О механизме универсальных флуктуаций кондактанса

В.В.Бражкин, И.М.Суслов

Универсальные флуктуации кондактанса обычно наблюдаются в виде апериодических осцилляций в магнетосопротивлении тонких проволочек при изменении магнитного поля B. Если такие осцилляции являтся полностью случайными на масштабах больших ξ_B, то их Фурье-анализ должен обнаруживать спектр белого шума на частотах, меньших $2\pi/\xi_B$. Альтернативный сценарий возникает при сопоставлении с результатами для одномерных систем: согласно ему, такие осцилляции определяются суперпозицией несоизмеримых гармоник и их спектр должен содержать дискретные частоты. Аккуратный Фурье-анализ классического эксперимента Вебба и Вашбурна обнаруживает чисто дискретный спектр в согласии со второй концепцией. Однако в целом его форма близка к спектру дискретного белого шума, который по свойствам близок к непрерывному.

Универсальные флуктуации кондактанса [1, 2, 3, 4] обычно наблюдаются в виде апериодических осцилляций в магнетосопротивлении тонких проволочек при изменении магнитного поля B [5] (Рис.1). Согласно теории [1, 2, 3, 4], кондактанс $G(B)$ при фиксированном значении поля B испытывает флуктуации порядка e^2/h при изменении примесной конфигурации; флуктуации $G(B)$ и $G(B+\Delta B)$ статистически независимы, если ΔB превышает некоторый характерный масштаб ξ_B. Естественно ожидать, что на масштабах, больших ξ_B, осцилляции $G(B)$ на Рис.1 являются полностью случайными; тогда их Фурье анализ должен выявлять плоский спектр белого шума на частотах, меньших ξ_B^{-1}.

Альтернативный сценарий возникает при сопоставлении с результатами для одномерных систем [6]. Магнитное поле, перпендикулярное к тонкой проволочке создает вдоль нее квадратичный потенциал [7], который эффективно ограничивает длину системы L; поэтому изменение магнитного поля аналогично изменению L. Сопротивление ρ одномерной системы является сильно флуктуирующей величиной и форма его функции распределения $P(\rho)$ существенно зависит от нескольких первых моментов. Действительно, Фурье-преобразование $P(\rho)$ определяет характеристическую функцию

$$F(t) = \left\langle e^{i\rho t} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \left\langle \rho^n \right\rangle , \qquad (1)$$

которая является производящей функцией моментов $\langle \rho^n \rangle$. Если известны все моменты распределения, то по ним можно построить $F(t)$, после чего $P(\rho)$ определяется обратным Фурье-преобразованием. Если $\langle \rho^n \rangle$ растут с n не слишком быстро, то вклад высших моментов подавлен множителем $1/n!$, тогда как несколько первых моментов оказываются существенными. Эти моменты являются осциллирующими функциями L,

$$\langle \rho \rangle = a_1(L) + b_1(L) \cos(\omega_1 L + \varphi_1), \qquad (2)$$

$$\left\langle \rho^2 \right\rangle = a_2(L) + b_2(L) \cos(\omega_2 L + \varphi_2) + b_3(L) \cos(\omega_3 L + \varphi_3) \,,$$

и т. д., где $a_k(L)$ и $b_k(L)$ — монотонные функции. Дело в том, что показатель экспоненциального роста для $\langle \rho^n \rangle$ определяется алгебраическим уравнением $(2n+1)$-го порядка (см. Приложение), один из корней которого всегда действителен, тогда как остальные комплексны в глубине разрешенной зоны или вблизи ее края; поэтому имеется n пар комплексно сопряженных корней, которые обеспечивают наличие n частот в осцилляциях $\langle \rho^n \rangle$. В общем случае частоты ω_k являются несоизмеримыми, но их несоизмеримость исчезает в глубине разрешенной зоны при слабом беспорядке. Согласно этой картине, осцилляции $G(B)$ на Рис.1 определяются суперпозицией несоизмеримых гармоник и их Фурье-спектр должен обнаруживать наличие дискретных частот. Косвенным подтверждением этой картины являются приведенные в [6] экспериментальные данные работы [8], согласно которым функция распределения $P(\rho)$ не является стационарной, а испытывает систематические изменения апериодического характера.

Из сказанного ясно, что Фурье-анализ зависимости $G(B)$ позволяет установить, какой из двух сценариев является правильным. При этом зависимость $G(B)$ на Рис.1 не может быть использована непосредственно, так как резкий обрыв экспериментальных данных приводит к появлению

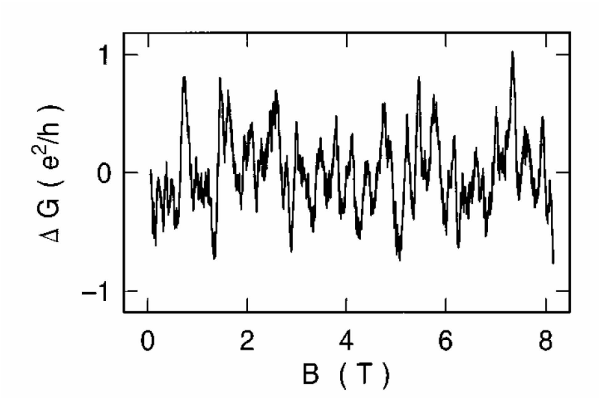

Рис. 1: Кондактанс тонкой проволочки из Au как функция магнитного поля [5].

медленно спадающих осцилляций в ее спектре и хаотизации последнего [1]. Для получения четких результатов необходимо использование надлежащей сглаживающей функции.

Пусть функция $f(x)$ определяется суперпозицией дискретных гармоник и является действительной; тогда

$$f(x) = \sum_k A_k \mathrm{e}^{i\omega_k x} = \frac{1}{2} \sum_k \left[A_k \mathrm{e}^{i\omega_k x} + A_k^* \mathrm{e}^{-i\omega_k x} \right] , \tag{3}$$

где частоты ω_k без ограничения общности можно считать положительными. Тогда Фурье-образ $f(x)$ имеет вид

$$F(\omega) = \pi \sum_k \left[A_k \delta(\omega + \omega_k) + A_k^* \delta(\omega - \omega_k) \right] , \tag{4}$$

а его модуль

$$|F(\omega)| = \pi \sum_k |A_k| \left[\delta(\omega + \omega_k) + \delta(\omega - \omega_k) \right] \tag{5}$$

зависит лишь от интенсивностей спектральных линий и не содержит информации о фазовых сдвигах в возникающих в (3) тригонометрических функциях. Поскольку $|F(\omega)|$ является четной функцией, то можно ограничиться положительными значениями ω и опустить первую дельта-функцию в (5).

Поскольку функция $f(x)$ может быть экспериментально измерена лишь в некотором конечном интервале значений x, то практически мы имеем

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_k \left[A_k \mathrm{e}^{i\omega_k x} + A_k^* \mathrm{e}^{-i\omega_k x} \right] G(x) , \tag{6}$$

где функция $G(x)$ равна единице внутри рабочего интервала и нулю вне его; в дальнейшем она будет подвержена сглаживанию. Тогда вместо (4) получим

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k \left[A_k g(\omega + \omega_k) + A_k^* g(\omega - \omega_k) \right] , \tag{7}$$

где $g(\omega)$ — Фурье-образ $G(x)$, который является действительным, если $G(x)$ выбрана четной. Таким образом, ограничение рабочего интервала приводит к замене дельта-функций на спектральные линии конечной ширины. Если дискретные частоты являются хорошо разделенными, а $g(\omega)$ сильно локализована вблизи нуля, то можно пренебречь перекрытием функций $g(\omega \pm \omega_k)$) и записать при положительных частотах

$$|F(\omega)|^2 \approx \frac{1}{4} \sum_k |A_k|^2 g^2(\omega - \omega_k) . \tag{8}$$

Использование функции $|F(\omega)|^2$ (т.н. спектра мощности [9]) является предпочтительным, так как интеграл от нее по всем частотам равен интегралу от $f^2(x)$ по всем x; поэтому изменение спектра $f(x)$ при неизменности среднеквадратичной флуктуации приводит к перераспределению интенсивностей между различными частотами при сохранении полной мощности спектра.

Нетрудно видеть, что для получения четкой картины в случае дискретного спектра нужно иметь по-возможности более узкую форму спектральных линий $g^2(\omega)$, что обеспечивается надлежащим выбором функции $G(x)$. Общая стратегия определяется свойствами интегралов от быстро осциллирующих функций [10]. Если $f(x)$ является разрывной, то ее Фурье-образ спадает как $1/\omega$ на больших частотах; если разрыв имеет n-я производная, то соответственно $F(\omega) \sim \omega^{-n-1}$. В случае гладкой $f(x)$ ее интеграл Фурье вычисляется путем сдвига контура в комплексную плоскость и определяется ближайшей сингулярностью или перевальной точкой, что приводит к

[1] На Рис.14 работы [5] Фурье-спектр тонкой проволочки сравнивается со спектром маленького колечка; последний обнаруживает дополнительные осцилляции, связанные с эффектом Ааронова–Бома. При этом апериодические осцилляции не были предметом для обсуждения и их спектр, который в силу резкого обрезания носил хаотический характер, был огрублен авторами и представлен в виде огибающей по осцилляциям. Последнее выявляется путем сопоставления с Рис.12,13 работы [5], где хаотические осцилляции присутствуют в яеном виде.

зависимости $F(\omega) \sim \exp(-\alpha\omega)$. Если регулярная функция получена путем слабого сглаживания сингулярности, то показатель α является малым и экспонента проявлется лишь при очень больших ω, тогда как в остальной области сохраняется поведение, соответствующее сингулярности. В нашем случае требуется сгладить разрывность функции $G(x)$, которой соответствует поведение $g(\omega) \sim \sin\omega a/\omega$. При этом слабое сглаживание не эффективно, а сильное сглаживание приводит к уменьшению $G(x)$ вблизи границ рабочего интервала и потере экспериментальной информации; поэтому требуется некоторый разумный компромисс.

Выберем функцию $G(x)$ в виде симметризованного по x распределения Ферми

$$G(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{(x-\mu)/T} + \mathrm{e}^{(-x-\mu)/T}} =$$

$$= \frac{1}{1 + 2\mathrm{e}^{-\mu/T}\mathrm{ch}(x/T)}, \qquad (9)$$

Фурье-образ которого определяется интегралом

$$g(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\omega x}\, dx}{b\,\mathrm{ch}\beta x + c} = \frac{2\pi}{b\beta \mathrm{sh} x_0} \frac{\sin(\omega x_0/\beta)}{\mathrm{sh}(\omega\pi/\beta)},$$

$$x_0 = \mathrm{arch}(c/b). \qquad (10)$$

В нашем случае при выборе $x = B - \mu_0$ экспериментальные данные соответствуют интервалу $|x| \le \mu_0$ с $\mu_0 = 4$ (при измерении в теслах). Мы приняли $\mu = \mu_0 - 4T$, что обеспечивает малое значение $G(\mu_0) \approx 0.02$ на границе интервала. Как ясно из Рис.2, при малых T в основном сохраняется поведение $g(\omega) = 2\sin\mu_0\omega/\omega$, характерное для резкого обрезания (кривые 1, 2). Разумным представляется выбор $\mu = 2$, $T = 0.5$ (кривая 3), при котором эффективно используется 50% экспериментальных данных, а форма линии примерно такая же, как в случае $\mu = T\ln 2$, когда $x_0 = 0$, $g(\omega) = 2\pi T^2\omega/\mathrm{sh}\pi T\omega$ и осцилляции полностью исчезают (криавя 4).

Обработка экспериментальных данных (Рис.1) с использованием указанной сглаживающей функции приводит к результатам, показанным на Рис.3. Спектр очевидным образом состоит из дискретных линий, что подтверждает концепцию работы [6]. Однако, в интервале $\omega \lesssim 2\pi/\xi_B$ (где ξ_B оценивалось как среднее расстояние между соседними максимумами или минимумами на

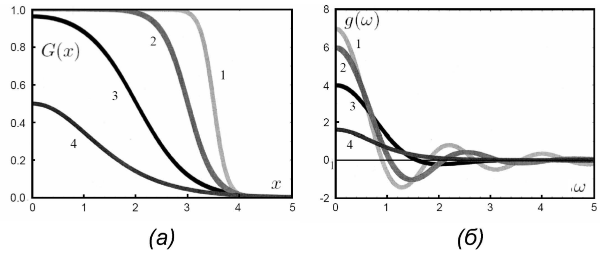

Рис. 2: а) Функция $G(x)$, определенная формулой (9), и (б) ее Фурье-образ $g(\omega)$ при различных значениях μ и T: $1 - \mu = 3.5$, $T = 0.125$; $2 - \mu = 3$, $T = 0.25$; $3 - \mu = 2$, $T = 0.5$; $4 - \mu = T\ln 2$, $T = 0.8$.

Рис.1) [2] вид спектра напоминает дискретный белый шум: в грубом приближении линии эквидистантны, а их интенсивности примерно одинаковы. Поскольку сумма по частотам во многих случаях аппроксимируется интегралом, то дискретный белый шум по многим проявлениям не отличается от непрерывного. Пусть например

$$F(\omega) = \pi \sum_k \left[A_k \delta(\omega + \omega_k) + A_k^* \delta(\omega - \omega_k)\right] H(\omega), \qquad (11)$$

где частоты ω_k эквидистантны ($\omega_{k+1} - \omega_k = \Delta$), модули A_k одинаковы ($|A_k| = A$), а фазы A_k полностью случайны; функция $H(\omega)$ ограничивает спектр интервалом $|\omega| \lesssim \Omega$ и предполагается четной. Тогда определяя $f(x)$ обратным Фурье-преобразованием, имеем для коррелятора

$$\langle f(x) f(x') \rangle = \frac{1}{2} \sum_k A^2 H^2(\omega_k) \mathrm{e}^{i\omega_k(x-x')} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} A^2 \Delta h(x - x'), \qquad (12)$$

где $h(x)$ — Фурье-образ $H^2(\omega)$. Если функция $H(\omega)$ является гладкой, то $h(x)$ экспоненциально убывает на масштабе Ω^{-1}; это согласуется с диаграммными результатами [1, 2, 3, 4].

Таким образом, полученные результаты фактически примиряют две альтернативы, указанные в начале работы. С одной стороны — спектр

[2] При обработке Рис.1 был сильно увеличен и оцифрован вручную. При этом выясняется, что резкие выбросы на Рис.1 связаны с вертикальными штрихами, указывающими экспериментальную погрешность, тогда как фактически зависимость $G(B)$ является гладкой.

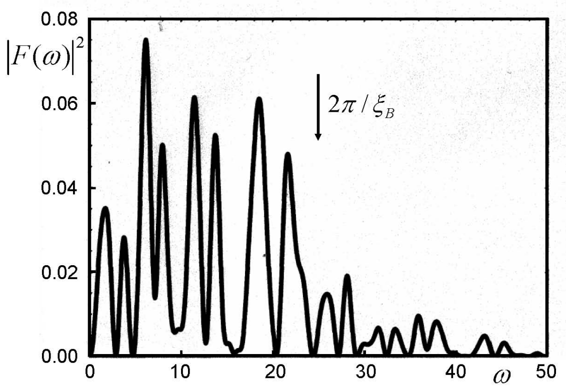

Рис. 3: Фурье-анализ экспериментальных данных Рис.1 со сглаживающей функцией (9) при $\mu = 2$, $T = 0.5$.

дискретный, подтверждая предложенную выше концепцию, согласно которой апериодические осцилляции кондактанса определяются суперпозицией несоизмеримых гармоник. С другой стороны спектр в целом приблизительно соответствует дискретному белому шуму, который по свойствам близок к непрерывному.

Приложение. **Вывод уравнения (2)**

Рассмотрим одномерную модель Андерсона, определяемую дискретным уравнением Шредингера

$$\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} + V_n \Psi_n = E\Psi_n \,, \qquad (A.1)$$

где E — энергия, отсчитанная от центра зоны, V_n — независимые случайные величины с нулевым средним и дисперсией W^2; интеграл перекрытия принят за единицу. Переписывая $(A.1)$ в виде

$$\begin{pmatrix} \Psi_{n+1} \\ \Psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_n \\ \Psi_{n-1} \end{pmatrix} , \qquad (A.2)$$

и итерируя n раз, легко получить

$$\begin{pmatrix} \Psi_{n+1} \\ \Psi_n \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \end{pmatrix} , \qquad (A.3)$$

где матрица τ является произведением n матриц типа $(A.2)$. Для нее справедливо очевидное рекуррентное соотношение, которое в терминах матричных элементов может быть записано в виде

$$y_{n+1} = (E - V_n) y_n + z_n \,, \qquad z_{n+1} = -y_n \,, \quad (A.4)$$

где $y_n = \tau_{12}^{(n-1)}$, $z_n = \tau_{11}^{(n-1)}$, либо $y_n = \tau_{22}^{(n-1)}$, $z_n = \tau_{21}^{(n-1)}$. Существенно, что $y^{(n-1)}$, $z^{(n-1)}$ не содержат величины V_n и могут усредняться независимо от нее. Для вторых моментов нетрудно получить

$$\begin{pmatrix} \overline{y_{n+1}^2} \\ \overline{y_{n+1} z_{n+1}} \\ \overline{z_{n+1}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^2 + W^2 & 2E & 1 \\ -E & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y_n^2} \\ \overline{y_n z_n} \\ \overline{z_n^2} \end{pmatrix} , \qquad (A.5)$$

Предполагая для моментов экспоненциальный рост λ^n, легко видеть, что λ есть собственное значение матрицы в $(A.5)$. Полагая $\lambda = 1 + x$, нетрудно получить уравнение для x, которое в пределе непрерывного уравнения Шредингера имеет вид

$$x\left(x^2 + 4\mathcal{E}\right) = 2W^2 \qquad (A.6)$$

где $\mathcal{E}$ —энергия, отсчитанная от края зоны. Аналогичным образом можно получить уравнение для показателя роста четвертых моментов

$$x\left(x^2 + 4\mathcal{E}\right)\left(x^2 + 16\mathcal{E}\right) = 42W^2x^2 + 96W^2\mathcal{E} \,. \quad (A.7)$$

Структура уравнений для произвольных $2n$-х моментов может быть установлена на основе аргументации раздела 4 работы [6], где используется несколько другой формализм. В глубине разрешенной и запрещенной зон можно ограничиться диагональными элементами в матрицах (43), (47) этой работы и их аналогах для высших моментов; это приводит к уравнению

$$\prod_{k=0}^{2n} \left[x + (n-k)\delta - B_n^k \epsilon^2\right] = O(\epsilon^4) \,, \qquad (A.8)$$

где $\epsilon^2 = W^2/4\mathcal{E}$, $\delta^2 = -\mathcal{E}$, $B_n^k = n(2n-1) + 3k(k-2n)$. Аналогичное уравнение вблизи края зоны

$$x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{k_{max}} C_k W^{2k} x^{2n+1-3k} \,, \quad k_{max} = \left[\frac{2n+1}{3}\right] \qquad (A.9)$$

следует из того, что при $x \sim \delta \sim \epsilon^2$ все члены уравнения имеют один порядок величины, и допустимы лишь комбинации $\delta^{2n}\epsilon^{2m}$ с $n \geq m$, из которых конечными при $\delta \to 0$ остаются лишь $\delta^{2n}\epsilon^{2n} \sim W^{2n}$.

Ландауэровское сопротивление ρ определяется квадратичной формой от матричных элементов τ_{ij} [6], поэтому показатели роста для $\langle \rho^n \rangle$ совпадают с таковыми для $2n$-х моментов τ_{ij}. Выражение для $\langle \rho^n \rangle$ содержит линейную комбинацию соответствующих экспонент, что с учетом комплексности показателей приводит к уравнению (2).

Список литературы

[1] Б. Л. Альтшулер, Письма в ЖЭТФ **41**, 530 (1985).

[2] Б. Л. Альтшулер, Д. Е. Хмельницкий, Письма в ЖЭТФ **42**, 291 (1985).

[3] P. A. Lee, A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985).

[4] P. A. Lee, A. D. Stone, Y.Fukuyama, Phys. Rev. B **35**, 1039 (1987).

[5] S. Washburn, R. A. Webb, Adv. Phys. **35**, 375 (1986).

[6] И. М. Суслов, ЖЭТФ **156**, 950 (2019).

[7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Москва, Наука, 1974.

[8] D. Mailly, M. Sanquer, J. Phys. (France) I **2**, 357 (1992).

[9] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Wetterling, Numerical Recipes in Fortran, Cambridge University Press, 1992.

[10] А. Б. Мигдал, Качественные методы в квантовой теории, Москва, Наука, 1975.