

Распределение кондактансов в одномерных системах: зависимость от уровня Ферми и идеальных контактов

И.М.Суслов

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН,

119334, Москва, Россия

E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Корректное определение проводимости конечных систем предполагает присоединение к системе массивных идеальных контактов. Влияние последних на свойства системы оказывается существенным и исследуется ниже на простейшем примере одномерных систем. В логнормальном режиме оно сводится к изменению абсолютного масштаба кондактанса, но в общем случае изменяет всю функцию распределения. При изменении длины системы могут возникать периодические или аperiodические осцилляции в ее сопротивлении. При изменении уровня Ферми распределение кондактансов одномерной системы претерпевает качественные изменения, напоминающие сглаженный переход Андерсона.

1. Введение и основные результаты

Вопрос о правильном определении проводимости конечных систем является нетривиальным и в начале 1980-х годов был предметом оживленной дискуссии [1]–[9] (см. обзор [10]). Причина разногласий состояла в том, что проводимость конечных систем является плохо определенной величиной. Это связано со спецификой формул теории линейного отклика: входящие в них δ -функции должны быть уширены на величину Γ , которая устремляется к нулю лишь после перехода к термодинамическому пределу; такая процедура очевидно невозможна в конечных системах. Для преодоления этой трудности предложен довольно элегантный трюк [3]: конечная система присоединяется к идеальным контактам (Рис.1), которые предполагаются достаточно массивными, так что переход к термодинамическому пределу фактически производится в этих контактах. Такая конструкция решает вопрос об интерпретации формулы Кубо, но порождает новые проблемы: соответствующее ей определение проводимости относится к составной системе "образец+идеальные провода" тогда как вопрос об его отношении к изучаемой системе остается открытым. В работе [11] для его решения предлагается введение слабопроницаемых границ, отделяющих систему от идеальных контактов. Вопрос о влиянии последних на свойства системы заведомо актуален вблизи перехода Андерсона [12], но обсуждался в [11, 12] лишь на абстрактном уровне. Ниже показано, что этот вопрос может быть предметом конструктивного анализа, который мы проиллюстрируем на простейшем примере одномерных систем.

В теоретических работах обычно предполагается, что в системе имеется единый уровень Ферми, а отличие идеальных контактов от изучаемого образца определяется лишь наличием в последнем случайного потенциала (Рис.2,а). В практическом плане такая ситуация не очень реалистична: обычно в эксперименте подводящие провода изготавливаются из хорошего металла с большой энергией Ферми (так что примеси эффективно экранируются), тогда как изучаемая система является полуметаллом или легированным проводником, в которых эффекты беспорядка проявляются наиболее ярко (Рис.2,б). Тем не менее, отличие от предыдущего случая (Рис.2,а) выглядит неприципиальным и обычно игнорируется в теоретических работах. Однако, введение чужеродных контактов оказывается неизбежным, если уровень Ферми в изучаемой системе соответствует запрещенной зоне идеального кристалла (Рис.2,в), в которой разрешенные состояния возникают лишь из-за наличия случайного потенциала: попытка изготовить подводящие провода из того же материала, но без примесей, приведет к тому, что "идеальные контакты" окажутся непроводящими.



Рис. 1: Корректное определение проводимости конечных систем предполагает присоединение к системе массивных идеальных контактов. Для обсуждения роли последних полезно введение полупроницаемых границ [11].

Явное введение идеальных контактов (Рис.2, б, в) осуществляется с помощью краевых трансфер-матриц (разд.2) и приводит к интересной физической задаче: путем небольшого изменения уровня Ферми (не ощутимого для идеальных контактов) можно переходить от квазиметаллического режима в изучаемой системе (Рис.2, б) к флуктуационным состояниям, лежащим в глубине запрещенной зоны (Рис.2, в). При этом в распределении кондактансов одномерной системы происходят качественные изменения, напоминающие сглаженный переход Андерсона.

Если g — безразмерный кондактанс (полная проводимость системы G в квантовых единицах e^2/h), то эволюция распределения $P(\rho)$ безразмерных сопротивлений $\rho = 1/g$ при изменении длины системы L описывается уравнением

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial L} = \alpha \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho(1+\rho) \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \right], \quad (1)$$

которое получено во многих работах [13]–[18] и считается достаточно универсальным. Однако, как показано в [12], для одномерных систем справедливо более общее уравнение

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial L} = \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[-\gamma(1+2\rho)P(\rho) + \rho(1+\rho) \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \right], \quad (2)$$

которое в приближении случайных фаз сводится к (1). Последнее приближение хорошо работает в глубине разрешенной зоны при "естественных" идеальных контактах (Рис.2,а), что обычно и предполагается в теоретических работах (см. ссылки в [19, 20]); ситуация внутри запрещенной зоны рассматривается сравнительно редко [21, 22, 23] и лишь на уровне волновых функций. Основная мотивация работы [12] состояла в том, что конечное значение параметра γ появляется в результате введения полупроницаемых границ (Рис.1), даже если приближение случайных фаз применимо к изучаемой системе.

При явном введении идеальных контактов получается еще более общее уравнение (разд.7)

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial L} = \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[-\gamma_1(1+2\rho)P(\rho) - 2\gamma_2\sqrt{\rho(1+\rho)}P(\rho) + \rho(1+\rho) \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \right], \quad (3)$$

которое сводится к (2) в области малых и больших L , когда типичные значения ρ соответственно малы и велики (при этом $\gamma = \gamma_1$ в первом и $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ во втором случае), так что уравнение (3) можно интерпретировать как уравнение (2) с переменным γ . Возможность изменения γ в процессе эволюции изначально допускалась в работе [12] и систематически исследуется в разд.3. Предельное значение γ в области больших L определяется внутренними свойствами изучаемой системы и не зависит от идеальных контактов; на Рис.3 показана его зависимость от $\mathcal{E}/W^{4/3}$, где \mathcal{E} — энергия Ферми, отсчитанная от нижнего края зоны, и W — амплитуда случайного потенциала (все энергии измеряются в единицах интеграла перекрытия для одномерной модели Андерсона, см. ниже (14)). Нетрудно видеть, что параметр γ формально всегда отличен от нуля, но принимает малые значения в глубине разрешенной зоны в согласии с приближением случайных фаз. Таким образом, конечность

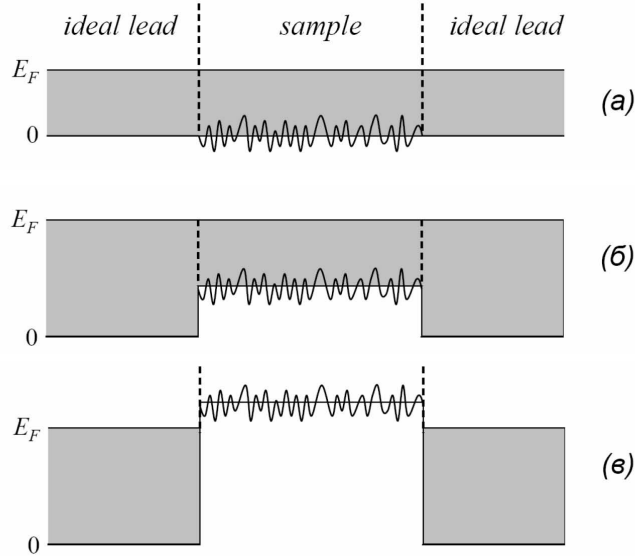


Рис. 2: (а) В теоретических работах обычно предполагается, что отличие идеальных контактов от изучаемой системы определяется лишь наличием в последней случайного потенциала. (б) Практически в эксперименте подводящие провода изготавливаются из хорошего металла с большой энергией Ферми. (в) Явное введение идеальных контактов оказывается неизбежным, если уровень Ферми в изучаемой системе соответствует запрещенной зоне идеального кристалла.

параметра γ определяется внутренними свойствами системы и введение полупроницаемых границ [12] не является для этого необходимым.

В плоскости (\mathcal{E}, W^2) можно выделить три характерные области (Рис.4): квазиметаллическую ($|\gamma| \ll 1$), сильно локализованную ($\gamma \gg 1$) и "критическую" ($\gamma \sim 1$). При изменении энергии \mathcal{E} для фиксированной амплитуды случайного потенциала W происходит что-то вроде сглаженного перехода Андерсона, который превращается в настоящий фазовый переход в пределе $W \rightarrow 0$, когда $\gamma \rightarrow 0$ и $\gamma \rightarrow \infty$ соответственно в металлической и диэлектрической фазе, тогда как ширина критической области ($\gamma \sim 1$) неограниченно уменьшается.

Перейдем к зависимости результатов от свойств идеальных контактов. Начнем с простого примера, чтобы продемонстрировать наличие предмета для обсуждения. Если в ситуации Рис.2, в устранить из системы случайный потенциал, то возникает простейшая квантово-механическая задача о прохождении частицы через потенциальный барьер [24]. Вычисляя амплитуды прохождения (t) и отражения (r), легко найти ландауэровское сопротивление $\rho = |r|^2/|t|^2$ такой системы

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{\kappa} + \frac{\kappa}{k} \right)^2 \text{sh}^2 \kappa L, \quad (4)$$

где k — фермиевский импульс в идеальных контактах, κ — декремент затухания волновых функций под барьером. Если зависимость ρ от L определяется только параметром κ , т.е. внутренними свойствами изучаемой системы, то коэффициент пропорциональности зависит от импульса k , т.е. от свойств идеальных контактов.

Этот результат противоречит физической интуиции, поэтому рассмотрим вопрос о его интерпретации. Наша физическая интуиция сформирована на привычном омическом режиме, когда сопротивление ρ пропорционально длине системы L или полному числу рассеивателей n в ней; следовательно, каждый рассеиватель дает аддитивный вклад в сопротивление. Однако, известно существование и

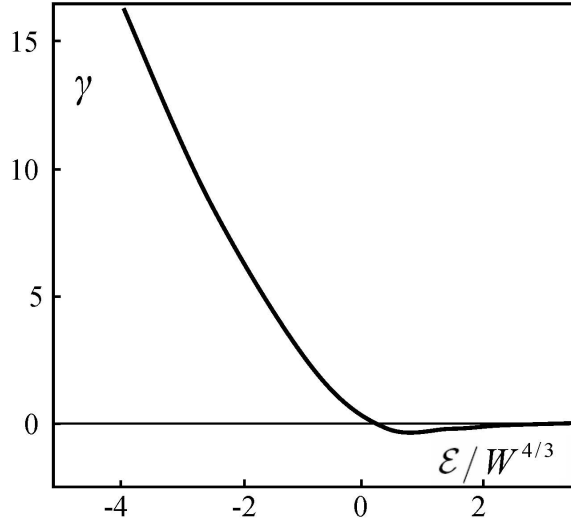


Рис. 3: Зависимость параметра γ в уравнении (2), относящегося к пределу больших L , от энергии \mathcal{E} , отсчитанной от нижнего края исходной зоны.

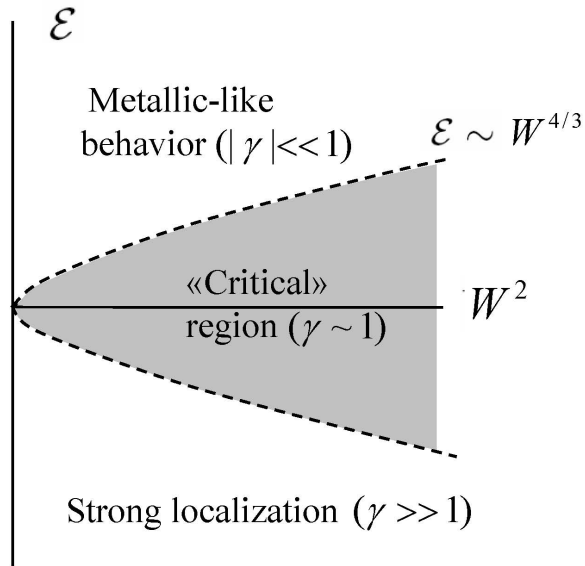


Рис. 4: В плоскости (\mathcal{E}, W^2) можно выделить три характерные области: квазиметаллическую ($|\gamma| \ll 1$), сильно локализованную ($\gamma \gg 1$) и "критическую" ($\gamma \sim 1$). При изменении энергии \mathcal{E} для фиксированной амплитуды W случайного потенциала в распределении кондактансов происходят качественные изменения, напоминающие сглаженный переход Андерсона. В пределе $W \rightarrow 0$ возникает настоящий фазовый переход.

локализованного режима, когда зависимость ρ от L экспоненциальна, так что $\ln \rho \propto L \propto n$ и каждый рассеиватель дает мультипликативный вклад в сопротивление. Поскольку сами по себе идеальные контакты не приводят к диссипации, то их вклад в сопротивление обусловлен лишь границами раздела, который в экспоненциальном режиме является мультипликативным и влияет на коэффициент пропорциональности в (4). Последний при изменении k меняется от единицы (при $k = \kappa$) до бесконечности, так что влияние идеальных контактов оказывается очень существенным.

Уже из сказанного ясно, что в общем случае ситуация нетривиальна и вклад границ раздела не является ни аддитивным, ни мультипликативным (разд.8). Кроме того, кондактанс конечной системы является сильно флуктуирующей величиной [25, 26] и нужно рассматривать его функцию распределения. Зависимость же последней от граничных условий проявляется уже в металлическом режиме, где она может быть исследована как аналитически [27, 28], так и численно [29].

Зависимость распределения кондактансов одномерной системы от свойств идеальных контактов подробно исследована ниже (разд.6). Отметим некоторые простые утверждения.

1. При больших L для $P(\rho)$ справедливо логнормальное распределение

$$P(\rho) = \frac{1}{\rho\sqrt{4\pi t}} \exp \left\{ -\frac{[\ln \rho - (2\gamma + 1)t]^2}{4t} \right\}, \quad t = \tilde{\alpha}L, \quad (5)$$

в которое входит предельное значение γ при $L \rightarrow \infty$. Оно является решением уравнения (2) при больших ρ , когда $1 + 2\rho \approx 2\rho$, $\rho(1 + \rho) \approx \rho^2$. Параметры $\tilde{\alpha}$ и γ устанавливаются (разд.5) путем исследования эволюции вторых и четвертых моментов для элементов трансфер-матрицы (разд.4); они определяются внутренними свойствами исследуемой системы и не зависят от свойств идеальных контактов. Последние оказывают влияние лишь на абсолютный масштаб кондактанса.

2. Для уровня Ферми в глубине запрещенной зоны (Рис.2,в) последнее утверждение справедливо и за пределами логнормальной области: идеальные контакты не влияют на форму распределения $P(\rho)$, но изменяют абсолютный масштаб ρ на постоянный множитель,

$$P(\rho) \rightarrow AP(A\rho), \quad A = 1/\Delta_2^2, \quad (6)$$

где параметр Δ_2 определен ниже в формуле (9).

3. В критической области ситуация усложняется: идеальные контакты изменяют лишь общий масштаб кондактанса, но значение параметра A в (6) различно в логнормальном режиме и области не слишком больших L . В последнем случае при "естественных" идеальных контактах (Рис.2,а) реализуется распределение

$$P(\rho) = \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \frac{\rho^\gamma \exp\{-\rho/t\}}{t^{\gamma+1}}, \quad (7)$$

которое является решением уравнения (2) при малых ρ , когда $1 + 2\rho \approx 1$, $\rho(1 + \rho) \approx \rho$. В критической области реализуется значение $\gamma = -1/2$, а параметр A формуле (6) равен $1/(\Delta_2 - \Delta_1)^2$, где Δ_1 и Δ_2 определены в (9).

4. В глубине разрешенной зоны ситуация еще более усложняется и идеальные контакты изменяют всю функцию распределения в области не слишком больших L . Если для "естественных" контактов (Рис.2,а) реализуется распределение (7) с $\gamma = 0$, то при введении чужеродных контактов (Рис.2,б) его форма существенно изменяется. В частности, при формальном пределе $L \rightarrow 0$ возникает универсальное распределение¹

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho(\rho_c - \rho)}} \Theta(\rho_c - \rho), \quad (8)$$

¹ Подчеркнем, что речь идет именно о формальном пределе $L \rightarrow 0$, так как фактически применимость результатов (7) и (8) ограничена условием $L \gtrsim 1/\kappa$.

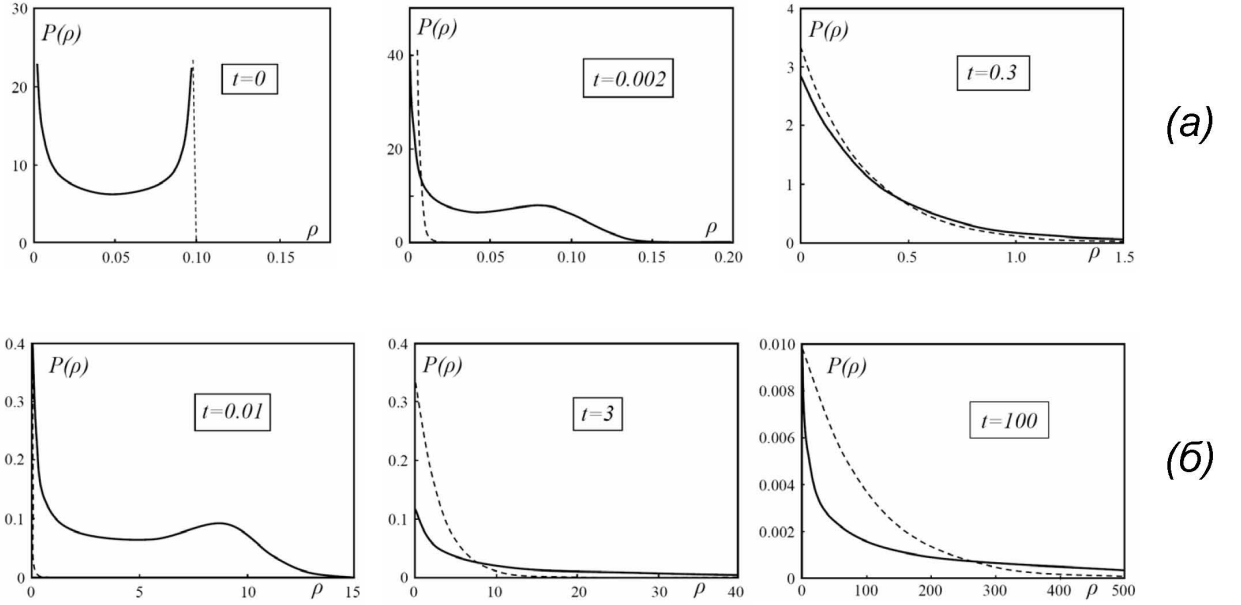


Рис. 5: Эволюция распределения $P(\rho)$ в металлическом режиме: (а) для слабого ($\Delta_1^2 = 0.1$) и (б) сильного ($\Delta_1^2 = 10$) различия уровней Ферми в изучаемом образце и идеальных контактах. Штриховой линией показано распределение (7) с $\gamma = 0$.

эволюция которого при увеличении L показана на Рис.5,а и Рис.5,б; последние различаются значениями параметров

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\kappa} - \frac{\kappa}{k} \right), \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\kappa} + \frac{\kappa}{k} \right). \quad (9)$$

Параметры (9) определены для запрещенной зоны, но в разрешенной зоне сохраняют тот же вид, если формально положить $\bar{k} = \kappa$ для фермиевского импульса \bar{k} изучаемой системы; они связаны соотношением

$$\Delta_2^2 - \Delta_1^2 = 1, \quad (10)$$

которое имеет принципиальное значение для сохранения нормировки. В дальнейшем мы считаем Δ_1 свободным параметром, изменяющимся от $-\infty$ до ∞ , тогда как положительный параметр Δ_2 определяется соотношением (10).

Среднее значение ρ в одномерных системах, как правило, не репрезентативно, но при этом вполне наблюдаемо (разд.8). Его эволюция допускает полное описание при произвольных L , что позволяет наглядно продемонстрировать влияние идеальных контактов. При изменении L как $\langle \rho \rangle$, так и высшие моменты, могут испытывать осцилляции с несоизмеримыми периодами, что обеспечит аперриодический характер осцилляций ρ для конкретного образца (разд.8).

2. Различные виды трансфер-матриц

Использование трансфер-матриц является естественным методом для исследования одномерных систем. Наиболее удобна трансфер-матрица T в волновом представлении, связывающая амплитуды

волн слева ($Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$) и справа ($Ce^{ikx} + De^{-ikx}$) от рассеивателя:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Она определяется амплитудами прохождения (t) и отражения (r) и при наличии инвариантности относительно обращения времени допускает параметризацию [1]

$$T = \begin{pmatrix} 1/t & -r/t \\ -r^*/t^* & 1/t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho+1} e^{i\varphi} & \sqrt{\rho} e^{i\theta} \\ \sqrt{\rho} e^{-i\theta} & \sqrt{\rho+1} e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $\rho = |r/t|^2$ — сопротивление по Ландауэру [2]. При последовательном расположении рассеивателей их трансфер-матрицы перемножаются. Для слабого рассеивателя матрица T близка к единичной, что позволяет выводить дифференциальные уравнения эволюции для ее элементов и для ландауэровского сопротивления ρ .

Для энергии внутри запрещенной зоны решения слева ($Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$) и справа ($Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$) от рассеивателя являются суперпозицией растущей и затухающей экспонент и могут быть связаны псевдо-трансфер-матрицей

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (13)$$

для которой не справедлива параметризация (12) и не очевидна связь с ландауэровским сопротивлением. Элементы матрицы \mathcal{T} действительны, а ее детерминант равен единице, как и в случае (12).

Наконец, можно ввести трансфер-матрицу в координатном представлении, что удобно продемонстрировать для одномерной модели Андерсона, определяемой дискретным уравнением Шредингера

$$\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} + V_n \Psi_n = E \Psi_n, \quad (14)$$

где E — энергия, отсчитанная от центра зоны, а интеграл перекрытия принят за единицу. Перепишывая (14) в виде

$$\begin{pmatrix} \Psi_{n+1} \\ \Psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_n \\ \Psi_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

и итерируя n раз, легко получить

$$\begin{pmatrix} \Psi_{n+1} \\ \Psi_n \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где матрица τ является произведением n матриц типа (15).

Матрицы T , \mathcal{T} , τ определяются внутренними свойствами системы; каждая из них обладает своим набором достоинств и недостатков (Рис.6). Нетрудно видеть, что эти три матрицы не позволяют получить уравнение эволюции для ρ , применимое при всех энергиях. Матрица T обладает нужными свойствами, но непосредственно применима лишь в разрешенной зоне; в запрещенной зоне ее роль переходит к псевдо-матрице \mathcal{T} , которая не имеет прямой связи с ландауэровским сопротивлением ρ . Матрица τ применима при всех энергиях, но не имеет прямой связи с ρ и не близка к единичной для слабого рассеивателя. Матрицы \mathcal{T} и τ состоят из действительных элементов, что дает некоторые технические преимущества².

Для преодоления указанных трудностей определим "внешнюю" трансфер-матрицу \tilde{T} , которая учитывает наличие чужеродных контактов (Рис.2,б) и связана с матрицей T изучаемой системы с помощью краевых матриц T_a и T_b :

$$\tilde{T} = T_a T T_b = \begin{pmatrix} a & a_1 \\ a_1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & b_1 \\ b_1 & b \end{pmatrix} \quad (17)$$

² В частности, исследование эволюции четвертых моментов для матриц с комплексными элементами представляется практически нереальным, так как требует диагонализации матрицы большого размера.

Матрица T		Матрица \mathcal{T}	
Недостатки	Достоинства	Недостатки	Достоинства
Ограничена разрешенной зоной	<p style="text-align: center;">Определяется внутренними свойствами системы</p> <p style="text-align: center;">Прямая связь с ρ</p> <p style="text-align: center;">Близка к единичной для слабого рассеивателя</p>	<p style="text-align: center;">Ограничена запрещенной зоной</p> <p style="text-align: center;">Нет прямой связи с ρ</p>	<p style="text-align: center;">Определяется внутренними свойствами системы</p> <p style="text-align: center;">Близка к единичной для слабого рассеивателя</p> <p style="text-align: center;">Действительные матричные элементы</p>
Матрица τ		Матрица \tilde{T}	
Недостатки	Достоинства	Недостатки	Достоинства
<p style="text-align: center;">Нет прямой связи с ρ</p> <p style="text-align: center;">Не близка к единичной для слабого рассеивателя</p>	<p style="text-align: center;">Определяется внутренними свойствами системы</p> <p style="text-align: center;">Применима при всех энергиях</p> <p style="text-align: center;">Действительные матричные элементы</p>	<p style="text-align: center;">Зависит от идеальных контактов</p>	<p style="text-align: center;">Применима при всех энергиях</p> <p style="text-align: center;">Прямая связь с ρ</p> <p style="text-align: center;">Близка к единичной для слабого рассеивателя</p>

Рис. 6: Достоинства и недостатки различных трансфер-матриц.

$$a = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{k}}{k} \right), \quad a_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{k}}{k} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{\bar{k}} \right), \quad b_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k}{\bar{k}} \right).$$

Краевые матрицы имеют простой смысл: например T_a связывает амплитуды волн слева от границы раздела ($Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$) с амплитудами волн справа от нее ($A_1e^{i\bar{k}x} + B_1e^{-i\bar{k}x}$). Очевидно $T_a T_b = 1$, т.е. краевые матрицы являются взаимно обратными.

Для энергии внутри запрещенной зоны (Рис.2,в) явное введение идеальных контактов является необходимым и также осуществляется путем использования краевых матриц, позволяющих превратить псевдо-матрицу \mathcal{T} в истинную трансфер-матрицу \tilde{T} :

$$\tilde{T} = T_a \mathcal{T} T_b = \begin{pmatrix} a & a^* \\ a^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & b^* \\ b^* & b \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$a = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\kappa}{ik} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ik}{\kappa} \right).$$

Соотношения (18) получаются из (17) заменой $\bar{k} \rightarrow -i\kappa$.

Использование краевых матриц позволяет связать также \tilde{T} и τ

$$\tilde{T} = \frac{1}{2i \sin ka_0} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-ika_0} \\ -1 & e^{ika_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ika_0} & e^{-ika_0} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где a_0 — межатомное расстояние для модели (14). Таким образом, явное введение идеальных контактов приводит к линейному преобразованию элементов трансфер-матрицы. Линейное преобразование не изменяет показателей роста для вторых и четвертых моментов, которые определяются внутренними свойствами системы и не зависят от идеальных контактов (разд.4). Как ясно из Рис.6, матрица \tilde{T} обладает всеми необходимыми свойствами, но содержит зависимость от идеальных контактов; последнее можно считать недостатком, но фактически это отражение объективной реальности.

3. Последовательность точечных рассеивателей

Коэффициенты $\tilde{\alpha}$, γ_1 , γ_2 уравнения (3) не являются постоянными и испытывают изменения в процессе эволюции. Чтобы получить представление об этой эволюции, рассмотрим последовательность из точечных рассеивателей. Для определенности будем рассматривать модель Андерсона (14) вблизи края зоны, где она соответствует дискретизации обычного уравнения Шредингера.

Нетрудно проверить, что точечному рассеивателю с потенциалом $V\delta_{n0}$ соответствует трансфер-матрица

$$\begin{pmatrix} 1 - i\epsilon & -i\epsilon \\ i\epsilon & 1 + i\epsilon \end{pmatrix}, \quad \text{где } \epsilon = \frac{V}{2ka_0}. \quad (20)$$

Если два точечных рассеивателя с амплитудами V_0 и V_1 находятся на расстоянии L , то они описываются трансфер-матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 - i\epsilon_0 & -i\epsilon_0 \\ i\epsilon_0 & 1 + i\epsilon_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ikL} & 0 \\ 0 & e^{ikL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon_1 & -i\epsilon_1 \\ i\epsilon_1 & 1 + i\epsilon_1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Наконец, если рассеиватели с амплитудами $V_0, V_1, V_2, \dots, V_n$ находятся в точках $0, L_1, L_1 + L_2, \dots$, то соответствующая трансфер-матрица имеет вид

$$T^{(n)} = T_{\epsilon_0} T_{\delta_1} T_{\epsilon_1} T_{\delta_2} T_{\epsilon_2} \dots T_{\delta_n} T_{\epsilon_n}, \quad (22)$$

где

$$T_{\epsilon_s} = \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon_s & -i\epsilon_s \\ i\epsilon_s & 1 + i\epsilon_s \end{pmatrix}, \quad T_{\delta_s} = \begin{pmatrix} e^{-i\delta_s} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_s} \end{pmatrix}, \quad \epsilon_s = \frac{V_s}{2ka_0}, \quad \delta_s = kL_s. \quad (23)$$

При изменении числа рассеивателей на единицу справедливо рекуррентное соотношение

$$T^{(n)} = T^{(n-1)} \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ v_n^* & u_n^* \end{pmatrix}, \quad u_n = (1 - i\epsilon_n) e^{-i\delta_n}, \quad v_n = -i\epsilon_n e^{-i\delta_n}. \quad (24)$$

Для удобства будем полагать $\epsilon_0 = 0$, чтобы в качестве начального условия для $T^{(0)}$ использовать единичную матрицу. Если все ϵ_n малы, то при не слишком больших n можно ограничиться двумя первыми порядками по v_n ; произведя прямое перемножение матриц, получим

$$T_{11}^{(n)} = u_1 u_2 \dots u_n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n u_1 u_2 \dots u_{i-1} v_i u_{i+1}^* \dots u_{j-1}^* v_j^* u_{j+1} \dots u_n, \quad (25)$$

$$T_{12}^{(n)} = \sum_{i=1}^n u_1 u_2 \dots u_{i-1} v_i u_{i+1}^* \dots u_n^*$$

и $T_{21} = T_{12}^*$, $T_{22} = T_{11}^*$.

В модели Андерсона (14) рассеиватели находятся на каждом узле решетки, поэтому все δ_s одинаковы, $\delta_s = ka_0$. Выражения (25) можно привести к виду

$$T_{11}^{(n)} = \sqrt{1 + S_1^2 + S_2^2} e^{-iS - in\delta}, \quad T_{12}^{(n)} = S_1 - iS_2, \quad (26)$$

где в низшем порядке по ϵ имеем

$$S = \sum_{s=1}^n \epsilon_s, \quad S_1 = \sum_{s=1}^n \epsilon_s \sin(n-2s)\delta, \quad S_2 = \sum_{s=1}^n \epsilon_s \cos(n-2s)\delta. \quad (27)$$

Принимая как обычно для модели Андерсона

$$\langle V_n \rangle = 0, \quad \langle V_n^2 \rangle = W^2, \quad (28)$$

получим нулевые средние значения для всех сумм в (27), тогда как для вторых моментов

$$\langle S^2 \rangle = 2\langle S_1^2 \rangle = 2\langle S_2^2 \rangle = \epsilon^2 n, \quad \langle SS_1 \rangle \sim \langle SS_2 \rangle \sim \langle S_1 S_2 \rangle \sim \epsilon^2, \quad (29)$$

где $\epsilon^2 = W^2/4k^2 a_0^2$. Приведенные выражения верны при условии

$$1/\delta \ll n \ll 1/\epsilon^2, \quad (30)$$

где левое неравенство обеспечивает большое число осцилляций синуса и косинуса в суммах (27), а правое необходимо для возможности пренебрежения высшими порядками по ϵ . При больших n все суммы в (27) распределены по Гауссу и имеют совместное распределение вероятностей

$$P(S, S_1, S_2) \sim \exp \left\{ -\frac{S^2}{2n\epsilon^2} - \frac{S_1^2}{n\epsilon^2} - \frac{S_2^2}{n\epsilon^2} \right\}. \quad (31)$$

Учитывая, что $\rho = S_1^2 + S_2^2$, $\varphi = -S - n\delta$, имеем распределение вероятностей для параметров трансформации (12)

$$P(\rho, \varphi, \theta) \sim \exp \left\{ -\frac{(\varphi + n\delta)^2}{2n\epsilon^2} - \frac{\rho}{n\epsilon^2} \right\}. \quad (32)$$

Мы видим, что при $\delta \gg \epsilon^2$, т.е. в глубине разрешенной зоны, фаза θ полностью стохастизируется на масштабе $n \sim 1/\delta$. Стохастизация фазы φ происходит на масштабе $n \sim 1/\epsilon^2$, но ее равномерное распределение возникает уже на масштабе $1/\delta$ за счет регулярных изменений. Так или иначе, стохастизации θ достаточно для применимости приближения случайных фаз и исчезновения параметра γ , так как в уравнение эволюции входит лишь комбинация $\psi = \theta - \varphi$ (см. разд.7). Решение уравнения (2) при малых ρ имеет вид (7), который согласуется с (32) при $\gamma = 0$ и $t = \epsilon^2 n$; справедливость последних соотношений следует из формул (93) раздела 7. При больших n экспоненциальный рост элементов T_{ij} определяется произведением $|u_1| |u_2| \dots |u_n| \equiv e^{w_n}$, которое содержится как во всех членах (25), так и членах высших порядков. Величина w_n имеет среднее значение $\epsilon^2 n/2$, что (ввиду $\rho = |T_{12}|^2$) согласуется с результатом $a = \epsilon^2$ для параметра a в логнормальном распределении (разд. 5). Отброшенные члены не дают вкладов $O(\epsilon^2)$ в среднее значение величины w_n , но изменяют ее дисперсию.

Изложенное справедливо в глубине разрешенной зоны при "естественных" идеальных контактах (Рис.2,а). При переходе в запрещенную зону имеем $T^{(n)} = T_a \mathcal{T}^{(n)} T_b$, где псевдо-матрица $\mathcal{T}^{(n)}$ определяется теми же соотношениями, что и выше, с заменой $k \rightarrow -ik$; в частности

$$\mathcal{T}^{(n)} = \mathcal{T}^{(n-1)} \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ v_n^* & u_n^* \end{pmatrix}, \quad u_n = (1 + \epsilon_n) e^{-\delta_n}, \quad v_n = \epsilon_n e^{-\delta_n}, \quad (33)$$

$$\epsilon_n = V_n/2\kappa a_0, \quad \delta_n = \kappa L_n,$$

где звездочка отмечает не комплексное сопряжение, а изменение знаков ϵ_n и δ_n . С учетом этой модификации соотношения (25) формально сохраняются; вынося из сумм множитель $u_1^* u_2^* \dots u_n^* \equiv \exp(w_n)$, имеем

$$\mathcal{T}^{(n)} = \begin{pmatrix} e^{-\tilde{w}_n} - e^{\tilde{w}_n} S_1 S_2 & e^{\tilde{w}_n} S_1 \\ -e^{\tilde{w}_n} S_2 & e^{\tilde{w}_n} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \sum_{s=1}^n \epsilon_s e^{-2s\delta}, \quad S_2 = \sum_{s=0}^{n-1} \epsilon_{n-s} e^{-2s\delta}, \quad (34)$$

где \tilde{w}_n отличается от w_n на вклад $O(\epsilon^2)$ с нулевым средним, а S_1 и S_2 приведены в низшем порядке по ϵ . Подстановка в (18) дает для фазовых переменных

$$\text{tg}\varphi = -\Delta_1 - \Delta_2(S_1 + S_2), \quad \text{ctg}\theta = \frac{(S_1 - S_2)}{\Delta_2}, \quad (35)$$

где Δ_1 и Δ_2 определены в (9). Замечая, что при условии (30)

$$\langle S_1^2 \rangle = \langle S_2^2 \rangle = \epsilon^2/4\delta, \quad \langle S_1 S_2 \rangle \approx 0, \quad (36)$$

видим, что флуктуации φ и θ являются ограниченными и не возрастают с увеличением n . Случай $k = \kappa$ является особым; при этом $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 1$, так что

$$\varphi = -(S_1 + S_2), \quad \theta = \pi/2 + (S_2 - S_1), \quad (37)$$

и переменная $\psi = \theta - \varphi$ не имеет существенной эволюции, оставаясь локализованной вблизи $\pi/2$ при всех $n \lesssim 1/\epsilon^2$. Как мы увидим в разд.7, это свойство сохраняется и при $n \gtrsim 1/\epsilon^2$. При больших n экспонента $e^{\tilde{w}n}$ обеспечивает рост элементов t_{ij} и соответственно $\rho \sim e^{2\tilde{w}n}$; величина $2\tilde{w}n$ имеет среднее значение $(2\delta - \epsilon^2)n$ и дисперсию $4\epsilon^2n$, что согласуется с результатами (56) разд.5.

Перейдем к критической области, определяемой условием $\delta \ll \epsilon^2$. Тогда при достаточно малых n можно положить $\delta_s = 0$ в (23) и получить

$$T^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 - iS & -iS \\ iS & 1 + iS \end{pmatrix}, \quad S = \sum_{s=1}^n \epsilon_s, \quad (38)$$

где сумма S распределена по Гауссу аналогично (31). Совместное распределение ρ, φ, θ определяется соотношением

$$P(\rho, \varphi, \theta) = \int dS \frac{1}{\sqrt{2\pi n \epsilon^2}} \exp\left(-\frac{S^2}{2n\epsilon^2}\right) \delta(\rho - S^2) \delta(\varphi + \arctg S) \delta\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad (39)$$

и интегрирование по φ и θ приводит к результату

$$P(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n \epsilon^2}} \exp\left(-\frac{\rho}{2n\epsilon^2}\right), \quad (40)$$

что согласуется с (7) при $\gamma = -1/2$, $t = 2n\epsilon^2$; последнее следует из формулы (93) разд.7 при условии локализации ψ вблизи $\pm\pi/2$. Такая локализация действительно имеет место при малых ρ , когда $\varphi \sim \sqrt{\rho} \ll 1$, $\theta = -\pi/2$, а (40) является решением уравнения (2). Однако, результат (40) справедлив в более широкой области $n \lesssim (\epsilon^2\delta^2)^{-1/3}$ (разд.8), когда $\rho \sim n\epsilon^2$ может быть велико; при этом φ локализуется вблизи $\pm\pi/2$, а $\sin \psi$ становится малым в соответствии с результатами для логнормального режима (разд.5, 7).

4. Эволюция моментов

Согласно (33), для элементов псевдо-трансфер-матрицы в запрещенной зоне справедливы уравнения эволюции

$$\begin{aligned} t_{11}^{(n)} &= u_n t_{11}^{(n-1)} + v_n^* t_{12}^{(n-1)} \\ t_{12}^{(n)} &= v_n t_{11}^{(n-1)} + u_n^* t_{12}^{(n-1)} \end{aligned} \quad (41)$$

и такие же уравнения для $t_{21}^{(n)}$ и $t_{22}^{(n)}$; существенно, что $t_{ij}^{(n-1)}$ не содержат ϵ_n и статистически независимы от u_n, v_n . Вводя обозначения для вторых моментов

$$z_1^{(n)} = \left\langle [t_{11}^{(n)}]^2 \right\rangle, \quad z_2^{(n)} = \left\langle t_{11}^{(n)} t_{12}^{(n)} \right\rangle, \quad z_3^{(n)} = \left\langle [t_{12}^{(n)}]^2 \right\rangle, \quad (42)$$

получим систему линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{pmatrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \\ z_3^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\delta + \epsilon^2 & -2\epsilon^2 & \epsilon^2 \\ \epsilon^2 & 1 - 2\epsilon^2 & \epsilon^2 \\ \epsilon^2 & -2\epsilon^2 & 1 + 2\delta + \epsilon^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} \\ z_2^{(n-1)} \\ z_3^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad (43)$$

решение которой ищется в экспоненциальной форме, $z_i^{(n)} \sim \lambda^n$ [30]; нетрудно видеть, что λ есть собственное значение матрицы в (43). Полагая $\lambda = 1 + x$, получим уравнение для определения x

$$x(x^2 - 4\delta^2) = 8\epsilon^2\delta^2. \quad (44)$$

В (43), (44) мы имеем в виду предел

$$\delta \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \delta/\epsilon^2 = \text{const}, \quad (45)$$

актуальный вблизи края зоны идеального кристалла, когда несущественны эффекты соизмеримости [32, 33], затрудняющие анализ; поэтому в матрице (43) мы сохраняем члены первого порядка по δ и второго по ϵ .

Аналогично для четвертых моментов положим

$$\begin{aligned} z_1^{(n)} &= \left\langle [t_{11}^{(n)}]^4 \right\rangle, & z_2^{(n)} &= \left\langle [t_{11}^{(n)}]^3 t_{12}^{(n)} \right\rangle, & z_3^{(n)} &= \left\langle [t_{11}^{(n)}]^2 [t_{12}^{(n)}]^2 \right\rangle, \\ z_4^{(n)} &= \left\langle t_{11}^{(n)} [t_{12}^{(n)}]^3 \right\rangle, & z_5^{(n)} &= \left\langle [t_{12}^{(n)}]^4 \right\rangle, \end{aligned} \quad (46)$$

и получим систему разностных уравнений

$$\begin{pmatrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \\ z_3^{(n)} \\ z_4^{(n)} \\ z_5^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4\delta + 6\epsilon^2 & -12\epsilon^2 & 6\epsilon^2 & 0 & 0 \\ 3\epsilon^2 & 1 - 2\delta - 3\epsilon^2 & -3\epsilon^2 & 3\epsilon^2 & 0 \\ \epsilon^2 & 2\epsilon^2 & 1 - 6\epsilon^2 & 2\epsilon^2 & \epsilon^2 \\ 0 & 3\epsilon^2 & -3\epsilon^2 & 1 + 2\delta - 3\epsilon^2 & 3\epsilon^2 \\ 0 & 0 & 6\epsilon^2 & -12\epsilon^2 & 1 + 4\delta + 6\epsilon^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} \\ z_2^{(n-1)} \\ z_3^{(n-1)} \\ z_4^{(n-1)} \\ z_5^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad (47)$$

Принимая $z_i^{(n)} \sim \lambda^n$ и полагая $\lambda = 1 + x$, получим уравнение для x

$$x(x^2 - 4\delta^2)(x^2 - 16\delta^2) = 24\epsilon^2(7\delta^2x^2 - 16\delta^4). \quad (48)$$

Заметим, что уравнения (44) и (48) можно получить, составляя произведение диагональных элементов в матрицах (43), (47) и ограничиваясь вторым порядком по ϵ . Дело в том, что недиагональные элементы вносят в детерминант вклады $O(\epsilon^4)$ и выше, сокращение которых можно предвидеть заранее. Поскольку $\epsilon^2 = W^2/4\delta^2$ (см. разд.3), то комбинации $\epsilon^2, \epsilon^4, \dots, \epsilon^{10}$ и $\delta^2\epsilon^4, \delta^2\epsilon^6$ имеют сингулярности при $\delta \rightarrow 0$, отсутствие которых очевидно из уравнений эволюции для координатной трансфер-матрицы (см. Приложение 1); допустимы лишь комбинации $\delta^2\epsilon^2$ и $\delta^4\epsilon^2$, которые и входят в уравнения (44) и (48).³ В глубине разрешенной и запрещенной зон возможность ограничения диагональными элементами позволяет установить показатели роста для высших моментов и убедиться в их соответствии логнормальному распределению.

Для модели Андерсона (14) имеем $\delta^2 = -\mathcal{E}$, $4\epsilon^2\delta^2 = W^2$, где \mathcal{E} — энергия, отсчитанная от нижнего края зоны; поэтому уравнения (44), (48) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} x(x^2 + 4\mathcal{E}) &= 2W^2 \\ x(x^2 + 4\mathcal{E})(x^2 + 16\mathcal{E}) &= 42W^2x^2 + 96W^2\mathcal{E}. \end{aligned} \quad (49)$$

Уравнения (49) получены при $\mathcal{E} < 0$, но ввиду регулярности по \mathcal{E} могут быть аналитически продолжены на произвольные \mathcal{E} . Эти уравнения можно также вывести, рассматривая эволюцию координатной

³ Выше мы перечислили все возможные комбинации. Действительно, изменение знака δ в (43), (47) приводит к аналогичным матрицам, которые приводятся к прежнему виду, если переименовать компоненты столбцов в обратном порядке; поэтому нечетных степеней δ не возникает. Поскольку мы рассматриваем предел $\delta \sim \epsilon^2 \rightarrow 0$ (см.(45)), то возможны лишь комбинации $\delta^{2n}\epsilon^{2m}$ с $4n + 2m \leq 6$ в случае (43) и с $4n + 2m \leq 10$ в случае (47); из них лишь комбинации с $n \geq m$ не имеют сингулярностей при $\delta \rightarrow 0$.

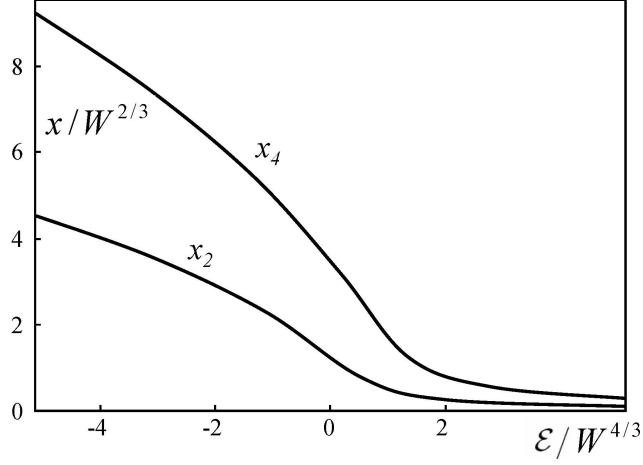


Рис. 7: Положительный корень первого (x_2) и второго (x_4) уравнения (49) как функция энергии \mathcal{E} в приведенных координатах.

трансфер-матрицы (см. Приложение 1), которая применима при произвольных \mathcal{E} и не требует аналитического продолжения. Один из корней для каждого из уравнений (49) остается положительным при всех физических значениях параметров; среди всех корней уравнения он имеет максимальную действительную часть и определяет показатель роста для вторых (x_2) или четвертых (x_4) моментов. Поведение x_2 и x_4 как функции $\mathcal{E}/W^{4/3}$ показано на Рис.7.

Нетрудно получить асимптотики для x_2 и x_4 . В глубине запрещенной зоны ($\delta \gg \epsilon^2$) имеем из (44), (48)

$$x_2 = 2\delta + \epsilon^2, \quad x_4 = 4\delta + 6\epsilon^2. \quad (50a)$$

При переходе в разрешенную зону в (44), (48) происходит замена $\delta \rightarrow i\delta$, $\epsilon \rightarrow -i\epsilon$, после чего в глубине зоны ($\delta \gg \epsilon^2$) получим

$$x_2 = 2\epsilon^2, \quad x_4 = 6\epsilon^2. \quad (50b)$$

В критической же области ($\delta \ll \epsilon^2$) справедливы результаты

$$x_2 = 2(\epsilon^2\delta^2)^{1/3}, \quad x_4 = 2(21\epsilon^2\delta^2)^{1/3}. \quad (50c)$$

В терминах \mathcal{E} и W имеем

$$\begin{aligned} x_2 &= 2|\mathcal{E}|^{1/2} + W^2/4|\mathcal{E}|, & x_4 &= 4|\mathcal{E}|^{1/2} + 3W^2/2|\mathcal{E}|, & -\mathcal{E} &\gg W^{4/3} \\ x_2 &= (2W^2)^{1/3}, & x_4 &= (42W^2)^{1/3}, & |\mathcal{E}| &\ll W^{4/3} \\ x_2 &= W^2/2\mathcal{E} - W^6/32\mathcal{E}^4, & x_4 &= 3W^2/2\mathcal{E} + 27W^6/64\mathcal{E}^4, & \mathcal{E} &\gg W^{4/3}, \end{aligned} \quad (51)$$

где последний результат приведен с более высокой точностью.

5. Параметры логнормального распределения

При больших $L = na_0$ для $P(\rho)$ справедливо логнормальное распределение

$$P(\rho) = \frac{1}{\rho\sqrt{2\pi bn}} \exp\left\{-\frac{(\ln \rho - an)^2}{2bn}\right\}, \quad (52)$$

которое для частных случаев получено во многих работах ([1], [13]–[18], [21]–[24]) и наиболее общим образом следует из модифицированного уравнения Дорохова–Мелло–Перейра–Кумара [31]; при наличии чужеродных контактов оно выводится в разд.7. Нетрудно найти моменты для распределения (52), $\langle \rho^m \rangle = e^{amn+bm^2n/2}$. Поскольку ρ определяется выражением, квадратичным по элементам трансфер-матрицы, то параметры a и b могут быть установлены из сопоставления с ростом вторых и четвертых моментов

$$\begin{aligned}\langle \rho \rangle &= e^{an+\frac{1}{2}bn} = C_1 e^{x_2 n}, \\ \langle \rho^2 \rangle &= e^{2an+2bn} = C_2 e^{x_4 n}.\end{aligned}\quad (53)$$

Легко видеть, что

$$a = 2x_2 - \frac{1}{2}x_4, \quad b = x_4 - 2x_2, \quad (54)$$

тогда как для параметра γ в (5)

$$\gamma = \frac{a}{b} - \frac{1}{2} = \frac{3x_2 - x_4}{x_4 - 2x_2}. \quad (55)$$

Подстановка асимптотик (50) дает

$$\begin{aligned}a &= 2\delta - \epsilon^2, \quad b = 4\epsilon^2 \quad (\text{запрещенная зона}) \\ a &= \epsilon^2, \quad b = 2\epsilon^2 \quad (\text{разрешенная зона}) \\ a &= 1.24(\epsilon^2\delta^2)^{1/3}, \quad b = 1.52(\epsilon^2\delta^2)^{1/3} \quad (\text{критическая область})\end{aligned}\quad (56)$$

Использование асимптотик (51) дает для параметра γ в (5)

$$\gamma = \begin{cases} 2|\mathcal{E}|^{3/2}/W^2, & -\mathcal{E} \gg W^{4/3} \\ 0.316, & |\mathcal{E}| \ll W^{4/3} \\ -33W^4/32\mathcal{E}^3, & \mathcal{E} \gg W^{4/3} \end{cases}, \quad (57)$$

тогда как параметр $\tilde{\alpha}$ связан с b соотношением $\tilde{\alpha} = b/2a_0$.

Как показано в разд.2, введение чужеродных контактов приводит к линейному преобразованию элементов трансфер-матрицы, которое не влияет на показатели роста x_2 и x_4 для вторых и четвертых моментов. По этой причине последние не зависят от свойств идеальных контактов, так же, как и связанные с ними параметры a , b , γ . От идеальных контактов зависят лишь коэффициенты C_1 и C_2 в (53), что изменяет абсолютный масштаб кондактанса и начало отсчета n .

6. Зависимость $P(\rho)$ от идеальных контактов

Согласно (12) для элементов трансфер-матрицы в волновом представлении справедливы соотношения $T_{22} = T_{11}^*$, $T_{21} = T_{12}^*$, которые следуют из инвариантности относительно обращения времени; поэтому достаточно рассматривать элементы

$$T_{11} = x + iy, \quad T_{12} = z + i\omega. \quad (58)$$

Если известно распределение $P(\rho, \varphi, \theta)$ параметров матрицы (12), то функция распределения x, y, z, ω составляется по правилу

$$\begin{aligned}P_1(x, y, z, \omega) &= \int d\rho d\varphi d\theta P(\rho, \varphi, \theta) \delta\left(x - \sqrt{1+\rho} \cos \varphi\right) \delta\left(y - \sqrt{1+\rho} \sin \varphi\right) \\ &\quad \cdot \delta\left(z - \sqrt{\rho} \cos \theta\right) \delta\left(\omega - \sqrt{\rho} \sin \theta\right).\end{aligned}\quad (59)$$

Полагая $\rho = r^2$, $1+\rho = R^2$ и вводя под интеграл разложение единицы

$$1 = \int dR^2 \delta(R^2 - r^2 - 1), \quad (60)$$

нетрудно получить связь $P_1(x, y, z, \omega)$ с $P(\rho, \varphi, \theta)$:

$$P_1(x, y, z, \omega) = P\left(z^2 + \omega^2, \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}, \operatorname{Arctg}\frac{\omega}{z}\right) \cdot 4\delta(x^2 + y^2 - z^2 - \omega^2 - 1). \quad (61)$$

Обратно, если известно распределение $P_1(x, y, z, \omega)$, то оно всегда содержит δ -функцию

$$P_1(x, y, z, \omega) = \tilde{P}(x, y, z, \omega) \cdot 4\delta(x^2 + y^2 - z^2 - \omega^2 - 1). \quad (62)$$

Тогда распределение $P(\rho, \varphi, \theta)$ определяется соотношением

$$P(\rho, \varphi, \theta) = \tilde{P}\left(\sqrt{1+\rho}\cos\varphi, \sqrt{1+\rho}\sin\varphi, \sqrt{\rho}\cos\theta, \sqrt{\rho}\sin\theta\right). \quad (63)$$

Преобразование трансфер-матрицы T при изменении свойств идеальных контактов определяется соотношениями (17), (18), которые могут быть записаны в более компактной форме. Как ясно из вышеизложенного, для ситуации внутри запрещенной зоны случай $k = \kappa$ является выделенным — для него граница раздела имеет максимальную прозрачность (см.(4)), а фаза $\psi = \theta - \varphi$ при всех L локализована вблизи $\pi/2$ (разд.3). Отмечая чертой значения параметров при $k = \kappa$, нетрудно показать, что соотношение (18) может быть записано в виде

$$x = \bar{x}, \quad y = \Delta_2\bar{y} - \Delta_1\bar{\omega}, \quad z = \bar{z}, \quad \omega = -\Delta_1\bar{y} + \Delta_2\bar{\omega}, \quad (64)$$

или в обратную сторону

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \Delta_2y + \Delta_1\omega, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{\omega} = \Delta_1y + \Delta_2\omega, \quad (65)$$

где Δ_1 и Δ_2 определены в (9). Элементы $\bar{T}_{11} = \bar{x} + i\bar{y}$ и $\bar{T}_{12} = \bar{z} + i\bar{\omega}$ определяются лишь параметром κ , т.е. внутренними свойствами изучаемой системы, тогда как вся зависимость от фермиевского импульса k в идеальных контактах содержится в Δ_1 и Δ_2 .

Для ситуации внутри разрешенной зоны выделенным является случай $k = \bar{k}$ (Рис.2,а). Отмечая чертой параметры, соответствующие этому случаю и полагая формально $\bar{k} = \kappa$, нетрудно убедиться, что связь элементов T_{ij} и \bar{T}_{ij} по-прежнему выражается соотношениями (64), (65). Если известно распределение $\bar{P}(\rho, \varphi, \theta)$ для двух указанных базовых ситуаций (полностью определяемое внутренними свойствами системы), то можно перейти к распределению $\bar{P}_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\omega})$ согласно (61), после чего замена переменных (65) определяет распределение $P_1(x, y, z, \omega)$, зависящее от идеальных контактов, а формула (63) определяет $P(\rho, \varphi, \theta)$:

$$\begin{aligned} P(\rho, \varphi, \theta) &= \bar{P}(\rho', \varphi', \theta'), \\ \rho' &= \rho \cos^2 \theta + \left(\Delta_1 \sqrt{1+\rho} \sin \varphi + \Delta_2 \sqrt{\rho} \sin \theta\right)^2, \\ \operatorname{tg} \varphi' &= \frac{\Delta_2 \sqrt{1+\rho} \sin \varphi + \Delta_1 \sqrt{\rho} \sin \theta}{\sqrt{1+\rho} \cos \varphi}, \\ \operatorname{tg} \theta' &= \frac{\Delta_1 \sqrt{1+\rho} \sin \varphi + \Delta_2 \sqrt{\rho} \sin \theta}{\sqrt{\rho} \cos \theta}. \end{aligned} \quad (66)$$

В запрещенной зоне при $k = \kappa$ имеем

$$\bar{P}(\rho, \varphi, \theta) = \bar{P}(\rho) \delta(\varphi) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad (67)$$

где δ -функции нужно уширить на величину порядка ϵ . В пренебрежении этим уширением нетрудно получить, что

$$P(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\Delta_2^2} \bar{P}\left(\frac{\rho}{\Delta_2^2}\right) \delta\left(\varphi + \arcsin \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \sqrt{\frac{\rho}{1+\rho}}\right) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad (68)$$

и интегрирование по φ и θ дает результат (6), т.е. форма распределения ρ не зависит от идеальных контактов, и последние изменяют лишь абсолютный масштаб кондактанса.

В разрешенной зоне при $k = \bar{k}$ (Рис.2,а) распределение $\bar{P}(\rho, \varphi, \theta)$ не зависит от фазовых переменных⁴

$$\bar{P}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \bar{P}(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^2 t} \exp\left(-\frac{\rho}{t}\right), \quad t = \alpha L, \quad (69)$$

и $\bar{P}(\rho)$ определяется формулой (7) при $\gamma = 0$. Для чужеродных контактов (Рис.2,б) распределение ρ определяется интегралом

$$P(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^2 t} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \exp\left\{-\frac{\rho + S(\rho, \varphi, \theta)}{t}\right\}, \quad (70)$$

где

$$S(\rho, \varphi, \theta) = \Delta_1^2(1+\rho) \sin^2 \varphi + 2\Delta_1\Delta_2\sqrt{(1+\rho)\rho} \sin \varphi \sin \theta + \Delta_1^2\rho \sin^2 \theta. \quad (71)$$

Вычисление интеграла (см. Приложение 2) приводит к следующим результатам.

При $\Delta_1^2 \ll 1$ актуальны две области, $t \ll \Delta_1^2$ и $t \gg \Delta_1^2$; в первой из них имеем

$$P(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi\Delta_1^2 t}} \exp\left(-\frac{\rho}{2t}\right), & \rho \lesssim t \\ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho(\rho_c - \rho)}}, & t \lesssim \rho, \quad \rho_c - \rho \gtrsim (t\Delta_1^2)^{1/2} \\ \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho(t\Delta_1^2)^{1/2}}} \Gamma(1/4), & |\rho_c - \rho| \lesssim (t\Delta_1^2)^{1/2} \\ \frac{1}{\pi\sqrt{AB}} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & \rho - \rho_c \gtrsim (t\Delta_1^2)^{1/2} \end{cases}, \quad (72)$$

где

$$S_c = \left(\Delta_1\sqrt{1+\rho} - \Delta_2\sqrt{\rho}\right)^2 \Theta(\rho - \rho_c), \quad \rho_c = \Delta_1^2, \\ A = 2\Delta_1\sqrt{1+\rho} \left(\Delta_2\sqrt{\rho} - \Delta_1\sqrt{1+\rho}\right), \quad B = 2\Delta_1\sqrt{\rho} \left(\Delta_2\sqrt{1+\rho} - \Delta_1\sqrt{\rho}\right), \quad (73)$$

и основная часть вероятности соответствует второму результату (72). Для области $t \gg \Delta_1^2$ получим

$$P(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\rho}{t}\right) \left[1 - \frac{\Delta_1^2}{2t} - \frac{\Delta_1^2\rho}{t} + \frac{\Delta_1^2\Delta_2^2\rho(1+\rho)}{2t^2}\right], & \rho(1+\rho) \lesssim t^2/\Delta_1^2 \\ \frac{1}{\pi\sqrt{AB}} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & \rho(1+\rho) \gtrsim t^2/\Delta_1^2 \end{cases}, \quad (74)$$

и нормировочный интеграл определяется первой асимптотикой. Эволюция распределения при $\Delta_1^2 \ll 1$ показана на Рис.5,а. При малых t она сводится к сглаживанию сингулярностей распределения (8), а при больших t значение $P(\rho)$ при $\rho = 0$ стремится к таковому для распределения $\bar{P}(\rho)$ и форма $P(\rho)$ слабо отличается от последнего.

⁴ Строго говоря, для этого надо усреднить (32) по изменениям n порядка $1/\delta$.

При $\Delta_1^2 \gg 1$ актуальны три области, $t \ll 1$, $1 \ll t \ll \Delta_1^2$ и $t \gg \Delta_1^2$. В первой из них получаются результаты

$$P(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi\Delta_1^2 t}} \exp\left(-\frac{\rho}{2t}\right), & \rho \lesssim t \\ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho(\rho_c - \rho)}}, & t \lesssim \rho, \quad \rho_c - \rho \gtrsim (t\Delta_1^2)^{1/2} \\ \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho(t\Delta_1^2)^{1/2}}} \Gamma(1/4), & |\rho_c - \rho| \lesssim (t\Delta_1^2)^{1/2} \\ \frac{1}{\pi\sqrt{AB}} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & \rho - \rho_c \gtrsim (t\Delta_1^2)^{1/2} \end{cases}, \quad (75)$$

аналогичные (72) и соответствующие размытию сингулярностей распределения (8); при этом основная вероятность соответствует второй асимптотике. В области $1 \ll t \ll \Delta_1^2$ имеем

$$P(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi\Delta_1^2 t}} \exp\left(-\frac{\rho}{2t}\right), & \rho \lesssim 1 \\ \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln \rho, & 1 \lesssim \rho \lesssim t \\ \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln t, & t \lesssim \rho \lesssim \Delta_1^2/t \\ \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln \frac{\Delta_1^2 t}{\rho} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & \Delta_1^2/t \lesssim \rho \lesssim \Delta_1^2 t \\ \frac{1}{\pi\sqrt{AB}} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & \rho \gtrsim \Delta_1^2 t \end{cases} \quad (76)$$

тогда как в области $t \gg \Delta_1^2$

$$P(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\rho}{t}\right) \left[1 - \frac{\Delta_1^2}{2t} - \frac{\Delta_1^2 \rho}{t} + \frac{\Delta_1^2 \Delta_2^2 \rho(1+\rho)}{2t^2}\right], & \rho \lesssim t/\Delta_1^2 \\ \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln \frac{\Delta_1^2 \rho}{t}, & t/\Delta_1^2 \lesssim \rho \lesssim t \\ \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln \frac{\Delta_1^2 t}{\rho} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & t \lesssim \rho \lesssim \Delta_1^2 t \\ \frac{1}{\pi\sqrt{AB}} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & \rho \gtrsim \Delta_1^2 t \end{cases} \quad (77)$$

В обоих случаях основная вероятность сосредоточена на последних двух асимптотиках. Характерной особенностью (76) и (77) является наличие быстрой экспоненты ($\exp(-\rho/2t)$ или $\exp(-\rho/t)$) при малых ρ и медленной экспоненты $\exp(-\rho/\Delta_1^2 t)$ при больших ρ , тогда как в промежуточной области имеется степенное поведение $P(\rho) \propto \rho^{-1/2}$ с точностью до логарифмических поправок. Эволюция распределения при $\Delta_1^2 \gg 1$ показана на Рис.5,б.

Выше мы учли, что результаты зависят лишь от $|\Delta_1|$ (что проверяется заменой $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ в (70,71)) и без ограничения общности можно считать, что $\Delta_1 > 0$. Кроме того, мы предполагали, что распределение (69) задано аксиоматически и не обсуждали условия его применимости: это позволяет лучше понять, как преобразуется распределение ρ за счет идеальных контактов. Фактически распределение (69) является решением уравнения (2) лишь для $\rho \lesssim 1$, что ограничивает применимость (76) и (77) условием $\rho \lesssim \Delta_1^2$.

В логнормальном режиме, возникающим при $t \gg 1$, в качестве $\bar{P}(\rho)$ в (69) нужно подставлять выражение (5) с $\gamma = 0$. При этом типичные значения ρ велики и в формуле (66) можно положить $\rho' = \rho K(\varphi, \theta)$, где

$$K(\varphi, \theta) = \cos^2 \theta + (\Delta_1 \sin \varphi + \Delta_2 \sin \theta)^2. \quad (78)$$

Подстановка в (5), (66), (69) дает

$$\begin{aligned} P(\rho, \varphi, \theta) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\rho K \sqrt{4\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(\ln K \rho - t)^2}{4t} \right\} \approx \\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\rho \sqrt{4\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(\ln \rho - t)^2}{4t} \right\} \left[\frac{1}{K} - \frac{2(\ln \rho - t) \ln K}{4tK} \right], \end{aligned} \quad (79)$$

где мы провели разложение по $1/t$, учитывая, что $(\ln \rho - t) \sim \sqrt{t}$ для основной части распределения. Интегрируя по φ и θ , положим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{K(\varphi, \theta)} \equiv \frac{1}{K_0}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\ln K(\varphi, \theta)}{K(\varphi, \theta)} \equiv \frac{\ln K_1}{K_0}. \quad (80)$$

Тогда сохранение нормировки требует соотношения $K_0 = 1$, после чего $P(\rho)$ записывается в виде

$$P(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\rho \sqrt{4\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(\ln K_1 \rho - t)^2}{4t} \right\}. \quad (81)$$

Равенство $K_0 = 1$ действительно имеет место, что проверяется прямым вычислением интеграла. Мы видим, что идеальные контакты не изменяют параметров логнормального распределения и перенормируют лишь абсолютный масштаб кондактанса, который определяется параметром K_1 (Рис.8):

$$K_1 = \begin{cases} 1 - \Delta_1^2/2, & \Delta_1 \ll 1 \\ \text{const}/\Delta_1^2, & \Delta_1^2 \gg 1 \end{cases}, \quad (82)$$

где численное значение константы близко к 4.

В критической области при достаточно малых n удобно исходить из выражения (38), определяющего распределение $\bar{P}(\rho, \varphi, \theta)$ в виде (39). Преобразование переменных (64) приводит к замене $S \rightarrow S(\Delta_2 - \Delta_1)$ в (38), (39) и перенормировке (6) абсолютного масштаба кондактанса с $A = 1/(\Delta_2 - \Delta_1)^2$ в распределении (40).

7. Уравнение эволюции $P(\rho)$ при наличии идеальных контактов

Согласно разд.3, трансфер-матрица T для системы точечных рассеивателей и "естественных" идеальных контактов (Рис.2,а) имеет вид (22); соответствующие параметры ϵ_s будем отмечать как $\bar{\epsilon}_s$. При введении чужеродных контактов (Рис.2,б) система описывается трансфер-матрицей $\tilde{T} = T_a T T_b$. Вводя между каждыми двумя множителями в (22) произведение $T_b T_a = 1$, имеем

$$\tilde{T}^{(n)} = \tilde{T}_{\epsilon_0} \tilde{T}_{\delta_1} \tilde{T}_{\epsilon_1} \tilde{T}_{\delta_2} \tilde{T}_{\epsilon_2} \dots \tilde{T}_{\delta_n} \tilde{T}_{\epsilon_n}, \quad (83)$$

где

$$\tilde{T}_{\epsilon_s} = T_a T_{\epsilon_s} T_b, \quad \tilde{T}_{\delta} = T_a T_{\delta} T_b. \quad (84)$$

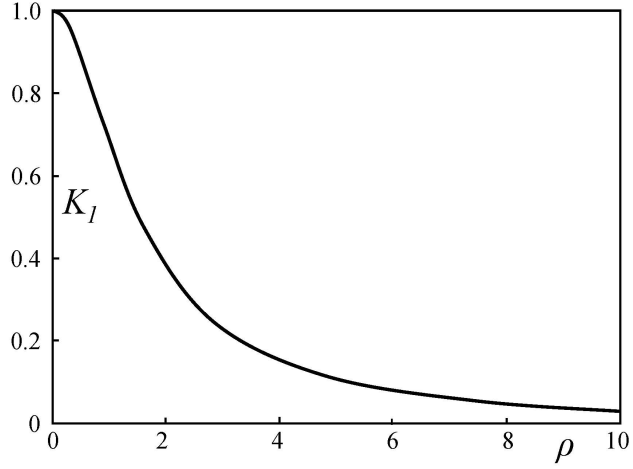


Рис. 8: Зависимость параметра K_1 от Δ_1 .

В разрешенной зоне отличие \tilde{T}_{ϵ_s} от T_{ϵ_s} сводится к перенормировке $\bar{\epsilon}_s \rightarrow \epsilon_s = \bar{\epsilon}_s \bar{k}/k$, которая имеет простой физический смысл. Представим изучаемую систему (Рис.9,а) в виде последовательности однотипных рассеивателей (Рис.9,б), создавая для каждого точечного рассеивателя потенциальную яму, ширина которой стремится к нулю. Тогда параметр $\bar{\epsilon}_s = V_s/2\bar{k}a_0$, определенный для фермиевского импульса \bar{k} изучаемой системы, заменяется на параметр $\epsilon_s = V_s/2ka_0$, содержащий фермиевский импульс k в идеальных контактах. При этом \tilde{T}_δ является трансфер-матрицей для потенциального барьера, разделяющего два рассеивателя на Рис.9,б:

$$\tilde{T}_\delta = \begin{pmatrix} \cos \delta - i\Delta_2 \sin \delta & i\Delta_1 \sin \delta \\ -i\Delta_1 \sin \delta & \cos \delta + i\Delta_2 \sin \delta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 - i\Delta_2 \delta & i\Delta_1 \delta \\ -i\Delta_1 \delta & 1 + i\Delta_2 \delta \end{pmatrix}, \quad (85)$$

где Δ_1 и Δ_2 определяются при $\bar{k} = \kappa$ формулой (9). Ситуация в запрещенной зоне (Рис.2,в) отличается лишь тем, что высота барьеров на Рис.9,б превышает уровень Ферми, а \tilde{T}_δ отличается от (84) заменой \bar{k} на $i\kappa$

$$\tilde{T}_\delta = \begin{pmatrix} \text{ch} \delta - i\Delta_1 \text{sh} \delta & i\Delta_2 \text{sh} \delta \\ -i\Delta_2 \text{sh} \delta & \text{ch} \delta + i\Delta_1 \text{sh} \delta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 - i\Delta_1 \delta & i\Delta_2 \delta \\ -i\Delta_2 \delta & 1 + i\Delta_1 \delta \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Будем описывать потенциальный барьер трансфер-матрицей общего вида

$$\tilde{T}_\delta = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \Delta^2} e^{i\alpha} & \Delta e^{-i\beta} \\ \Delta e^{i\beta} & \sqrt{1 + \Delta^2} e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad (87)$$

близкой к единичной ($\alpha, \Delta \ll 1$); она имеет собственные значения $e^{\pm\delta}$, где $\delta^2 = \Delta^2 - \alpha^2$. Согласно (83), $\tilde{T}^{(n)}$ получается умножением $\tilde{T}^{(n-1)}$ на $\tilde{T}_\delta \tilde{T}_{\epsilon_n}$ и принимая $\tilde{T}^{(n-1)}$ в виде (12), имеем

$$\tilde{T}_{12}^{(n)} = \sqrt{1 + \rho} e^{i\varphi} (B + i\epsilon C) + \sqrt{\rho} e^{i\theta} (A^* - i\epsilon C^*), \quad (88)$$

где $C = B - A$. Возводя по модулю в квадрат, получим значение $\tilde{\rho}$, соответствующее матрице $\tilde{T}^{(n)}$

$$\tilde{\rho} = \rho + D\sqrt{\rho(1+\rho)} + \epsilon^2(1+2\rho), \quad (89)$$

где

$$D = 2\Delta \cos(\psi + \beta) - 2\epsilon \sin \psi - 2\epsilon^2 \cos \psi, \quad (90)$$

$$\psi = \theta - \varphi, \quad (91)$$

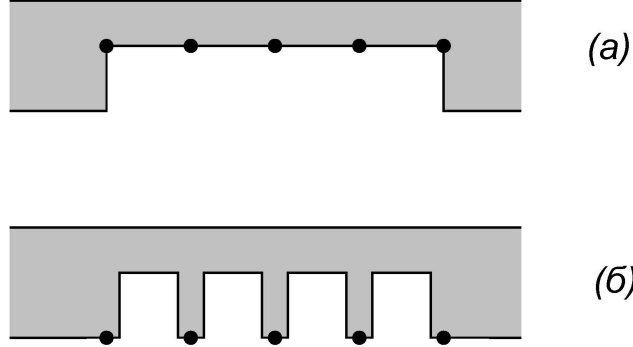


Рис. 9: Физический смысл перенормировки ϵ_s состоит в представлении изучаемой системы (а) в виде последовательности однотипных рассеивателей (б). В последнем случае для каждого рассеивателя создается потенциальная яма, ширина которой стремится к нулю.

и мы сохранили члены первого порядка по δ и второго по ϵ . Выражение (89) аналогично формуле (A.2) работы [12] и дальнейшие вычисления следуют Приложению А этой работы. В результате получается уравнение (3) с параметрами (мы полагаем $a_0 = 1$)

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2} \overline{D^2}, \quad \gamma_1 \tilde{\alpha} = \epsilon^2 - \frac{1}{2} \overline{D^2}, \quad \gamma_2 \tilde{\alpha} = \frac{1}{2} \overline{D}, \quad (92)$$

что после подстановки (90) дает

$$\tilde{\alpha} = 2\epsilon^2 \overline{\sin^2 \psi}, \quad \gamma_1 \tilde{\alpha} = \epsilon^2 \left(1 - 2\overline{\sin^2 \psi}\right), \quad \gamma_2 \tilde{\alpha} = \overline{\Delta \cos(\psi + \beta)} - \epsilon^2 \overline{\cos \psi}, \quad (93)$$

где в актуальном случае $\beta = -\pi/2$; другие значения β возникают при наличии на границах раздела δ -образного потенциала.

Уравнение (3) с параметрами (93) позволяет проанализировать выделенные ситуации с $\epsilon = \bar{\epsilon}$, актуальные для разд.6. В разрешенной зоне при $k = \bar{k}$ имеем $\Delta_1 = 0$ и $\Delta = 0$ (ср. (85) и (87)); в случае однородного распределения для ψ формулы (93) дают $\tilde{\alpha} = \epsilon^2$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, что согласуется с результатами разд.4, 5 в глубине разрешенной зоны. Таким образом, однородное распределение для ψ , полученное в разд.3 для $n \lesssim 1/\epsilon^2$, сохраняется и при $n \gtrsim 1/\epsilon^2$. В глубине запрещенной зоны при $k = \kappa$ имеем $\Delta_1 = 0$ и $\Delta = \delta$ (ср. (86) и (87)); результаты $\tilde{\alpha} = 2\epsilon^2$, $\gamma \tilde{\alpha} = \delta$ разделов 4 и 5 согласуются с (93) при условии локализации ψ вблизи $\pi/2$, установленной в разд.3 для $n \lesssim 1/\epsilon^2$ и указывают на ее сохранение при $n \gtrsim 1/\epsilon^2$. Для критической области $\Delta_1 \approx \Delta_2$, $\Delta \sim \delta$, и результаты $\tilde{\alpha} \sim (\epsilon^2 \delta^2)^{1/3}$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \sim 1$, полученные в разд.4, 5, согласуются с (93) при локализации ψ в области малых значений $\sim (\delta/\epsilon^2)^{1/3}$ в соответствии с анализом разд.3.

8. Эволюция среднего значения ρ .

Эволюция $\langle \rho \rangle$ допускает полное описание и позволяет проиллюстрировать влияние идеальных контактов при произвольных размерах системы. Соотношение $\tilde{T}^{(n)} = \tilde{T}^{(n-1)} \tilde{T}_\delta \tilde{T}_{\epsilon_n}$ в терминах матричных элементов имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{11}^{(n)} &= (1 + i\alpha - i\epsilon_n) \tilde{T}_{11}^{(n-1)} + (-i\Delta + i\epsilon_n) \tilde{T}_{12}^{(n-1)} \\ \tilde{T}_{12}^{(n)} &= (i\Delta - i\epsilon_n) \tilde{T}_{11}^{(n-1)} + (1 - i\alpha + i\epsilon_n) \tilde{T}_{12}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (94)$$

где мы произвели линеаризацию по α и Δ и положили $\beta = -\pi/2$. Вводя обозначения для вторых моментов

$$\begin{aligned} z_1^{(n)} &= \left\langle \left| \tilde{T}_{11}^{(n)} \right|^2 \right\rangle, & z_2^{(n)} &= \left\langle \tilde{T}_{11}^{(n)} \tilde{T}_{12}^{(n)*} \right\rangle, \\ z_3^{(n)} &= \left\langle \tilde{T}_{11}^{(n)*} \tilde{T}_{12}^{(n)} \right\rangle, & z_4^{(n)} &= \left\langle \left| \tilde{T}_{12}^{(n)} \right|^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (95)$$

получим систему разностных уравнений

$$\begin{pmatrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \\ z_3^{(n)} \\ z_4^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon^2 & i\Delta - \epsilon^2 & -i\Delta - \epsilon^2 & \epsilon^2 \\ -i\Delta + \epsilon^2 & 1 + 2i\alpha - \epsilon^2 & -\epsilon^2 & -i\Delta + \epsilon^2 \\ i\Delta + \epsilon^2 & -\epsilon^2 & 1 - 2i\alpha - \epsilon^2 & i\Delta + \epsilon^2 \\ \epsilon^2 & i\Delta - \epsilon^2 & -i\Delta - \epsilon^2 & 1 + \epsilon^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} \\ z_2^{(n-1)} \\ z_3^{(n-1)} \\ z_4^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad (96)$$

решение которой ищется в экспоненциальной форме, $z_i^{(n)} \sim \lambda^n$, и λ есть собственное значение матрицы; полагая $\lambda = 1 + x$, получим уравнение

$$x [x(x^2 + 4\alpha^2 - 4\Delta^2) - 8\epsilon^2(\Delta - \alpha)^2] = 0, \quad (97)$$

имеющее решение $x = 0$ и три нетривиальных корня. Последние совпадают с корнями уравнения (44) и не зависят от идеальных контактов, поскольку $\delta^2 = \Delta^2 - \alpha^2$ и

$$8\epsilon^2(\Delta - \alpha)^2 = 8\epsilon^2\delta^2(\Delta_2 - \Delta_1)^2 = 8\epsilon^2\delta^2 = 2W^2. \quad (98)$$

Находя собственные векторы матрицы (96), получим общее решение системы

$$\begin{pmatrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \\ z_3^{(n)} \\ z_4^{(n)} \end{pmatrix} = C_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^3 C_i \begin{pmatrix} 1 \\ e_2(x_i) \\ e_3(x_i) \\ 1 \end{pmatrix} \exp(x_i n), \quad (99)$$

где x_1, x_2, x_3 — нетривиальные корни уравнения (97) и

$$\begin{aligned} e_2(x) &= \frac{\mathcal{A}x + \mathcal{B}}{p(x)}, & e_3(x) &= \frac{\mathcal{A}^*x + \mathcal{B}^*}{p(x)}, \\ \mathcal{A} &= 2\epsilon^2 - 2i\Delta, & \mathcal{B} &= 4\alpha\Delta + 4i\epsilon^2(\alpha - \Delta), \\ p(x) &= x^2 + 2\epsilon^2x + 4\alpha^2. \end{aligned} \quad (100)$$

Выбирая в качестве начального условия единичную трансфер-матрицу, имеем $z_1^{(0)} = 1, z_2^{(0)} = z_3^{(0)} = z_4^{(0)} = 0$, что позволяет установить значения коэффициентов C_i . Поскольку $z_4^{(n)}$ непосредственно определяет $\langle \rho \rangle$, то

$$\langle \rho \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{(x_2 - x_3)p(x_1)}{2Q} e^{x_1 n} - \frac{(x_1 - x_3)p(x_2)}{2Q} e^{x_2 n} + \frac{(x_1 - x_2)p(x_3)}{2Q} e^{x_3 n}, \quad (101)$$

где

$$Q = x_1^2(x_2 - x_3) - x_2^2(x_1 - x_3) + x_3^2(x_1 - x_2). \quad (102)$$

Результат (101) имеет общий характер: при его выводе не сделано никаких приближений. При больших n доминирует одна из экспонент и ситуация оказывается мультипликативной. При малых n экспоненты могут быть разложены в ряд, что приводит к омическому режиму $\rho \propto n$.

В локализованном режиме ($\delta \gg \bar{\epsilon}^2$) нетривиальные корни уравнения (97) имеют вид

$$x_1 = 2\delta + \bar{\epsilon}^2, \quad x_2 = -2\bar{\epsilon}^2, \quad x_3 = -2\delta + \bar{\epsilon}^2, \quad (103)$$

так что

$$\langle \rho \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{\Delta_2^2}{4} (e^{x_1 n} + e^{x_3 n}) - \frac{\Delta_1^2}{2} e^{x_2 n}. \quad (104)$$

При больших n доминирует член с $e^{x_1 n}$ и подтверждает перенормировку абсолютного масштаба ρ на множитель Δ_2^2 , указанную в разд.1; изменение начала отсчета n (см. конец разд.5) проявляется лишь при $n \lesssim 1/\delta$.

В металлическом режиме нужно сделать замену $\delta \rightarrow i\delta$, $\epsilon \rightarrow -i\epsilon$ и рассмотреть предел $\delta \gg \bar{\epsilon}^2$; тогда

$$x_1 = 2\bar{\epsilon}^2, \quad x_2 = -\bar{\epsilon}^2 + 2i\delta, \quad x_3 = -\bar{\epsilon}^2 - 2i\delta \quad (105)$$

и

$$\langle \rho \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{\Delta_2^2}{2} e^{2\bar{\epsilon}^2 n} - \frac{\Delta_1^2}{2} e^{-\bar{\epsilon}^2 n} \cos 2n\delta, \quad (106)$$

что в ситуации Рис.2,а (когда $\Delta_1 = 0$) дает известный результат [1, 2, 15, 16, 17]

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2} (e^{2\bar{\epsilon}^2 n} - 1). \quad (107)$$

При конечных Δ_1 возникают осцилляции, период которых определяется де-Бройлевской длиной волны (так как $2n\delta = 2\bar{k}L$). Их происхождение определяется тем, что при $\bar{\epsilon} = 0$ ландауровское сопротивление ρ определяется трансфер-матрицей (85) потенциального барьера,

$$\rho = \Delta_1^2 \sin^2 \bar{k}L, \quad (108)$$

и коэффициент отражения обращается в нуль, если на длине системы укладывается полуцелое число длин волн де Бройля (аналогично просветлению в оптике). При конечных $\bar{\epsilon}$ осцилляции становятся затухающими, но являются вполне наблюдаемыми: в металлическом режиме среднее значение ρ является репрезентативным, так как его флуктуации относительно малы.

В критической области ($\delta \ll \bar{\epsilon}^2$) имеем

$$x_1 = 2(\bar{\epsilon}^2 \delta^2)^{1/3}, \quad x_2 = x_1 \exp(2\pi i/3), \quad x_3 = x_1 \exp(-2\pi i/3). \quad (109)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle = & \frac{1}{6} \left[e^{x_1 n} + 2e^{-x_1 n/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_1 n\right) - 3 \right] + \\ & + \frac{\epsilon^2}{3x_1} \left[e^{x_1 n} - 2e^{-x_1 n/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_1 n + \frac{\pi}{3}\right) \right] + \\ & + \frac{2\alpha^2}{3x_1^2} \left[e^{x_1 n} - 2e^{-x_1 n/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_1 n - \frac{\pi}{3}\right) \right]. \end{aligned} \quad (110)$$

Если продвижение в критическую область происходит из разрешенной зоны, то возможно использование "естественных" идеальных контактов (Рис.2,а), для которых $\epsilon = \bar{\epsilon}$; тогда в (109) доминирует второй член. Разложение по $x_1 n$ дает $\langle \rho \rangle = \bar{\epsilon}^2 n$ в согласии с результатом из трансфер-матрицы (38), что определяет область применимости последней как $n \lesssim 1/x_1$.

Результат (110) остается конечным при $\bar{k} \rightarrow 0$, когда

$$\frac{\epsilon^2}{3x_1} = \frac{(2W^2)^{2/3}}{24k^2 a_0^2}, \quad \frac{2\alpha^2}{3x_1^2} = \frac{2k^2 a_0^2}{3(2W^2)^{2/3}}, \quad x_1 = (2W^2)^{1/3}. \quad (111)$$

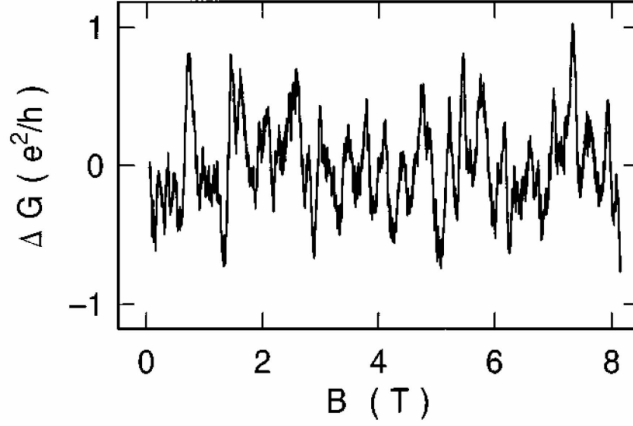


Рис. 10: Кондактанс $G(B)$ тонкой проволоочки из Au [34] в магнитном поле B испытывает "универсальные" флуктуации порядка e^2/h при изменении конфигурации примесей [25, 26]. Флуктуации $G(B)$ и $G(B + \Delta B)$ статистически независимы, если ΔB превышает некоторый характерный масштаб [25, 26]. Несмотря на случайный характер, картина флуктуаций полностью воспроизводима и характеризует конкретную реализацию случайного потенциала ("магнитные отпечатки пальцев").

Аналогично (106), имеются затухающие осцилляции, амплитуда которых существенно зависит от фермиевского импульса k в идеальных контактах: она порядка единицы при $ka_0 \sim W^{2/3}$ (когда все три члена в (110) одного порядка), но возрастает как при уменьшении k (когда доминирует второй член в (110)), так и при его увеличении (когда доминирует третий член). Период осцилляций определяется амплитудой случайного потенциала, а фазовый сдвиг изменяется от $\pi/3$ до $-\pi/3$ при увеличении k от малых до больших значений.

Фактически наблюдаемая картина оказывается более сложной. В критической области флуктуации ρ велики, и форма функции распределения существенно зависит от нескольких первых моментов⁵. Между тем высшие моменты ρ осциллируют с периодом того же порядка: это связано с комплексными корнями уравнения (48) и аналогичных уравнений для высших моментов⁶. Возникает сложная интерференция несоизмеримых осцилляций, приводящая к аperiодическим осцилляциям для сопротивления ρ в конкретном образце. Такие осцилляции наблюдаются в магнетосопротивлении тонких проволоочек [34] (Рис.10) и имеют непосредственное отношение к вышеизложенному: магнитное поле, перпендикулярное к тонкой проволоочке создает вдоль нее квадратичный потенциал, который эффективно ограничивает длину системы; поэтому изменение магнитного поля аналогично изменению L . Рис.10 в принципе объясняется теоретическими результатами работ [25, 26], но нам неизвестны попытки описания осцилляций как таковых.

На Рис.11 приводятся экспериментальные результаты работы [35], которые демонстрируют возможность наблюдения эволюции как полной функции распределения ρ или G , так и ее моментов. Независимые примесные конфигурации в тонкой проволоочке из GaAs, легированного кремнием, создавались путем периодического отогрева ее до комнатной температуры, после чего производилось

⁵ Напомним, что Фурье-преобразование $P(\rho)$ определяет характеристическую функцию $F(t) = \langle e^{i\rho t} \rangle$, которая является производящей функцией моментов, $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n \langle \rho^n \rangle / n!$. Если известны все моменты распределения, то по ним можно построить $F(t)$, после чего $P(\rho)$ определяется обратным Фурье-преобразованием.

⁶ Сопоставление (44) и (48) показывает, что периоды осцилляций для $\langle \rho \rangle$ и $\langle \rho^2 \rangle$ отличаются в $2^{1/3}$ раз. Как ясно из разд.4 (см. примечание 3), в правой части уравнения для x допустимы лишь комбинации $\delta^{2n} \epsilon^{2m}$ с $n \geq m$, из которых конечными при $\delta \rightarrow 0$ остаются лишь $\delta^{2n} \epsilon^{2n} \sim W^{2n}$. Поскольку при $x \sim \delta \sim \epsilon^2$ все члены уравнения одного порядка, то показатель роста x для $\langle \rho^n \rangle$ при $\delta = 0$ удовлетворяет уравнению $x^{2n+1} = c_1 \delta^2 \epsilon^2 x^{2n-2} + c_2 \delta^4 \epsilon^4 x^{2n-5} + \dots$, нетривиальные корни которого имеют порядок $(\delta^2 \epsilon^2)^{1/3}$ независимо от n .

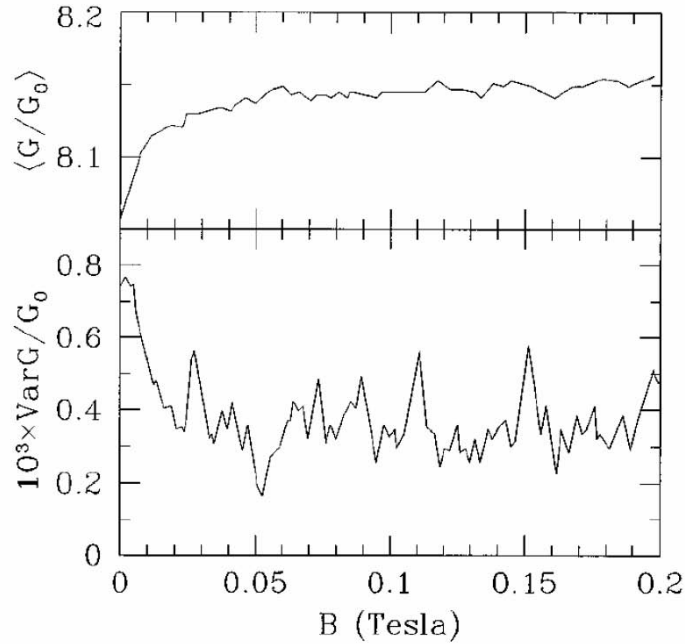


Рис. 11: Эволюция двух первых моментов кондактанса G при изменении магнитного поля для тонкой проволоочки из GaAs, легированного кремнием [35].

усреднение по 50 конфигурациям. Результаты для двух первых моментов G указывают, что функция распределения не является стационарной, а испытывает систематические изменения: это согласуется с изложенным выше.

9. Заключение

Массивные идеальные контакты, которые приходится вводить для корректного определения проводимости конечных систем, оказывают существенное влияние на свойства изучаемого образца. В настоящей работе оно исследовано на примере одномерных систем. В логнормальном режиме оно сводится к изменению абсолютного масштаба кондактанса, но в общем случае изменяет всю функцию распределения. При изменении длины системы могут возникать периодические или аperiodические осцилляции ρ . При сдвиге уровня Ферми происходят качественные изменения, напоминающие сглаженный переход Андерсона.

Используемое определение проводимости относится к составной системе "образец+идеальные провода тогда как вопрос об его отношении к изучаемой системе остается открытым. В работе [11] для его решения предлагается введение полупроницаемых границ, отделяющих систему от идеальных контактов. При переходе к пределу слабопрозрачных границ возникают универсальные уравнения, не зависящие от способа исключения контактного сопротивления резервуара [10] (так как все формулы ландауэровского типа [2, 5, 6, 8, 9] сводятся к варианту Эконому–Соукоулуса [3, 4]), которые затем могут быть экстраполированы к прозрачности порядка единицы. Такое определение заведомо относится к изучаемому образцу и обеспечивает бесконечное значение проводимости для идеальной системы. При этом абсолютный масштаб кондактанса фиксируется лишь по порядку величины; это не имеет принципиального значения (физический смысл имеет лишь отношение кондактансов), но создает некоторые трудности при сопоставлении с другими результатами. Как ясно из вышеизложенного, абсолютный масштаб кондактанса зависит от свойств идеальных контактов и в любом случае является условной величиной. Для устранения его неопределенности нужно как-то оговаривать

свойства контактов: например, можно принять "золотой стандарт" и пересчитывать все результаты на контакты из золота.

Согласно уравнению (2) распределение кондактансов одномерной системы определяется двумя параметрами $\tilde{\alpha}L$ и γ . Такое двухпараметрическое описание естественным образом следует из гипотезы однопараметрического скейлинга [36], согласно которой свойства d -мерной кубической системы размера L полностью определяются отношением L/ξ , где ξ — корреляционный радиус. Составляя квазиодномерную систему размера $L^{d-1}L_z$ из кубических блоков размера L , легко заключить, что ее кондактанс зависит от свойств одного блока (L/ξ) и числа кубиков (L_z/L). При $L = a_0$ квазиодномерная система становится строго одномерной, но по-прежнему описывается двумя параметрами. Однопараметрический скейлинг в одномерных системах реализуется в глубине разрешенной зоны (когда справедливо уравнение (1)) и приближенно сохраняется в критической области⁷; его нарушение в запрещенной зоне вполне естественно ввиду нарушения условия $\xi \gg a_0$. Необходимость двухпараметрического описания одномерных систем обсуждалась в работе [37] (см. также [21]–[24]) и в последнее время оно активно использовалось для описания распределения кондактансов [12, 38] в рамках скейлинговой схемы Шапиро [18].

Эволюция как полного распределения ρ , так и его моментов, может изучаться экспериментально в духе работы [35], в которой конфигурация примесей в изучаемом образце изменялась путем его отогрева до достаточно высокой температуры.

Приложение 1. Эволюция моментов для координатной трансфер-матрицы

Для координатной трансфер-матрицы справедливы уравнения эволюции

$$z_{n+1} = (E - V_n)z_n + y_n, \quad y_{n+1} = -z_n, \quad (A.1)$$

где $z_n = \tau_{12}^{(n-1)}$, $y_n = \tau_{11}^{(n-1)}$ с начальными условиями $z_1 = 0$, $y_1 = 1$, либо $z_n = \tau_{22}^{(n-1)}$, $y_n = \tau_{21}^{(n-1)}$ с начальными условиями $z_1 = 1$, $y_1 = 0$. Для вторых моментов нетрудно получить

$$\begin{pmatrix} \overline{z_{n+1}^2} \\ \overline{z_{n+1}y_{n+1}} \\ \overline{y_{n+1}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^2 + W^2 & 2E & 1 \\ -E & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_n^2} \\ \overline{z_n y_n} \\ \overline{y_n^2} \end{pmatrix}, \quad (A.2)$$

Предполагая для моментов экспоненциальный рост λ^n с $\lambda = 1 + x$, получим для x уравнение

$$x^3 - x^2(E^2 - 4) - x(E^2 - 4) = W^2(2 + 3x + x^2) \quad (A.3)$$

Полагая $E^2 - 4 = 4\delta^2$, $W^2 = 4\epsilon^2\delta^2$, нетрудно убедиться, что в пределе $\delta \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\delta/\epsilon^2 = const$ уравнение (A.3) совпадает с (44).

Аналогично для четвертых моментов имеем уравнение

$$\begin{pmatrix} \overline{z_{n+1}^4} \\ \overline{z_{n+1}^3 y_{n+1}} \\ \overline{z_{n+1}^2 y_{n+1}^2} \\ \overline{z_{n+1} y_{n+1}^3} \\ \overline{y_{n+1}^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^4 + 6E^2W^2 & 4E^3 + 12EW^2 & 6E^2 + 6W^2 & 4E & 1 \\ -E^3 - 3EW^2 & -3E^2 - 3W^2 & -3E & -1 & 0 \\ E^2 + W^2 & 2E & 1 & 0 & 0 \\ -E & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_n^4} \\ \overline{z_n^3 y_n} \\ \overline{z_n^2 y_n^2} \\ \overline{z_n y_n^3} \\ \overline{y_n^4} \end{pmatrix} \quad (A.4)$$

Предполагая, что моменты растут как λ^n с $\lambda = 1 + x$, получим для x уравнение

$$\begin{aligned} & -x^5 + x^4(E^2 + 1)(E^2 - 4) + x^3(E^2 - 4)(-E^4 + 5E^2 + 1) - x^2 2E^2(E^2 - 4)^2 - xE^2(E^2 - 4)^2 + \\ & + W^2[-6E^2(E^2 - 4) - 15xE^2(E^2 - 4) + x^2(-12E^4 + 60E^2 - 6) + \\ & + x^3(-3E^4 + 30E^2 - 9) + x^4(6E^2 - 3)] = 0 \end{aligned} \quad (A.5)$$

где опущены члены более высокого порядка по W^2 . Полагая $E^2 - 4 = 4\delta^2$, $W^2 = 4\epsilon^2\delta^2$ и сохраняя главные члены при указанном предельном переходе, получим уравнение (48).

⁷ В этом случае параметр γ порядка единицы и не имеет существенной эволюции.

Приложение 2. Об асимптотиках интеграла (70).

Учитывая четность подинтегрального выражения в (70) в переменных $\tilde{\varphi} = \varphi - \pi/2$, $\tilde{\theta} = \theta - \pi/2$ и полагая $x = \sin \varphi$, $y = \sin \theta$, имеем

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi^2 t} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \exp \left\{ -\frac{S(x, y)}{t} \right\}, \quad (A.6)$$

$$S(x, y) = \left(\Delta_1 \sqrt{1+\rho} x + \Delta_2 \sqrt{\rho} y \right)^2 + \rho(1-y^2).$$

Конфигурация перевальных точек существенно различна для $\rho < \rho_c$ и $\rho > \rho_c$, где $\rho_c = \Delta_1^2$. В первом случае максимум экспоненты достигается при $x = x_c$, $y = -1$ или $x = -x_c$, $y = 1$, где $x_c = \Delta_2 \sqrt{\rho} / \Delta_1 \sqrt{1+\rho}$, а во втором — при $x = 1$, $y = -1$ или $x = -1$, $y = 1$. Пусть δx и δy — отклонения x и y от точки экстремума. При $\rho < \rho_c$ сохраним в $S(x, y)$ квадратичный член по δx и линейный по δy , полагая в предэкспоненте $x = x_c$, $1 - y^2 = 2\delta y$; тогда

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho(\rho_c - \rho)}}, \quad (A.7)$$

что есть предельная форма распределения при $t \rightarrow 0$.

При $\rho > \rho_c$ имеем

$$S(x, y) = S_c + A\delta x + B\delta y + C(\delta x - x_c \delta y)^2 - \rho(\delta y)^2, \quad (A.8)$$

где S_c , A , B определены в (73) и $C = \Delta_1^2(1+\rho)$. При больших ρ достаточно сохранить в (A.8) линейные по δx , δy члены и линеаризовать выражения под радикалами; тогда

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{AB}} \exp \left(-\frac{S_c}{t} \right), \quad (A.9)$$

что есть последняя асимптотика в (72), (74)–(77).

Результаты (A.7), (A.9) неприменимы для ρ , близких к ρ_c , поскольку коэффициент A обращается в нуль при $\rho = \rho_c$. Полагая $\delta \tilde{x} = \delta x - x_c \delta y$ и опуская последний член в (A.8), имеем

$$S(x, y) = S_c + A\delta \tilde{x} + C(\delta \tilde{x})^2 + 2\rho\delta y. \quad (A.10)$$

При $A^2 \ll Ct$ флуктуации $\delta \tilde{x}$ определяются квадратичным членом и $A\delta \tilde{x}$ можно опустить; тогда в малой окрестности ρ_c

$$P(\rho) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}} \frac{\Gamma(1/4)}{(Ct)^{1/4}}, \quad |\rho - \rho_c| \lesssim (Ct)^{1/2} \quad (A.11)$$

что устраняет расходимость при $\rho \rightarrow \rho_c$ и соответствует третьей асимптотике в (72) и (75). При указанном условии этот результат сохраняется и при $\rho < \rho_c$, когда коэффициент A отрицателен, но мал по абсолютной величине. Фактически результат (A.11) справедлив в случаях $t \ll \Delta_1^2 \ll 1$ и $t \ll 1 \ll \Delta_1^2$, когда флуктуация $\delta y \sim t/\rho$ мала по сравнению с $\delta \tilde{x} \sim \sqrt{t/C}$, так что $\delta \tilde{x} \approx \delta x$ и в предэкспоненте можно положить $1 - x^2 = 2\delta \tilde{x}$, $1 - y^2 = 2\delta y$. Обратная ситуация имеет место в случае $\Delta_1^2 \gg 1$, $t \gg 1$, когда $\delta y \gg \delta \tilde{x}$ и в предэкспоненте $1 - x^2 \approx 2\delta x = 2\delta \tilde{x} + 2x_c \delta y \approx 2\delta y$, что дает результат

$$P(\rho) = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln \frac{\Delta_1^2 t}{\rho} \exp \left(-\frac{S_c}{t} \right), \quad \rho_c/t \lesssim \rho \lesssim \rho_c t, \quad (A.12)$$

определяющий предпоследнюю асимптотику в (76), (77). Условие $A^2 \ll Ct$ дает $(\rho - \rho_c)^2 \ll \Delta_1^2 \rho t$, что при $t \gg 1$ сводится к указанному в (A.12). Если результат (A.11) справедлив в малой окрестности ρ_c , то для применимости (A.12) возникает широкая область.

При малых ρ условия применимости перевальнойго приближения нарушаются и удобно пользоваться исходной формой интеграла (70). Если $t \ll \Delta_1^2$, то перевальное интегрирование по φ все еще возможно и приводит к результату

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi^2 t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sqrt{\frac{\pi t}{\Delta_1^2 - \rho + \Delta_2^2 \rho \sin^2 \theta}} \exp \left\{ -\frac{\rho}{t} \sin^2 \theta \right\}. \quad (A.13)$$

При $\Delta_1^2 \ll 1$ имеем $\Delta_2 \approx 1$; если $\rho \ll t$, то в знаменателе дроби можно сохранить только Δ_1^2 , а интегрирование по θ производится путем разложения экспоненты

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\Delta_1^2 t}} \exp \left(-\frac{\rho}{2t} \right), \quad \rho \ll t, \quad (A.14)$$

что есть первый результат в (72), (75), (76). При $\rho \gtrsim t$ справедливы перевальные результаты (A.7), (A.9), (A.10).

В случае $\Delta_1^2 \ll 1$ и $t \gg \Delta_1^2$ область малых ρ определяется условием $\rho(1+\rho) \ll t^2/\Delta_1^2$ и вычисление интеграла в ней осуществляется путем разложения по $S(\varphi, \theta)/t$ до второго порядка, что дает первый результат в (74), (77); при обратном соотношении имеем $A \approx B \approx 2\Delta_1\Delta_2\sqrt{\rho(1+\rho)} \gg t$ и $A^2 \gg Ct$, что обеспечивает справедливость (A.9).

В случае $\Delta_1^2 \gg 1$ и $t \ll \Delta_1^2$ по-прежнему справедливо выражение (A.13), но его исследование усложняется. При $t \ll 1$ возникает знакомая ситуация: для $\rho \lesssim t$ можно сохранить в знаменателе Δ_1^2 и получить (A.14), тогда как при $\rho \gtrsim t$ справедливы перевальные результаты (A.7), (A.9), (A.10). Если же $1 \ll t \ll \Delta_1^2$, то результат (A.14) справедлив лишь при $\rho \lesssim 1$. В интервале $1 \lesssim \rho \lesssim t$ в знаменателе (A.13) доминирует $\Delta_2^2 \rho \sin^2 \theta$, а учет величины $\Delta_1^2 - \rho$ требуется лишь для обрезания логарифмической расходимости; при этом

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho \Delta_1^2 t}} \ln \frac{\Delta_1^2 \rho}{\rho_c - \rho}, \quad 1 \lesssim \rho \lesssim t. \quad (A.15)$$

В интервале $t \lesssim \rho \lesssim \rho_c$ экспонента ограничивает интегрирование значениями $\theta^2 \lesssim t/\rho$ и $\Delta_1^2 \rho$ в (A.15) заменяется на $\Delta_1^2 t$. Фактически оба результата актуальны лишь при $\rho \ll \rho_c$, так как при $\rho \gtrsim \rho_c/t$ расходимость при $\rho \rightarrow \rho_c$ устраняется за счет нелинейных членов в (A.8) и справедлив результат (A.12); поэтому возникает $\ln \rho$ для $1 \lesssim \rho \lesssim t$ и $\ln t$ для $t \lesssim \rho \lesssim \rho_c/t$, как это и отражено в (76).

В случае $\Delta_1^2 \gg 1$ и $t \gg \Delta_1^2$ разложение по $S(\varphi, \theta)/t$ возможно при $\rho \lesssim t/\Delta_1^2$ и приводит к первому результату (77). При $\rho \gtrsim t/\Delta_1^2$ справедливо выражение (A.13), где $|\Delta_1^2 - \rho| \ll t$, $\Delta_2^2 \rho \gg t$ и потому в знаменателе сохраняется лишь последний член; логарифмическая расходимость устраняется ввиду ограничения $(\Delta_2^2 \rho/t) \sin^2 \theta \gtrsim 1$, которое необходимо для перевальнойго интегрирования по φ и справедливости (A.13). Если при этом $\rho \lesssim t$, то экспонента в (A.13) незначительна и получается второй результат в (77). При $\rho \gtrsim t$ ситуация перевальная и справедливы результаты (A.12) и (A.9).

Список литературы

- [1] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).
- [2] R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957); Phil. Mag. **21**, 863 (1970); Z. Phys. **68**, 217 (1987).
- [3] E. N. Economou, C. M. Soukoulis, Phys. Rev. Lett. **46**, 618 (1981).
- [4] D. S. Fisher, P. A. Lee, Phys. Rev. B **23**, 6851 (1981).
- [5] D. C. Langreth, E. Abrahams, Phys. Rev. B **24**, 2978 (1981).
- [6] P. W. Anderson, Phys. Rev. B **23**, 4828 (1981);
H. L. Engquist, P. W. Anderson, Phys. Rev. B **24**, 1151 (1981).

- [7] D. J. Thouless, Phys. Rev. Lett. **47**, 972 (1981).
- [8] M. Buttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986).
M. Buttiker, Y. Imry, R. Landauer, S. Pinhas, Phys. Rev. B **31**, 6207 (1985).
- [9] M. Ya. Azbel, J. Phys. C **14**, L225 (1981).
- [10] A. D. Stone, A. Szafer, IBM J. Res. Dev. **32**, 384 (1988).
- [11] И. М. Суслов, ЖЭТФ **142**, 1020 (2012).
- [12] И. М. Суслов, ЖЭТФ **151**, 897 (2017).
- [13] В. И. Мельников, ФТТ **23**, 782 (1981).
- [14] A. A. Abrikosov, Sol. St. Comm. **37**, 997 (1981).
- [15] N. Kumar, Phys. Rev. B **31**, 5513 (1985).
- [16] B. Shapiro, Phys. Rev. B **34**, 4394 (1986).
- [17] P. Mello, Phys. Rev. B **35**, 1082 (1987).
- [18] B. Shapiro, Phil. Mag. **56**, 1031 (1987).
- [19] И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, Введение в теорию неупорядоченных систем, Москва, Наука, 1982.
- [20] X. Chang, X. Ma, M. Yezpez, A. Z. Genack, P. A. Mello, Phys. Rev. B **96**, 180203 (2017).
- [21] L. I. Deych, D. Zaslavsky, A. A. Lisyansky, Phys. Rev. Lett. **81**, 5390 (1998).
- [22] L. I. Deych, A. A. Lisyansky, B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **84**, 2678 (2000); Phys. Rev. B **64**, 224202 (2001).
- [23] L. I. Deych, M. V. Erementchouk, A. A. Lisyansky, Phys. Rev. Lett. **90**, 126601 (2001).
- [24] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Москва, Наука, 1974.
- [25] Б. Л. Альтшулер, Письма в ЖЭТФ **41**, 530 (1985);
Б. Л. Альтшулер, Д. Е. Хмельницкий, Письма в ЖЭТФ **42**, 291 (1985).
- [26] P. A. Lee, A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985);
P. A. Lee, A. D. Stone, Y. Fukuyama, Phys. Rev. B **35**, 1039 (1987).
- [27] D. Braun et al, Phys. Rev. B **64**, 155107 (2001).
- [28] I. Travenec, Phys. Rev. B **69**, 033094 (2004).
- [29] M. Ruhlender, P. Markos, C. M. Soukoulis, Phys. Rev. B **64**, 172202 (2001).
- [30] А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей. Москва, Наука, 1967.
- [31] И. М. Суслов, ЖЭТФ **154**, 152 (2018).
- [32] M. Karpus, F. Wegner, Z. Phys. B **45**, 15 (1981).
- [33] V. E. Kravtsov, V. I. Yudson, Ann. Phys. (NY) **326**, 1672 (2011).
- [34] S. Washburn, R. A. Webb, Adv. Phys. **35**, 375 (1986).

- [35] D. Mailly, M. Sanquer, *J. Phys. (France) I* **2**, 357 (1992).
- [36] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
- [37] A. Cohen, Y. Roth, B. Shapiro, *Phys. Rev. B* **38**, 12125 (1988).
- [38] I. M. Suslov, *Phil. Mag.* **99**, 247 (2019).

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Корректное определение проводимости конечных систем предполагает присоединение к системе массивных идеальных контактов.

Рис. 2. (а) В теоретических работах обычно предполагается, что отличие идеальных контактов от изучаемой системы определяется лишь наличием в последней случайного потенциала. (б) Практически в эксперименте подводящие провода изготавливаются из хорошего проводника с большой энергией Ферми. (в) Явное введение идеальных контактов оказывается неизбежным, если уровень Ферми в изучаемой системе соответствует запрещенной зоне идеального кристалла.

Рис. 3. Зависимость параметра γ в уравнении (2), относящегося к пределу больших L , от энергии \mathcal{E} , отсчитанной от нижнего края исходной зоны.

Рис. 4. В плоскости (\mathcal{E}, W^2) можно выделить три характерные области: квазиметаллическую ($\gamma \ll 1$), сильно локализованную ($\gamma \gg 1$) и "критическую" ($\gamma \sim 1$). При изменении энергии E для фиксированной амплитуды W случайного потенциала в распределении кондактансов происходят качественные изменения, напоминающие сглаженный переход Андерсона. В пределе $W \rightarrow 0$ возникает настоящий фазовый переход.

Рис. 5. Эволюция распределения $P(\rho)$ в металлическом режиме: (а) для слабого ($\Delta_1^2 = 0.1$) и (б) сильного ($\Delta_1^2 = 10$) различия уровней Ферми в изучаемом образце и идеальных контактах. Штриховой линией показано распределение (7) с $\gamma = 0$.

Рис. 6. Достоинства и недостатки различных трансфер-матриц.

Рис. 7. Положительный корень первого (x_2) и второго (x_4) уравнения (49) как функция энергии \mathcal{E} в приведенных координатах.

Рис. 8. Зависимость параметра K_1 от Δ_1 .

Рис. 9. Физический смысл перенормировки ϵ_s состоит в переходе от ситуации (а) к ситуации (б). В последнем случае для каждого рассеивателя создается потенциальная яма, ширина которой стремится к нулю.

Рис. 10. Кондактанс $G(B)$ тонкой проволоочки из Au [34] в магнитном поле B испытывает "универсальные" флуктуации порядка e^2/h при изменении конфигурации примесей [25, 26]. Флуктуации $G(B)$ и $G(B + \Delta B)$ статистически независимы, если ΔB превышает некоторый характерный масштаб [25, 26]. Несмотря на случайный характер, картина флуктуаций полностью воспроизводима и характеризует конкретную реализацию случайного потенциала ("магнитные отпечатки пальцев").

Рис. 11. Эволюция двух первых моментов кондактанса G при изменении магнитного поля для тонкой проволоочки из GaAs, легированного кремнием [35].