \kappa, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\tilde{T} = T_{11} - T_{12} + T_{21} - T_{22}$. Поскольку унитарные матрицы u, v, u_1, v_1 имеют ограниченные матричные элементы, то $\lambda \sim \kappa^4$, что позволяет заменить $1 + \lambda$ на λ , после чего имеем

$$u = v, \quad u_1 = -v_1 \quad \text{при} \quad \kappa \rightarrow \infty. \quad (32)$$

⁷ Для ортогонального ансамбля диагональное приближение, приводящее к (25), не реализуется.

При больших λ_i уравнения (21–23) упрощаются к виду, аналогичному (25), но с другим определением K_{ij} (см. Приложение B), $K_{ij} = (B_{ij} + C_{ij} + D_{ij})/2$. Подстановка (32) в (23) дает $K_{ij} \rightarrow 0$, $A_{ij} \rightarrow 0$ в пределе $\kappa \rightarrow \infty$. При больших, но конечных κ нужно учитывать малые отклонения v от u , полагая

$$v_{jk} = u_{jk} \exp\{ih_{jk}\}, \quad (33)$$

где матричные элементы h_{jk} малы по модулю; они действительны для ортогонального ансамбля и комплексны для унитарного. Подставляя в (23), получим во втором порядке по h_{jk}

$$\begin{aligned} 2K_{ij} &= \sum_k \langle |u_{ik}|^2 |u_{jk}|^2 (|h_{ik}|^2 + |h_{jk}|^2 + \\ &\quad + h_{ik}h_{jk} + h_{ik}^*h_{jk}^*) \rangle, \\ A_{ij} &= \sum_k \langle |u_{ik}|^2 |u_{jk}|^2 (h_{ik}h_{jk} + h_{ik}^*h_{jk}^* + \\ &\quad + h_{ik}^*h_{jk} + h_{ik}h_{jk}^*) \rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

Нетрудно видеть, что $A_{ii} = 2K_{ii}$ независимо от статистики h_{ik} (фактически это следует из общих выражений (23)). В пределе $\kappa \rightarrow \infty$ модули h_{ik} стремятся к нулю, но никаких других ограничений на их статистику не возникает. Естественно считать, что h_{ik} случайно флуктуируют и их флуктуации независимы от u_{ik} .⁸ Тогда попарные произведения $h_{ik}h_{jk}, h_{ik}^*h_{jk}, \dots$ с $i \neq j$ при усреднении обращаются в нуль и матрица A_{ij} оказывается диагональной. В результате уравнение (21) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial L} &= \alpha \sum_i K_{ii} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[-\gamma_i(1 + 2\lambda_i) P\{\lambda\} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_i(1 + \lambda_i) J_i\{\lambda\} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{P\{\lambda\}}{J_i\{\lambda\}} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

$$J_i\{\lambda\} = \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^{\beta_{jk}^i}, \quad \beta_{jk}^i = 2K_{jk}/K_{ii}$$

$$\gamma_i = (1 - \sum_j K_{ij})/K_{ii}, \quad K_{ij} = (B_{ij} + C_{ij} + D_{ij})/2$$

и имеет ту же структуру, что (25), но с другим определением параметров. Поскольку K_{ij} малы

⁸ Если матрица u содержит зависимость от h_{jk} , то эта зависимость проявляется в членах третьего порядка, которыми мы пренебрегаем.

при больших κ , то параметры γ_i заведомо конечны и велики по модулю.

Заметим, что первые два варианта диагонального приближения выглядят несколько искусственно. Если матрицы u и v полностью случайны, то мы возвращаемся к исходному уравнению (5). Если же u и v недостаточно случайны, то возникает тенденция к недиагональной ситуации: мы не видим серьезных оснований считать \tilde{u}_{ij} более случайными, чем φ_{ij} или наоборот. Напротив, в третьем варианте диагональное приближение выглядит вполне естественным — введение слабо-проницаемых границ ограничивает взаимные флуктуации u и v , но за пределами этих ограничений они считаются совершенно случайными. Одновременно вся ситуация с определением проводимости становится логически замкнутой.

Как ясно из вывода, структура уравнения (35) одинакова для унитарного и ортогонального ансамбля, что позволяет исследовать системы в произвольном магнитном поле. При этом β становится свободным параметром, не связанным с вигнер-дайсоновскими значениями, а в общем случае превращается в матрицу⁹.

6. Ляпуновские экспоненты

Простейшим физическим приложением уравнения (35) является вычисление ляпуновских экспонент. Согласно Рис.2, трансфер-матрица квазиодномерной системы представляется в виде произведения трансфер-матриц, соответствующих эффективным рассеивателям. Как следствие общей теоремы Оселедеца [41], параметры λ_i имеют при больших L экспоненциальное поведение $\lambda_i \sim \exp\{\kappa_i L\}$, где ляпуновские показатели κ_i стремятся при $L \rightarrow \infty$ к детерминированным (не случайным) значениям. Обратные значения $l_i = 1/\kappa_i$ определяют N характерных длин рассматриваемой N -канальной задачи, максимальная из которых является корреляционным радиусом соответствующей квазиодномерной системы. Значение ляпуновских экспонент для анализа перехода

⁹ На первый взгляд, при нецелых β нарушается закон отталкивания уровней при аномальном сближении двух из них [40]. Однако, уже в рамках обычного уравнения ДМПК корреляция λ_i определяется якобианом $J\{\lambda\}$ лишь в области малых L и усложняется на больших масштабах (см. обсуждение после формулы (6)); физически это связано с переходом от квазиметаллического к локализованному режиму. В общем случае взаимосвязь между $P\{\lambda\}$ и $J_i\{\lambda\}$ становится еще более сложной.

Андерсона в настоящее время хорошо известно: на этом факте основан численный алгоритм [12], в контексте которого имеется множество публикаций¹⁰.

Как известно [2, 5], уравнение (5) легко решается в пределе больших L , когда параметры λ_i велики и подчиняются иерархии $\lambda_1 \gg \lambda_2 \gg \dots \gg \lambda_N$; тогда $J\{\lambda\}$ сводится к произведению от степеней λ_i и уравнение (5) распадается на N независимых уравнений. Применяя ту же процедуру к уравнению (35), получим независимые гауссовские распределения для величин $x_i = \ln \lambda_i$, определяемые двумя первыми моментами:

$$\langle x_i \rangle = \alpha L \left[(2\gamma_i + 1)K_{ii} + 2 \sum_{j=i+1}^N K_{ij} \right],$$

$$\sigma_i^2 = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 = 2\alpha L K_{ii}, \quad (36)$$

что при $\gamma_i = 0$ совпадает с результатами [13, 16]. В приближении эквивалентных каналов можно положить $\alpha K_{ii} = \tilde{\alpha}$, $\beta_{ij} = \beta$, $\gamma_i = \gamma$, так что уравнение (35) содержит три параметра $\tilde{\alpha}L$, β , γ ; в частности

$$\frac{2\langle x_i \rangle}{\sigma_i^2} = 2\gamma + 1 + \beta(N - i) \quad (37)$$

и параметры β , γ легко получить из численных данных по ляпуновским экспонентам (см. напр. [44, 45]). Из формулы (32) работы [45] следует, что соотношение $\sigma_i^2 = 2\langle x_i \rangle$ для минимальной экспоненты ($i = N$ в наших обозначениях) справедливо в металлическом режиме, но нарушается вне его, а стало быть параметр γ отличен от нуля за пределами металлической фазы.¹¹ Представляется вероятным, что конечные значения γ_i возникают как раз на переходе Андерсона и сигнализируют о появлении локализованной фазы. Как показывают численные эксперименты [30], правильную зависимость ляпуновских экспонент от

¹⁰ Популярное изложение алгоритма и его критический анализ можно найти в работе [42], а его обоснование в рамках самосогласованной теории локализации — в работе [43]. Там же имеются многочисленные ссылки.

¹¹ В формуле (4.5) работы [17] приведено более общее выражение для $\langle x_i \rangle$, учитывающее нарушение сильной иерархии λ_i в квазитрехмерной геометрии; оно переходит в результаты [13, 16] в пределе $L \rightarrow \infty$ при фиксированном N , в котором и определяются ляпуновские экспоненты. По-видимому, в условиях работы [17] матрица D_{ij} оказывалась диагональной с ненулевыми элементами D_{ii} ; поэтому конечность γ_i компенсировалась переопределением K_{ii} и не влияла на качество обработки по формуле (4.5).

N удается объяснить уже в контексте уравнения (9); наличие параметров γ_i открывает дополнительные возможности в этом отношении.

7. Следствия для проблемы распределения кондактансов

Согласно (4), параметры λ_i определяют безразмерный кондактанс g , т.е. полную проводимость системы в единицах e^2/h . Поэтому уравнение ДМПК дает принципиальную возможность для исследования распределения кондактансов. На данный момент это единственный систематический подход к этой проблеме¹². До настоящего времени он был ограничен слабо неупорядоченными квазиодномерными системами; проведенные обобщения распространяют его на окрестность перехода Андерсона и режим сильной локализации.

Скейлинговый подход к проблеме основан на крупномасштабных построениях Шапиро [29], аналогичных преобразованиям Мигдала-Каданова в обычной теории фазовых переходов [31, 32]. Из b кубических блоков размера L составляется квазиодномерная система длины L_z , после чего параллельное соединение b^{d-1} таких систем образует d -мерный куб большего размера. Согласно гипотезе однопараметрического скейлинга [47], свойства кубической системы размера L полностью определяют параметром L/ξ . Свойства квазиодномерной системы, составленной из кубических блоков, зависят от свойств одного блока (L/ξ) и числа кубиков (L_z/L); при наличии магнитного поля добавляется еще параметр L/l_H , где $l_H = (c\hbar/2eH)^{1/2}$ — магнитная длина. Таким образом, имеем для кондактанса

$$g = F\left(\frac{L}{\xi}, \frac{L_z}{L}, \frac{L}{l_H}\right). \quad (38)$$

Универсальные соотношения типа (38) формируются на больших масштабах. Если функцию F считать неизменной, то размер L можно уменьшать до значений $L \sim a$, где a — атомный масштаб. Тогда квазиодномерная система является достаточно тонкой, ее каналы хорошо перемешиваются рассеиванием, и естественно ожидать применимости приближения эквивалентных

¹² В подходе, основанном на использовании сигма-моделей, распределение кондактансов удается установить лишь в очень простых случаях, когда возможно вычисление всех моментов [46].

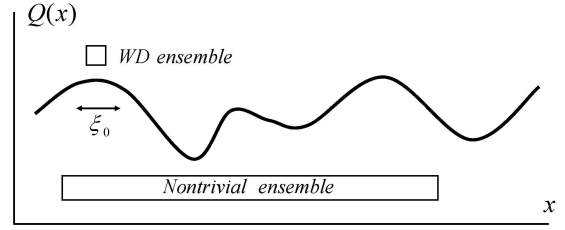


Рис. 3: Предполагается, что суперсимметричное поле Q изменяется на масштабе ξ_0 , существенно превышающем атомный. На масштабах, меньших ξ_0 применим вигнер-дайсоновский ансамбль, а на больших масштабах возникает некоторый нетривиальный ансамбль.

каналов, когда $\alpha K_{ii} = \tilde{\alpha}$, $\beta_{ij} = \beta$, $\gamma_i = \gamma$ и обобщенное уравнение ДМПК (35) содержит три параметра $\tilde{\alpha}L$, β , γ , которые находятся во взаимно-однозначном соотношении с параметрами L/ξ , L_z/L , L/l_H уравнения (38). Таким образом, все трехпараметрическое семейство распределений кондактанса, возникающее в квазиодномерных системах, может быть получено в результате решения обобщенного уравнения ДМПК в приближении эквивалентных каналов¹³. Легко видеть, что переменность параметра β и наличие дополнительных членов, определяемых параметрами γ_i , имеет принципиальное значение для самосогласованности этой картины.

8. Следствия для сигма-моделей

Главным отличием уравнения (35) от обычного уравнения ДМПК является замена вигнер-дайсоновского якобиана $J\{\lambda\}$ на более сложные комбинации $J_i\{\lambda\}$. При этом β перестает быть целочисленным и в общем случае зависит от трех индексов. Отсюда ясно, что за пределами металлической фазы "чистые" вигнер-дайсоновские ансамбли теряют смысл и, в частности, не адекватны для описания перехода Андерсона. Последнее обстоятельство не учитывается в существующих вариантах сигма-моделей [8, 9], которые эквивалентны простейшему уравнению (5) и требуют модификации для учета обсуждаемых обобщений.

Во избежание недоразумений прокомментируем ситуацию более подробно. Суперсимметрич-

¹³ Используя схему Шапиро в дифференциальной форме, можно пытаться получить уравнение, описывающее распределение кондактансов d -мерной системы [14].

ные сигма-модели строятся по аналогии с теорией сверхпроводимости [46]; при этом роль сверхпроводящего параметра порядка играет суперматричное поле Q , пространственные изменения которого предполагаются на масштабе ξ_0 , существенно превышающем атомный. Как показано Ефетовым [48], флуктуации поля Q при условии его пространственной однородности приводят к вигнер-дайсоновской статистике; поэтому именно такая статистика предполагается на масштабах, меньших ξ_0 (Рис.3). При переходе к большим масштабам следует учитывать пространственные флуктуации поля Q , что приводит к формированию некоторого нетривиального ансамбля¹⁴ (Рис.3). Этот ансамбль предполагается адекватным для всех физических ситуаций; в частности, ожидается (но не доказывается), что в точке перехода Андерсона он будет совпадать с соответствующим критическим ансамблем. Эти надежды оказываются иллюзорными. В настоящее время хорошо известно [40], что критический ансамбль является стационарным и не зависит от масштаба расстояний: если он реализуется при больших L , то он сохраняется и на произвольных масштабах, вплоть до самого малого. Поэтому не существует масштаба, на котором справедлива вигнер-дайсоновская статистика; от противного можно заключить, что поле Q меняется быстро и не может считаться постоянным ни на каком масштабе.

Эти проблемы удается обойти лишь для размерности $d = 2 + \epsilon$, когда критическая статистика близка к вигнер-дайсоновской и различие между ними не существенно в главном ϵ -приближении. Однако, сигма-модели претендуют на описание перехода Андерсона во всех порядках по ϵ , хотя их соответствие с исходными неупорядоченными системами устанавливается лишь в главном порядке. Такая точка зрения имеет некоторые основания¹⁵, но полностью исключается вышеска-

¹⁴ Это находится в полном согласии с ДМПК подходом. Распределение λ_i определяется якобианом $J\{\lambda\}$ при малых L , но становится более сложным при переходе к большим масштабам [22].

¹⁵ Обычно аргументируется, что соответствие сигма-моделей с исходными неупорядоченными системами достаточно установить лишь приближенно, чтобы попасть в нужный класс универсальности, тогда как оставшееся различие устраняется в результате ренормгрупповой эволюции. Но это предполагает устойчивость сигма-моделей, в отношении которой имеются большие сомнения [49]. С другой стороны, исходную неупорядоченную систему можно свести к трем различным сигма-моделям: бозонной [50], фермионной [51] и суперсимметричной [46]. В глав-

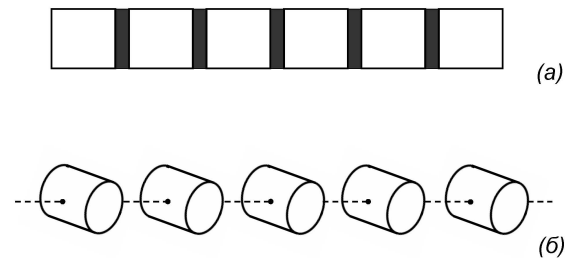


Рис. 4: (а) Одномерная версия модели гранулированного металла, используемой при выводе решеточной сигма-модели. Фактически последняя соответствует более сложной топологии (б), когда каждая гранула рассматривается как конечная система с периодическими граничными условиями.

занным. Действительно, нулевым приближением теории $2 + \epsilon$ является двумерная система в металлическом режиме, когда применимость вигнер-дайсоновской статистики не вызывает сомнений. При переходе к $d = 2 + \epsilon$ учитывается изменение лишь размерности пространства, тогда как статистический ансамбль считается неизменным; в действительности он должен изменяться вместе с размерностью.

Попытка преодоления этих трудностей делается в решеточных версиях сигма-моделей [52], которые выводятся для системы слабо связанных металлических гранул (Рис.4,а); поле Q считается постоянным внутри каждой гранулы, что позволяет описывать их вигнер-дайсоновской статистикой. При этом неявно используется аналогия с гранулированными сверхпроводниками. В последнем случае сверхпроводящий параметр порядка является постоянным внутри каждой гранулы и резко падает до нуля на ее границах. Модуль параметра порядка определяет равновесным значением при данной температуре и одинаков во всех гранулах. Флуктуациям подвержена лишь фаза параметра порядка, которая неизменна внутри одной гранулы, но имеет свое значение в каждой грануле. Если джозефсоновские связи между гранулами достаточно сильны, то значения фаз в разных гранулах оказываются силь-

ном ϵ -приближении все три сигма-модели эквивалентны, но трудно ожидать их эквивалентности во всех порядках по ϵ . А следовательно приведенный аргумент заведомо отказывает в двух из трех случаев и нег оснований к нему относиться серьезно.

но скоррелированными, что приводит к установлению дальнего порядка. При уменьшении общего масштаба джозефсоновских связей фазовые флуктуации возрастают, что приводит к разрушению сверхпроводимости в некоторой критической точке [53]. Переход Андерсона в решеточных сигма-моделях описывается аналогично сверхпроводящему переходу в гранулированных системах.

Однако, нет никаких оснований ожидать, что суперсимметричное поле Q ведет себя так же, как сверхпроводящий параметр порядка. Фактически можно утверждать обратное. Как ясно из разд.5, введение слабо-проницаемых границ ограничивает взаимные флуктуации матриц u и v , что приводит к существенному отличию ансамбля от вигнер-дайсоновского (в последнем случае матрицы u и v флуктуируют свободно). От противного можно заключить, что введение слабо-проницаемых границ приводит к существенным изменениям поля Q внутри одной гранулы. Фактически решеточные сигма-модели соответствуют более сложной топологии (Рис.4,б), когда каждая гранула считается конечной системой с периодическими граничными условиями, при которых постоянство поля Q внутри нее не вызывает сомнений. Именно к такой топологии относятся результаты для перехода Андерсона, полученные путем решения сигма-моделей [54]; однако их актуальность для реальной ситуации (Рис.4,а) оказывается проблематичной.

Последний вывод не является неожиданным. Актуальность решеточных сигма-моделей уже давно вызывала сомнение в связи с вопросом о верхней критической размерности [55]. Решеточные сигма-модели не обнаруживают особых размерностей в интервале $2 < d < \infty$, тогда как выделенность размерности $d = 4$ проявляется во всех диаграммных вычислениях для неупорядоченных систем. Фактически это следствие теоремы Боголюбова о перенормируемости теории φ^4 [56], к которой задача о переходе Андерсона сводится математически точно [32, 57]. До настоящего времени эти сомнения носили абстрактный характер, но теперь они приобретают конструктивную форму.

9. Заключение

В настоящей работе уравнение ДМПК выводится при минимальных предположениях о свойствах каналов; оно имеет диффузионный вид

с тензорным характером коэффициента диффузии и ненулевыми недиагональными элементами. Предложено три варианта диагонального приближения, один из которых воспроизводит обычное уравнение ДМПК и его обобщение, полученное в [15]–[17]. Два других варианта приводят к уравнению, содержащему дополнительные вклады, характеризующиеся параметрами γ_i . Существенность последних продемонстрирована на примере вычисления ляпуновских экспонент. Обсуждаются следствия полученных уравнений для проблемы распределения контактов и статуса нелинейных сигма-моделей.

Наиболее общая форма (21) уравнения ДМПК, по-видимому, не является актуальной; ее нужно использовать для формулировки новых статистических гипотез, которые были бы адекватны для анализа перехода Андерсона. Методы численного моделирования позволяют вычислять матрицы u и v [18] и на основании их статистических свойств устанавливать форму матриц A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} . Численный анализ, проводившийся в контексте уравнения (9) [17, 30]¹⁶, по-видимому указывает на реализацию диагонального приближения и отличие параметров β_{jk}^i от вигнер-дайсоновских значений; конечность параметров γ_i следует из формулы (32) работы [45]. Такой анализ желательно продолжить на основе более общих выражений (23). С другой стороны, математические методы, разработанные для анализа обычного уравнения ДМПК [3, 4, 5], по-видимому могут быть использованы для получения более общих результатов; наличие больших параметров γ_i может этому способствовать.

Приложение А. Вывод уравнения эволюции

Параметры λ'_i матрицы \hat{T}' являются собственными значениями эрмитового "гамильтониана" $H = T_{12}T_{12}^+$ (см. (17)), который имеет матричные элементы¹⁷

$$H_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} + V_{ij},$$

$$V_{ij} = i \sum_k \epsilon_k \left[\sqrt{\lambda_i(1 + \lambda_j)} v_{ik} u_{jk}^* - \right.$$

¹⁶ Заметим, что настоящая работа проясняет условия реализации уравнения (9); в частности, самоусредняемость K_{ij} , подробно обсуждавшаяся в [30], в действительности не имеет никакого значения.

¹⁷ Все вычисления производятся во втором порядке по ϵ . Мнимая единица i входит лишь в несколько выражений в качестве множителя и легко отличима от индексов.

$$-\sqrt{(1+\lambda_l)\lambda_j}u_{lk}v_{jk}^*] + \quad (A.1)$$

$$+ \sum_k \epsilon_k^2 \left[\sqrt{(1+\lambda_l)(1+\lambda_j)}u_{lk}u_{jk}^* + \sqrt{\lambda_l\lambda_j}v_{lk}v_{jk}^* \right].$$

Собственные значения λ'_i матрицы H вычисляются по обычной теории возмущений

$$\lambda'_i = \lambda_i + V_{ii} + \sum_j' \frac{V_{ij}V_{ij}^*}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad (A.2)$$

что позволяет получить их в виде разложения по ϵ_k

$$\begin{aligned} \lambda'_i = f_i\{\lambda\} &= \lambda_i + \sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)} \sum_k A_k^i \epsilon_k + \\ &+ \sum_{kk'} C_{kk'}^i\{\lambda\} \epsilon_k \epsilon_{k'}, \end{aligned} \quad (A.3)$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$\begin{aligned} A_k^i &= i(v_{lk}u_{lk}^* - u_{lk}v_{lk}^*), \\ B_k^i\{\lambda\} &= (1+\lambda_i)|u_{ik}|^2 + \lambda_i|v_{ik}|^2, \\ C_{kk'}^i\{\lambda\} &= B_k^i\{\lambda\}\delta_{kk'} + \\ &+ \sum_j' \frac{\lambda_i(1+\lambda_j)B_{ijkk'} + (1+\lambda_i)\lambda_j C_{ijkk'}}{\lambda_i - \lambda_j} + \\ &+ \sum_j' \frac{\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)\lambda_j(1+\lambda_j)}}{\lambda_i - \lambda_j} D_{ijkk'}, \end{aligned} \quad (A.4)$$

$$B_{ijkk'} = v_{ik}v_{ik'}^*u_{jk}^*u_{jk'},$$

$$C_{ijkk'} = u_{ik}u_{ik'}^*v_{jk}^*v_{jk'},$$

$$D_{ijkk'} = -v_{ik}u_{ik'}^*u_{jk}^*v_{jk'} - u_{ik}v_{ik'}^*v_{jk}^*u_{jk'}.$$

Составляя функцию распределения (18) и делая замену $y_i = f_i\{\lambda\}$, придем к формуле (20), где обращение $\lambda_i = g_i\{y\}$ находится итерациями по ϵ_k

$$\begin{aligned} \lambda_i = g_i\{y\} &= y_i - \sqrt{y_i(1+y_i)} \sum_k A_k^i \epsilon_k + \\ &+ \frac{1}{2}(1+2y_i) \sum_{kk'} A_k^i A_{k'}^i \epsilon_k \epsilon_{k'} - \sum_{kk'} C_{kk'}^i\{y\} \epsilon_k \epsilon_{k'}. \end{aligned} \quad (A.5)$$

Интегрирование по y_i снимает δ -функции, приводя к результату (20). Матрица якобиана $I\{y\}$

имеет диагональные элементы порядка единицы и недиагональные порядка ϵ^2 ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y_i} &= 1 - \frac{(1+2y_i)}{2\sqrt{y_i(1+y_i)}} \sum_k A_k^i \epsilon_k + \\ &+ \sum_{kk'} A_k^i A_{k'}^i \epsilon_k \epsilon_{k'} - \sum_{kk'} \frac{\partial C_{kk'}^i\{y\}}{\partial y_i} \epsilon_k \epsilon_{k'}, \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial y_j} &= - \sum_{kk'} \frac{\partial C_{kk'}^i\{y\}}{\partial y_j} \epsilon_k \epsilon_{k'} \quad (j \neq i), \end{aligned} \quad (A.6)$$

так что ее детерминант сводится к произведению диагональных элементов и вычисляется по схеме

$$\prod_i (1+a_i\epsilon+b_i\epsilon^2) \approx 1 + \sum_i a_i\epsilon + \sum_i b_i\epsilon^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij}' a_i a_j \epsilon^2, \quad (A.7)$$

приводящей к результату

$$I\{\lambda\} = 1 + \sum_k R_k\{\lambda\} \epsilon_k + \sum_{kk'} S_{kk'}\{\lambda\} \epsilon_k \epsilon_{k'}, \quad (A.8)$$

где

$$R_k\{\lambda\} = - \sum_i \frac{(1+2\lambda_i)}{2\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)}} A_k^i, \quad (A.9)$$

$$\begin{aligned} S_{kk'}\{\lambda\} &= \sum_i \left(A_k^i A_{k'}^i - \frac{\partial C_{kk'}^i\{\lambda\}}{\partial \lambda_i} \right) + \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{ij}' \frac{(1+2\lambda_i)(1+2\lambda_j)}{\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)\lambda_j(1+\lambda_j)}} A_k^i A_{k'}^i. \end{aligned}$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} P_L\{g_i\{\lambda\}\} &= P_L\{\lambda_i + \Delta\lambda_i\} = P_L\{\lambda\} + \\ &+ \sum_i \frac{\partial P_L\{\lambda\}}{\partial \lambda_i} \Delta\lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 P_L\{\lambda\}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \Delta\lambda_i \Delta\lambda_j, \end{aligned} \quad (A.10)$$

где

$$\Delta\lambda_i = -\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)} \sum_k A_k^i \epsilon_k + \sum_{kk'} L_{kk'}^i\{\lambda\} \epsilon_k \epsilon_{k'},$$

$$L_{kk'}^i\{\lambda\} = \frac{1}{2}(1+2\lambda_i)A_k^i A_{k'}^i - C_{kk'}^i\{\lambda\}. \quad (A.11)$$

Подставляя (A.8 – A.11) в (20) и усредняя с учетом $\langle \epsilon_k \rangle = 0$, $\langle \epsilon_k \epsilon_{k'} \rangle = \alpha \Delta L \delta_{kk'}$, получим

$$\frac{\partial P\{\lambda\}}{\alpha \partial L} = P\{\lambda\} \sum_k \langle S_{kk}\{\lambda\} \rangle +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_i \frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial \lambda_i} \sum_k \left\langle L_{kk}^i\{\lambda\} - \sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)} A_k^i R_k\{\lambda\} \right\rangle \\
& + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 P_L\{\lambda\}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)\lambda_j(1+\lambda_j)} \sum_k \left\langle A_k^i A_k^j \right\rangle, \quad (A.12)
\end{aligned}$$

что после преобразований сводится к (21–23).

Приложение В. Упрощение уравнения (21)

В диагональном приближении (24) уравнение (21) принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial L} &= \alpha \sum_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[G_i\{\lambda\} P\{\lambda\} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} A_i \lambda_i (1 + \lambda_i) \frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial \lambda_i} \right], \quad (B.1)
\end{aligned}$$

$$G_i\{\lambda\} = (1 + 2\lambda_i) \frac{A_i - 2}{2} - \sum_j' \frac{2\lambda_i \lambda_j + \lambda_i + \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} K_{ij}.$$

Сумма по j преобразуется с помощью тождества [2]

$$\sum_j' \frac{K_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\partial \ln J\{\lambda\}}{\partial \lambda_i}, \quad J\{\lambda\} = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^{K_{ij}}, \quad (B.2)$$

справедливого для симметричной матрицы K_{ij} , что позволяет преобразовать комбинацию

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} A_i \frac{\partial P\{\lambda\}}{\partial \lambda_i} - 2 \frac{\partial \ln J\{\lambda\}}{\partial \lambda_i} P\{\lambda\} = \\
& = \frac{1}{2} A_i J_i\{\lambda\} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{P\{\lambda\}}{J_i\{\lambda\}}, \quad J_i\{\lambda\} \equiv J\{\lambda\}^{4/A_i} \quad (B.3)
\end{aligned}$$

и привести (B.1) к виду (25). Если соотношение (B.2) используется без учета симметрии K_{ij} , то легко придти к ложному выводу, что $J_i\{\lambda\}$ не зависит от i и определяется параметрами $\beta_{ij} = 4K_{ij}/A_i$.

В случае слабо-проницаемых границ параметров λ_i велики и можно провести разложение по $1/\lambda_i$ с сохранением двух первых членов; тогда

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)\lambda_j(1+\lambda_j)} &\approx (2\lambda_i\lambda_j + \lambda_i + \lambda_j)/2, \\
\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i)} &\approx (1 + 2\lambda_i)/2 \quad (B.4)
\end{aligned}$$

и в (22) имеем

$$\tilde{G}_i\{\lambda\} = -(1 + 2\lambda_i) \sum_j' K_{ij} + \sum_j' (B_{ij} - C_{ij})/2 +$$

$$+ 2\lambda_i(1 + \lambda_i) \sum_j' \frac{K_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad (B.5)$$

где $K_{ij} = (B_{ij} + C_{ij} + D_{ij})/2$. Поскольку обычно $B_{ij} = C_{ij}$, то мы опустим второй член в правой части, но сохраним симметричное определение для K_{ij} . Используя (B.2), приведем (21), (22) к виду (35).

Список литературы

- [1] О. Н. Дорохов, Письма в ЖЭТФ **36**, 259 (1982).
- [2] P. A. Mello, P. Pereyra, N. Kumar, Ann. Phys. (N.Y.) **181**, 290 (1988).
- [3] P. A. Mello, A. D. Stone, Phys. Rev. B **44**, 3559 (1991).
- [4] A. M. S. Macêdo, J. T. Chalker, Phys. Rev. B **46**, 14985 (1992).
- [5] C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997).
- [6] M. L. Mehta, Random Matrices, Fcfltvic, New York, 1991.
- [7] P. W. Brower, K. Frahm, Phys. Rev. B **53**, 1490 (1996).
- [8] K. B. Efetov, Adv. Phys. **32**, 53 (1983).
- [9] S. Iida, H. A. Weidenmüller, M. R. Zirnbauer, Ann. Phys. (N.Y.) **200**, 219 (1990).
- [10] Б. Л. Альтшулер, Письма в ЖЭТФ **41**, 530 (1985).
- [11] P. A. Lee, A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985).
- [12] J. L. Pichard, G. Sarma, J.Phys.C: Solid State Phys. **14**, L127 (1981).
A. MacKinnon, B. Kramer, Phys. Rev. Lett. **47**, 1546 (1981).
- [13] J. T. Chalker, M. Bernhardt, Phys. Rev. Lett. **70**, 982 (1993).
- [14] И. М. Суслов, ЖЭТФ **151**, 897 (2017).
- [15] K. A. Muttalib, J. R. Klauder, Phys. Rev. Lett. **82**, 4272 (1999).

- [16] K. A. Muttalib, V. A. Gopar, Phys. Rev. B **66**, 11538 (2002).
- [17] A. Douglas, P. Markoš, K. A. Muttalib, J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 125103 (2014).
- [18] P. Markoš, acta physica slovacica 56, 561 (2006).
- [19] P. A. Mello, J. L. Pichard, J. Phys. I **1**, 493 (1991).
- [20] E. N. Economou, C. M. Soukoulis, Phys. Rev. Lett. **46**, 618 (1981).
- [21] D. S. Fisher, P. A. Lee, Phys. Rev. B **23**, 6851 (1981).
- [22] C. W. J. Beenakker, B. Rejaei, Phys. Rev. Lett. **71**, 3689 (1993).
- [23] R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957); Phil. Mag. **21**, 863 (1970).
- [24] В. И. Мельников, ФТТ **23**, 782 (1981).
- [25] A. A. Abrikosov, Sol. St. Comm. **37**, 997 (1981).
- [26] N. Kumar, Phys. Rev. B **31**, 5513 (1985).
- [27] B. Shapiro, Phys. Rev. B **34**, 4394 (1986).
- [28] P. Mello, Phys. Rev. B **35**, 1082 (1987).
- [29] B. Shapiro, Phil. Mag. **56**, 1031 (1987).
- [30] K. A. Muttalib, P. Markoš, P. Wölfle, Phys. Rev. B **72**, 125317 (2005).
- [31] К. Вильсон, Дж. Когут, Ренормализационная группа и ϵ -разложение, Мир, Москва (1975).
- [32] Ш. Ма, Современная теория критических явлений, Москва, Мир, 1980.
- [33] И. М. Суслов, ЖЭТФ **142**, 1020 (2012).
- [34] A. D. Stone, A. Szafer, IBM J. Res. Dev. **32**, 384 (1988).
- [35] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).
- [36] D. C. Langreth, E. Abrahams, Phys. Rev. B **24**, 2978 (1981).
- [37] M. Ya. Azbel, J. Phys. C **14**, L225 (1981).
- [38] M. Buttiker, Y. Imry, R. Landauer, S. Pinhas, Phys. Rev. B **31**, 6207 (1985).
- [39] M. Buttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986).
- [40] B. I. Shklovskii, B. Shapiro, B. R. Sears et al, Phys. Rev. B **47**, 11487 (1993).
- [41] В. И. Оселедец, Труды Моск. мат. общества, **19**, 197 (1968).
- [42] И. М. Суслов, ЖЭТФ **128**, 768 (2005).
- [43] И. М. Суслов, ЖЭТФ **141**, 122 (2012).
- [44] J. L. Pichard, G. Andre, Europhys.Lett. **2**, 477 (1986).
- [45] P. Markoš, J. Phys.: Condensed Matter **7**, 8361 (1995).
- [46] K. Efetov, Supersymmetry in disorder and chaos, Cambridge, University Press, 1995.
- [47] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
- [48] К. Б. Ефетов, ЖЭТФ **83**, 833 (1982).
- [49] В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, В. И. Юдсон, ЖЭТФ **94**, 255 (1988).
- [50] F. Wegner, Z. Phys. B **35**, 207 (1979); L. Schäfer, F. Wegner, Z. Phys. B **38**, 113 (1980). S. Hikami, Phys. Rev. B **24**, 2671 (1981).
- [51] К. Б. Ефетов, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ **79**, 1120 (1980).
- [52] К. Б. Ефетов, ЖЭТФ **88**, 1032 (1985).
- [53] B. Mühlischlegel, D. J. Scalapino, R. Denton, Phys. Rev. B **6**, 1767 (1972). G. Deutscher, Y. Imry, L. Gunter, Phys. Rev. B **10**, 4598 (1974).
- [54] К. Б. Ефетов, ЖЭТФ **92**, 638 (1987); **93**, 1125 (1987). M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **34**, 6394 (1986); Nucl. Phys. B **265**, 375 (1986).
- [55] И. М. Суслов, ЖЭТФ **146**, 1272 (2014).

- [56] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей. Москва, Наука, 1976.
- E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, in Phase Transitions and Critical Phenomena, ed. by C. Domb and M. S. Green, Academic, New York (1976), Vol. VI.
- [57] A. Nitzan, K. F. Freed, M. N. Cohen, Phys. Rev. B **15**, 4476 (1977).
- М. В. Садовский, УФН **133**, 223 (1981).