

# Спектральный анализ универсальных флуктуаций кондактанса

И.М.Суслов

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН,

119334, Москва, Россия

E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Универсальные флуктуации кондактанса обычно наблюдаются в виде аperiodических осцилляций в магнетосопротивлении тонких проволочек при изменении магнитного поля  $B$ . Если такие осцилляции являются полностью случайными на масштабах больших  $\xi_B$ , то их Фурье-анализ должен обнаруживать спектр белого шума на частотах, меньших  $\xi_B^{-1}$ . Альтернативный сценарий возникает при сопоставлении с результатами для одномерных систем: в этом случае осцилляции определяются суперпозицией несоизмеримых гармоник и их спектр должен содержать дискретные частоты. Аккуратный Фурье-анализ классического эксперимента Вебба и Вашбуна обнаруживает практически дискретный спектр в согласии со второй концепцией. Однако в целом его форма близка к спектру дискретного белого шума, который по свойствам близок к непрерывному. Более подробный анализ обнаруживает наличие непрерывной компоненты, малость которой объясняется теоретически. Получено множество качественных результатов, подтверждающих представленную картину: распределение фаз, разностей частот и показателей экспоненциального роста согласуются с теоретическими предсказаниями; дискретные частоты слабо зависят от процедуры обработки; обнаруженные сдвиговые осцилляции подтверждают аналогию с одномерными системами. Микроскопические оценки указывают на соответствие полученных результатов с геометрическими размерами образца.

## 1. Введение

Универсальные флуктуации кондактанса [1, 2, 3, 4] обычно наблюдаются в виде аperiodических осцилляций в магнетосопротивлении тонких проволочек при изменении магнитного поля  $B$  [5] (Рис.1) (см. обзоры [6, 7]). Картина флуктуаций выглядит случайной, но полностью воспроизводится при повторных прохождении по магнитному полю. Она характеризует конкретную реализацию случайного потенциала и полностью меняется после отогрева образца до достаточно высокой температуры, при которой примеси получают подвижность и возникает новая примесная конфигурация ("магнитные отпечатки пальцев").

Согласно теории [1, 2, 3, 4], кондактанс  $G(B)$  при фиксированном значении поля  $B$  испытывает флуктуации порядка  $e^2/h$  при изменении примесной конфигурации; флуктуации  $G(B)$  и  $G(B + \Delta B)$  статистически независимы, если  $\Delta B$  превышает некоторый характерный масштаб  $\xi_B$ . Естественно ожидать, что на масштабах, больших  $\xi_B$ , осцилляции  $G(B)$  на Рис.1 являются полностью случайными; тогда их Фурье анализ должен выявить плоский спектр белого шума на частотах, меньших  $\xi_B^{-1}$ .

Альтернативная точка зрения возникает при сопоставлении с результатами для одномерных

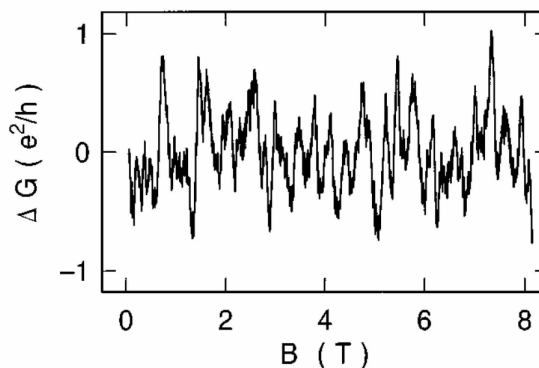


Рис. 1: Кондактанс тонкой проволоочки из Au как функция магнитного поля [5].

систем [8]. Магнитное поле, перпендикулярное к тонкой проволочке создает вдоль нее квадратичный потенциал [9], который эффективно ограничивает длину системы  $L$ ; поэтому изменение магнитного поля аналогично изменению  $L$ . Сопротивление  $\rho$  одномерной системы является сильно флуктуирующей величиной и форма его функции распределения  $P(\rho)$  существенно зависит от нескольких первых моментов. Действительно, Фурье-образ  $P(\rho)$  определяет характери-

стическую функцию

$$F(t) = \langle e^{ipt} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \langle \rho^n \rangle, \quad (1)$$

которая является производящей функцией моментов  $\langle \rho^n \rangle$ . Если известны все моменты распределения, то по ним можно построить  $F(t)$ , после чего  $P(\rho)$  определяется обратным Фурье-преобразованием. Если  $\langle \rho^n \rangle$  растут с  $n$  не слишком быстро, то вклад высших моментов подавлен множителем  $1/n!$ , тогда как несколько первых моментов оказываются существенными. Эти моменты являются осциллирующими функциями  $L$ ,

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= a_1(L) + b_1(L) \cos(\omega_1 L + \varphi_1), \\ \langle \rho^2 \rangle &= a_2(L) + b_2(L) \cos(\omega_2 L + \varphi_2) + \\ &+ b_3(L) \cos(\omega_3 L + \varphi_3), \quad \text{и т. д.}, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $a_s(L)$  и  $b_s(L)$  — монотонные функции. Дело в том, что показатель экспоненциального роста для  $\langle \rho^n \rangle$  определяется алгебраическим уравнением  $(2n+1)$ -го порядка [8], один из корней которого всегда действителен, тогда как остальные комплексны для энергий внутри разрешенной зоны; поэтому имеется  $n$  пар комплексно сопряженных корней. Выражение для  $\langle \rho^n \rangle$  содержит линейную комбинацию соответствующих экспонент, и комплексные корни обеспечивают наличие  $n$  осциллирующих членов. В общем случае частоты  $\omega_s$  являются несоизмеримыми, но их несоизмеримость исчезает в глубине разрешенной зоны при слабом беспорядке (разд.9). Согласно этой картине, осцилляции  $G(B)$  на Рис.1 определяются суперпозицией несоизмеримых гармоник и их Фурье-спектр должен обнаруживать наличие дискретных частот. Косвенным подтверждением этой картины являются приведенные в [8] экспериментальные данные работы [10], согласно которым функция распределения  $P(\rho)$  не является стационарной, а испытывает систематические изменения аperiодического характера.

Из сказанного ясно, что Фурье-анализ зависимости  $G(B)$  (Рис.1) позволяет установить, какой из двух сценариев является более адекватным. Ниже показано, что такой анализ приводит к спектру, который выглядит чисто дискретным (разд.2): это указывает на справедливость второй концепции. При этом противоречий с диаграммными результатами [1, 2, 3, 4] не возникает, так как в целом форма спектра близка к

дискретному белому шуму, который по свойствам аналогичен непрерывному. Более детальный анализ (разд.4) обнаруживает наличие непрерывной компоненты, малость которой теоретически объясняется в разд.5. Зависимость результатов от процедуры обработки обсуждается в разд.3: несмотря на очевидные проблемы, возникающие при отходе от оптимального режима, дискретные частоты спектральных линий обнаруживают удивительную стабильность, свидетельствующую об их объективном происхождении. Анализ действительной и мнимой части Фурье-образа  $F(\omega)$  зависимости  $G(B)$  (Рис.1) обнаруживает наличие быстрых осцилляций, связанных со сдвигом ее аргумента относительно "естественного" начала отсчета, природа которого обсуждается в разд.6. После исключения быстрых осцилляций изучается распределение фазовых сдвигов дискретных гармоник, которое не противоречит их ожидаемой стохастизации (разд.7). Положения экстремумов  $\text{Re}F(\omega)$  и  $\text{Im}F(\omega)$  отличаются от таковых для  $|F(\omega)|$ , что указывает на проявление экспоненциального роста гармоник, ожидаемого из аналогии с одномерными системами (разд.8). Распределение показателей и разностей частот соответствует теоретическим ожиданиям для металлического режима (разд.9). Микроскопические оценки подтверждают соответствие результатов с геометрическими размерами образца (разд.10). Краткое сообщение о результатах работы опубликовано ранее [11].

## 2. Фурье-спектр аperiодических осцилляций

Фурье-анализ зависимости  $G(B)$  (Рис.1) не может быть проведен непосредственно, так как резкий обрыв экспериментальных данных приводит к появлению медленно спадающих осцилляций в ее спектре и хаотизации последнего<sup>1</sup>; для получения четких результатов необходимо использование надлежащей сглаживающей функции. Поясним ситуацию поподробнее.

<sup>1</sup> На Рис.14 работы [5] Фурье-спектр тонкой проволоочки сравнивается со спектром маленького колечка; последний обнаруживает дополнительные осцилляции, связанные с эффектом Ааронова-Бома. При этом аperiодические осцилляции не являлись предметом для обсуждения и их спектр (который в силу резкого обрезания носил хаотический характер) был огрублен авторами и представлен в виде огибающей по осцилляциям. Последнее выявляется путем сопоставления с Рис.12,13 работы [5], где хаотические осцилляции присутствуют в явном виде.

Пусть функция  $f(x)$  определяется суперпозицией дискретных гармоник и является действительной; тогда

$$f(x) = \sum_s A_s e^{i\omega_s x} = \frac{1}{2} \sum_s [A_s e^{i\omega_s x} + A_s^* e^{-i\omega_s x}], \quad (3)$$

где частоты  $\omega_s$  без ограничения общности можно считать положительными. Тогда Фурье-образ  $f(x)$  имеет вид

$$F(\omega) = \pi \sum_s [A_s \delta(\omega + \omega_s) + A_s^* \delta(\omega - \omega_s)], \quad (4)$$

а его модуль

$$|F(\omega)| = \pi \sum_s |A_s| [\delta(\omega + \omega_s) + \delta(\omega - \omega_s)] \quad (5)$$

зависит лишь от интенсивностей спектральных линий и не содержит информации о фазовых сдвигах для соответствующих дискретных гармоник. Поскольку  $|F(\omega)|$  является четной функцией, то можно ограничиться положительными значениями  $\omega$  и опустить первую дельта-функцию в (5).

Поскольку функция  $f(x)$  может быть экспериментально измерена лишь в некотором конечном интервале значений  $x$ , то практически мы имеем

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_s [A_s e^{i\omega_s x} + A_s^* e^{-i\omega_s x}] G(x), \quad (6)$$

где функция  $G(x)$  равна единице внутри рабочего интервала и нулю вне его; в дальнейшем она будет подвержена сглаживанию. Тогда вместо (4) получим

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \sum_s [A_s g(\omega + \omega_s) + A_s^* g(\omega - \omega_s)], \quad (7)$$

где  $g(\omega)$  — Фурье-образ функции  $G(x)$ , который является действительным, если  $G(x)$  выбрана четной. Таким образом, ограничение рабочего интервала приводит к замене дельта-функций на спектральные линии конечной ширины. Если дискретные частоты являются хорошо разделенными, а  $g(\omega)$  сильно локализована вблизи нуля, то можно пренебречь перекрытием функций  $g(\omega \pm \omega_s)$  и записать при положительных частотах

$$|F(\omega)|^2 \approx \frac{1}{4} \sum_s |A_s|^2 g^2(\omega - \omega_s). \quad (8)$$

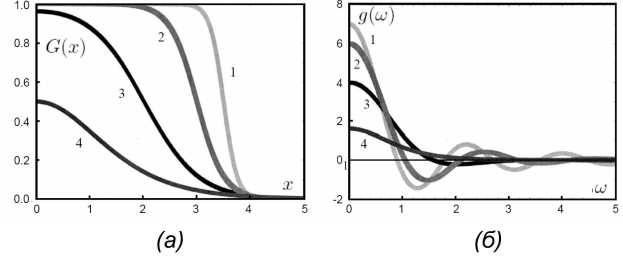


Рис. 2: (а) Функция  $G(x)$ , определенная формулой (9), и (б) ее Фурье-образ  $g(\omega)$  при различных значениях  $\mu$  и  $T$ : 1 —  $\mu = 3.5$ ,  $T = 0.125$ ; 2 —  $\mu = 3$ ,  $T = 0.25$ ; 3 —  $\mu = 2$ ,  $T = 0.5$ ; 4 —  $\mu = T \ln 2$ ,  $T = 0.8$ .

Функция  $|F(\omega)|^2$  (т.н. спектральная плотность мощности [12]) более объективно характеризует относительный вклад различных гармоник, так как интеграл от нее по всем частотам равен интегралу от  $|f(x)|^2$  по всем  $x$ ; поэтому изменение спектра  $f(x)$  при неизменности среднеквадратичной флуктуации приводит к перераспределению интенсивностей между различными частотами при сохранении полной мощности спектра.

Нетрудно видеть, что для получения четкой картины в случае дискретного спектра нужно иметь по-возможности более узкую форму спектральных линий  $g^2(\omega)$ , что обеспечивается надлежащим выбором функции  $G(x)$ . Общая стратегия определяется свойствами интегралов от быстро осциллирующих функций [13]. Если  $f(x)$  является разрывной, то ее Фурье-образ спадает как  $1/\omega$  на больших частотах; если разрыв имеет  $n$ -я производная, то соответственно  $F(\omega) \sim \omega^{-n-1}$ . В случае гладкой  $f(x)$  ее интеграл Фурье вычисляется путем сдвига контура в комплексную плоскость и определяется ближайшей сингулярностью или перевальной точкой, что приводит к зависимости  $F(\omega) \sim \exp(-\alpha\omega)$ . Если регулярная функция получена путем слабого сглаживания сингулярности, то показатель  $\alpha$  является малым и экспонента проявляется лишь при очень больших  $\omega$ , тогда как в остальной области сохраняется поведение, соответствующее сингулярной функции. В нашем случае требуется сгладить разрывность  $G(x)$ , которой соответствует поведение  $g(\omega) \sim \sin \omega a / \omega$ . При этом слабое сглаживание не эффективно, а сильное сглаживание приводит к уменьшению  $G(x)$  вблизи границ рабочего интервала и потере экспериментальной информации; поэтому требуется некоторый разумный компромисс.

Выберем  $G(x)$  в виде симметризованной по  $x$  фермиевской функции

$$G(x) = \frac{1}{1 + e^{(x-\mu)/T} + e^{(-x-\mu)/T}} = \frac{1}{1 + 2e^{-\mu/T} \text{ch}(x/T)}, \quad (9)$$

интеграл Фурье для которой вычисляется точно

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x} dx}{b \text{ch}\beta x + c} = \frac{2\pi}{b\beta \text{sh}x_0} \frac{\sin(\omega x_0/\beta)}{\text{sh}(\omega\pi/\beta)}, \quad (10)$$

$$x_0 = \text{arch}(c/b).$$

В нашем случае при выборе  $x = B - \mu_0$  экспериментальные данные соответствуют интервалу  $|x| \leq \mu_0$  с  $\mu_0 = 4$  (при измерении в теслах). Мы приняли  $\mu = \mu_0 - 4T$ , что обеспечивает малое значение  $G(\mu_0) \approx 0.02$  на границе интервала. Как ясно из Рис.2, при малых  $T$  в основном сохраняется поведение  $g(\omega) = 2 \sin \mu\omega/\omega$ , характерное для резкого обрезания. Разумным представляется выбор  $\mu = 2$ ,  $T = 0.5$ , использованный в работе [11]; при этом эффективно используется 50% экспериментальных данных, а ширина линии примерно такая же, как в случае предельного сглаживания, соответствующего  $\mu = T \ln 2$ , когда  $x_0 = 0$  и

$$g(\omega) = \frac{2\pi T^2 \omega}{\text{sh}\pi T \omega} \quad (11)$$

и осцилляции полностью исчезают. Для настоящей работы удобен выбор (11), при котором используется несколько меньше информации, но форма спектра практически такая же, как в [11].

Спектральный анализ экспериментальных данных (Рис.1) осуществляется путем вычисления интеграла Фурье в области  $|x| < \mu_0$  с использованием указанной сглаживающей функции: полученные результаты представлены на Рис.3. Спектр очевидным образом состоит из дискретных линий, что подтверждает концепцию работы [8]. Однако, в интервале  $\omega \lesssim 2\pi/\xi_B$  (где  $\xi_B$  оценивалось как среднее расстояние между соседними максимумами или минимумами на Рис.1)<sup>2</sup> вид спектра напоминает дискретный белый шум: в

<sup>2</sup> При обработке Рис.1 был сильно увеличен и оцифрован вручную. При этом выясняется, что резкие выбросы на рисунке связаны с вертикальными штрихами, указывающими экспериментальную погрешность, тогда как фактически кондактанс является гладкой функцией магнитного поля.

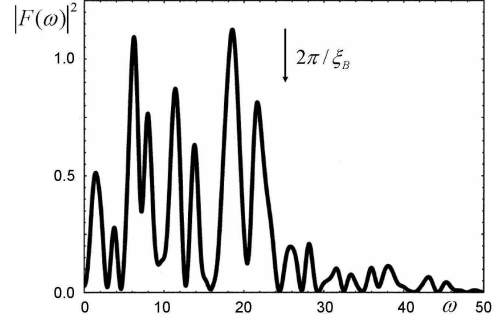


Рис. 3: Фурье-анализ экспериментальных данных Рис.1 со сглаживающей функцией (9) при  $\mu = T \ln 2$ ,  $T = 0.8$ . На этом и последующих рисунках значения  $F(\omega)$  умножены на 10.

грубом приближении линии эквидистантны, а их интенсивности примерно одинаковы. Поскольку сумма по частотам во многих случаях аппроксимируется интегралом, то дискретный белый шум по многим проявлениям не отличается от непрерывного. Пусть например

$$F(\omega) = \pi \sum_s [A_s \delta(\omega + \omega_s) + A_s^* \delta(\omega - \omega_s)] H(\omega), \quad (12)$$

где частоты  $\omega_s$  эквидистантны ( $\omega_s = s\Delta$ ), модули  $A_s$  одинаковы ( $|A_s| = A$ ), а фазы  $A_s$  полностью случайны; функции  $H(\omega)$  ограничивает спектр интервалом  $|\omega| \lesssim \Omega$  и предполагается четной. Тогда определяя  $f(x)$  обратным Фурье-преобразованием, имеем для коррелятора

$$\begin{aligned} \langle f(x)f(x') \rangle &= \frac{1}{2} \sum_s A^2 H^2(\omega_s) e^{i\omega_s(x-x')} \approx \\ &\approx \frac{1}{2} A^2 \Delta^{-1} h(x-x'), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $h(x)$  — Фурье-образ  $H^2(\omega)$ . Если функции  $H(\omega)$  является гладкой, то  $h(x)$  экспоненциально убывает на масштабе  $\Omega^{-1}$ , что согласуется с диаграммными вычислениями [1, 2, 3, 4].

Таким образом, полученные результаты фактически примиряют две альтернативы, указанные в начале работы. С одной стороны — спектр дискретный, подтверждая концепцию работы [8]. С другой стороны, его форма приблизительно соответствует дискретному белому шуму, который по свойствам близок к непрерывному.

### 3. Зависимость результатов от процедуры обработки

Обсудим зависимость результатов от выбора сглаживающей функции (9), которая при  $\mu = T \ln 2$  приводит к форме линии (11) и зависит от одного параметра  $\beta = 1/T$ . При выборе  $\beta = 1.25$  она обеспечивает малое значение  $G(\mu_0) \approx 0.02$  на границе рабочего интервала и спектр  $|F(\omega)|^2$  имеет четкую дискретную форму (Рис.4,а), которая практически не меняется в интервале  $\beta = 1.0 \div 1.5$ . При увеличении  $\beta$  форма линий уширяется в соответствии с (11) и происходит их частичное слияние (Рис.4,б). При уменьшении  $\beta$  значение  $G(\mu_0)$  перестает быть малым и восстанавливается резкое обрезание, приводящее к возникновению паразитных осцилляций и появлению дополнительных максимумов в  $|F(\omega)|^2$  (Рис.4,в). Смысл введения сглаживающей функции как раз и состоит в устранении таких осцилляций, не имеющих отношения к реальному спектру.

Несмотря на очевидные проблемы, возникающие при отклонении от оптимального режима обработки, частоты дискретных гармоник обнаруживают удивительную стабильность при изменении  $\beta$  более, чем на порядок величины (Рис.5), и нет никаких сомнений в их объективном происхождении. Небольшая зависимость от  $\beta$  связана с изменением формы линий и их взаимным влиянием друг на друга. Фактически Рис.5 демонстрирует, насколько хорошо работает приближение независимых гармоник.

Если бы экспериментальный диапазон изменения поля  $V$  был меньше, то режим оптимального разрешения линий (Рис.4,а) мог бы отсутствовать и происходил бы переход от Рис.4,б со слившимися линиями к Рис.4,в с паразитными осцилляциями. Можно предполагать, что и в настоящих условиях эксперимента разрешение линий является неполным и имеет место их частичное слияние.

### 4. Непрерывная компонента спектра

Фурье-спектр на Рис.3 выглядит чисто дискретным, что представляется не вполне естественным. Аналогия с одномерными системами приводит к выводу, что функции распределения  $P(\rho)$  испытывает систематические изменения детерминированной природы, приводящие к осцилляциям  $\rho$  в конкретном образце. Но аналогичные осцилляции (случайного характера) должны

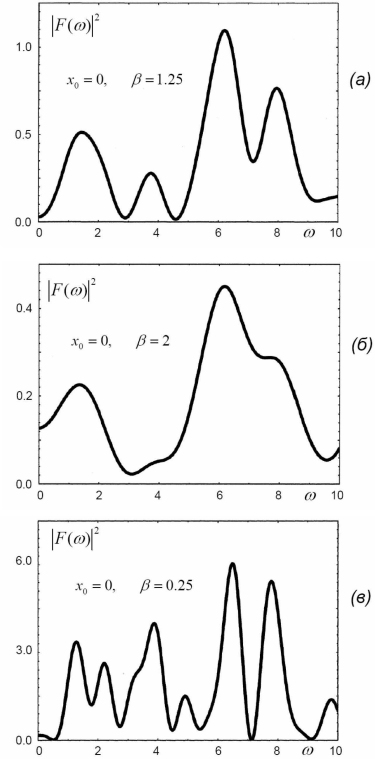


Рис. 4: Зависимость спектра Фурье от выбора сглаживающей функции: (а)  $\beta = 1.25$ , (б)  $\beta = 2.0$ , (в)  $\beta = 0.25$ .

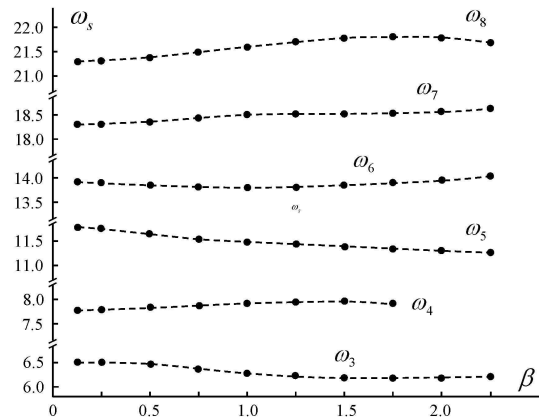


Рис. 5: Зависимость частот наиболее интенсивных гармоник от параметра  $\beta = 1/T$ , определяющего форму сглаживающей функции.

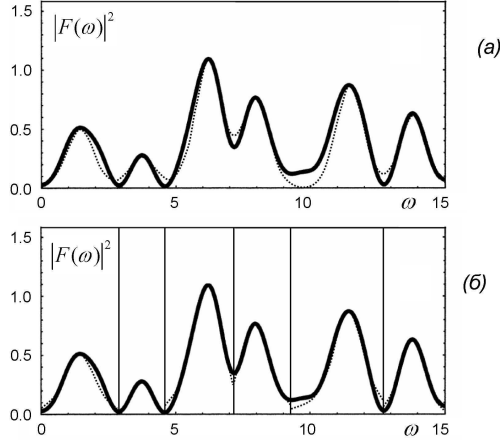


Рис. 6: (а) Сравнение экспериментального спектра Фурье (сплошная линия) с соотношением (8) (пунктир); частоты  $\omega_s$  и амплитуды  $|A_s|$  определялись по положению и высоте максимумов на Рис.3. (б) Подгонка формы отдельных линий по формуле (18).

иметь место и при стационарном распределении  $P(\rho)$  ввиду конечности ширины последнего. Было бы более естественно, если бы Рис.3 содержал непрерывную компоненту, на фоне которой проявлялись дискретные линии. Фактически непрерывная компонента действительно присутствует, и ниже мы попытаемся ее оценить.

Согласно (8), в пренебрежении взаимодействием гармоник спектр  $|F(\omega)|^2$  представляется в виде линейной комбинации функций  $g^2(\omega - \omega_s)$ , форма которых заранее известна. Проверка соотношения (8) представлена на Рис.6,а, где частоты  $\omega_s$  определялись по положениям максимумов на Рис.3, а амплитуды  $|A_s|$  — по высоте этих максимумов; в отношении формы  $g^2(\omega - \omega_s)$  никакой подгонки не делалось. Согласие выглядит удовлетворительным, но не является полным: ширина линий отличается от теоретической то в большую, то в меньшую сторону, а наблюдаемая форма линий не всегда симметрична.

Естественно предположить, что это связано с наличием непрерывной компоненты спектра. Считая последнюю медленно меняющейся и отсчитывая  $\omega$  от центра линии, можно положить

$$F(\omega) = Ag(\omega) + B \quad (14)$$

и считать  $B$  постоянным в пределах ширины линии. Тогда

$$|F(\omega)|^2 = c_1 g^2(\omega) + c_2 g(\omega) + c_3, \quad (15)$$

где

$$c_1 = |A|^2, \quad c_2 = 2|A||B| \cos \chi, \quad c_3 = |B|^2 \quad (16)$$

и  $\chi$  определяется разностью фаз  $A$  и  $B$ . Счита  $g(\omega)$  нормированной на единицу при  $\omega = 0$ , нетрудно понять, что функция  $g^2(\omega)$  соответствует более узкому максимуму, чем  $g(\omega)$ ; поэтому линия уширяется при  $c_2 > 0$  и сужается при  $c_2 < 0$ , оказываясь несимметричной в случае существенного изменения  $B$  вблизи максимума. Согласно (15),  $|F(\omega)|^2$  определяется суперпозицией трех базисных функций  $g^2(\omega)$ ,  $g(\omega)$  и 1, коэффициенты которой можно установить из условия минимизации среднеквадратичного отклонения. Это стандартная процедура обработки [12], которая является линейной и однозначной. Однако, практически она приводит к нефизическим результатам ввиду нарушения услови

$$|c_2| \leq 2\sqrt{|c_1||c_3|}, \quad (17)$$

следующего из (16). По-видимому, оптимальная подгонка соответствует предельным значениям  $\pm 1$  для  $\cos \chi$ ; в этом случае параметры  $A$  и  $B$  можно считать действительными<sup>3</sup>, полага

$$|F(\omega)|^2 = [(F_0 - B)g(\omega) + B]^2, \quad (18)$$

где  $F_0 = |F(0)|$ . Здесь учтено, что используемая процедура оправдана вблизи максимума  $|F(\omega)|^2$ , поэтому его положение естественно держать фиксированным. Подгонка по формуле (18) отдельно для каждой линии приводит к Рис.6,б: для большинства линий согласие практически идеально, а отсутствие такового для некоторых из них по-видимому связано с наличием второстепенных гармоник, которые "прячутся" на фоне основных линий.

После того, как коэффициенты  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  определены, можно исключить из  $|F(\omega)|^2$  вклады, пропорциональные  $g^2(\omega)$  и  $g(\omega)$ . Производя такую процедуру для всех линий, получим "остаточный" спектр, приведенный на Рис.7. Резкие максимумы в этом

<sup>3</sup> Подчеркнем, что действительность параметров  $A$  и  $B$  является эффективной. Фактически их фазы оказываются скоррелированными, либо совпадая друг с другом, либо отличаясь на  $\pi$ . По-видимому, фазы дискретных гармоник подстраиваются под конкретную реализацию непрерывной компоненты; механизм этого явления нам не известен и его нужно рассматривать как экспериментальный факт.

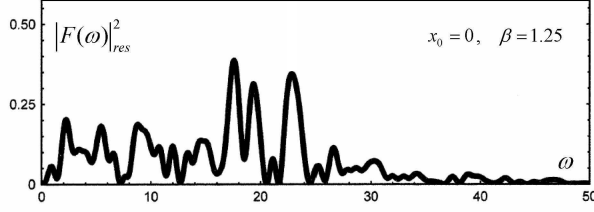


Рис. 7: Остаточная часть спектра, полученная путем исключения вкладов основных дискретных частот. Резкие максимумы по-видимому связаны со второстепенными гармониками, которые "прятались" на фоне основных спектральных линий, тогда как остальное естественно приписать непрерывной компоненте спектра.

спектре по-видимому связаны со второстепенными дискретными гармониками, тогда как все остальное естественно приписать непрерывной компоненте; она составляет 10 – 15% от амплитуды основных линий, и причина ее малости обсуждается в разд.5. Спектр непрерывной компоненты приблизительно соответствует белому шуму для  $\omega \lesssim 2\pi/\xi_B$ , но предположенная медленность ее изменения не имеет места; поэтому полученный результат следует считать лишь грубой оценкой.<sup>4</sup>

Строго говоря, величина  $B$  в (15) представляет не только непрерывную компоненту, но и вклады соседних дискретных линий. Это не влияет на правильность определения амплитуды  $A$ , что подтверждается аналогичным вычислением для сглаживающей функции с  $\mu = 2$ ,  $T = 0.5$ : "хвосты" последней существенно отличны от таковых для функции (11), но результат не слишком отличается от Рис.7.

Заметим, что спектр  $|F(\omega)|^2$  на Рис.3 выглядит "более дискретным чем он есть на самом деле: дело в том, что величина  $B$ , оказываясь приблизительно постоянной в окрестностях максимумов, меняет знак в промежутках между некоторыми линиями. Остаточный спектр на Рис.7 не сводится к величине  $B$ , но содержит также погрешности обработки и эффекты интерференции между соседними линиями.

## 5. Почему спектр практически дискретный?

<sup>4</sup> Для несимметричных линий обработка неоднозначна ввиду возможности подгонки их правого или левого склона. Эта неоднозначность использована для того, чтобы избежать появления нефизических отрицательных значений для  $|F(\omega)|^2_{res}$ .

Обсудим причины малости непрерывной компоненты спектра. Согласно [14]-[19] эволюция распределения  $P(\rho)$  в одномерных системах описывается уравнением диффузионного типа

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial L} = \alpha \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho(1+\rho) \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \right], \quad (19)$$

в котором  $\alpha L$  играет роль времени. Это уравнение получено в приближении случайных фаз, которое хорошо работает в квазиметаллическом режиме, т.е. в глубине разрешенной зоны при слабом беспорядке [8]. Естественным начальным условием для (19) является

$$P(\rho) = \delta(\rho) \quad \text{for} \quad L = 0, \quad (20)$$

так как при нулевой длине системы ее сопротивление равно нулю независимо от реализации случайного потенциала. Такое начальное условие приводит к распределению

$$P(\rho) = (\alpha L)^{-1} \exp \{-\rho/\alpha L\} \quad (21)$$

при малых  $L$  (когда типичные  $\rho$  малы) и логнормальному распределению при больших  $L$  (когда типичные  $\rho$  велики). Для распределения (21) среднее значение  $\langle \rho \rangle$  совпадает со среднеквадратичным отклонением  $\sigma$ , тогда как в логнормальном режиме  $\sigma$  растет быстрее, чем  $\langle \rho \rangle$ .

Рассмотрим более общее начальное условие, смысл которого обсуждается ниже:

$$P(\rho) = \delta(\rho - \rho_0) \quad \text{при} \quad L = L_0. \quad (22)$$

Решение уравнения (19) с начальным условием (22) близко к гауссовскому при  $L$ , близких к  $L_0$  (см. Приложение 1), тогда как при больших  $L$  восстанавливается распределение (21) или логнормальное распределение, так как конечность  $\rho_0$  и  $L_0$  становится несущественной. В условиях близости  $P(\rho)$  к гауссовскому распределению оно адекватно характеризуется двумя первыми моментами, эволюцию которых легко исследовать (см. Приложение 1): типичная ситуация представлена на Рис.8. Нетрудно видеть, что  $\langle \rho \rangle$  существенно превышает  $\sigma$  в окрестности  $L_0$  шириной порядка  $L_0$ .

Обсудим смысл начального условия (22). Будем измерять сопротивление  $\rho$  системы на длине  $L_0$ , создавая различные примесные конфигурации<sup>5</sup>; при достаточно большом числе конфигураций мы

<sup>5</sup> Это можно делать практически путем отогрева образца до достаточно высокой температуры.

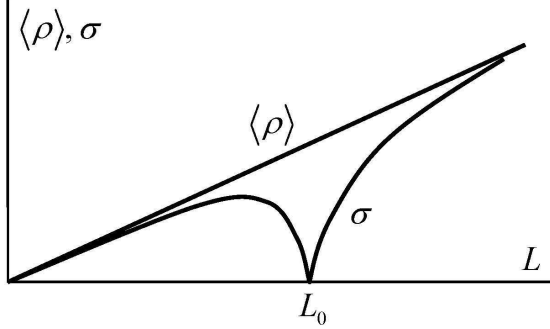


Рис. 8: Поведение  $\langle \rho \rangle$  и  $\sigma$  в металлическом режиме для начального условия (22). При выборе  $\rho_0 = \langle \rho \rangle$ , принятом на рисунке, зависимость  $\langle \rho \rangle$  от  $L$  остается такой же, как для начального условия (20). Качественная картина не меняется, если для  $\rho_0$  выбрано типичное значение из распределения (21).

воспроизведем распределение (21). Теперь изменим процедуру и будем отбирать только конфигурации, для которых  $\rho$  попадает в малый интервал вокруг  $\rho_0$ : тем самым искусственно создается ансамбль с узким распределением типа (22), эволюция которого приводит к картине, представленной на Рис.8. Теперь возьмем один образец, сопротивление которого равно  $\rho_0$  на длине  $L_0$ . Зависимость  $\rho(L)$  для такого образца может быть получена теоретически, если известны все детали примесной конфигурации. Обычно такая информация отсутствует и известны лишь общие статистические свойства случайного потенциала. В этом случае можно установить лишь приблизительный коридор возможностей для зависимости  $\rho(L)$ , который и иллюстрируется на Рис.8.

Уравнение (19) получено в приближении случайных фаз, которое устраняет все осцилляционные эффекты. Однако, эволюцию  $\langle \rho \rangle$  можно исследовать точно, не прибегая ни к каким предположениям (см. Приложение 2). В квазиметаллическом режиме для естественных идеальных контактов [8] справедлив результат

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 + \frac{1+2\rho_0}{2} \left( e^{2\epsilon^2 l} - 1 \right) + \frac{\epsilon^2}{\delta} \sqrt{\rho_0(1+\rho_0)} \left[ e^{2\epsilon^2 l} \sin \psi - e^{-\epsilon^2 l} \sin(2\delta l + \psi) \right], \quad (23)$$

полученный для дискретной модели Андерсона; здесь  $\delta = k_F a_0$ ,  $\epsilon^2 = W^2/4\delta^2$ ,  $l = (L-L_0)/a_0$ ,  $k_F$  — фермиевский импульс,  $a_0$  — постоянная решетки,  $W$  — амплитуда случайного потенциала,  $\psi$  определяется разностью фаз, входящих в трансфер-матрицу

заданную на масштабе  $L_0$ . Нетрудно видеть существование осцилляций, период которых определяется дебройлевской длиной волны ( $2\delta l = 2k_F L$  при  $L_0 = 0$ ); их амплитуда может быть сравнима с  $\rho_0 \ll 1$  несмотря на наличие малого параметра  $\epsilon^2/\delta$ . В приближении случайных фаз величина  $\psi$  полностью стохастизирована, и усреднение по ней устраняет осцилляции, восстанавливая результат, следующий из уравнения (19) (см. (A.6) в Приложении 1). За пределами металлического режима ( $\epsilon^2 \gtrsim \delta$ ) амплитуда осцилляций заведомо превышает  $\rho_0$ ,

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 + \frac{1}{3} \left( \frac{\epsilon^2}{\delta} \right)^{2/3} \left( \frac{1+2\rho_0}{2} - \cos \psi \sqrt{\rho_0(1+\rho_0)} \right) \cdot \left[ e^{x_1 l} - 2e^{-x_1 l/2} \cos \left( \frac{\sqrt{3}x_1 l}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right], \quad (24)$$

и они не исчезают при усреднении по  $\psi$  ввиду принципиальной неприменимости приближения случайных фаз [8] (здесь  $x_1 = (8\epsilon^2\delta^2)^{1/3}$ ). Амплитуда осцилляций в металлическом режиме возрастает при наличии чужеродных контактов

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 + \frac{1+2\rho_0}{2} \left[ -1 + \Delta_2^2 e^{2\epsilon^2 l} - \Delta_1^2 e^{-\epsilon^2 l} \cos 2\delta l \right] + \Delta_1 \sqrt{\rho_0(1+\rho_0)} \cdot \left\{ e^{2\epsilon^2 l} \Delta_2 \cos \psi - e^{-\epsilon^2 l} [(\Delta_2 - 1) \cos \psi \cos 2\delta l + \cos(2\delta l + \psi)] \right\}, \quad (25)$$

где параметры  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  определены в Приложении 2 и могут быть велики.

Таким образом, при достаточно общих условиях амплитуда осцилляций  $\langle \rho \rangle$  сравнима с  $\rho_0$ , и в окрестности  $L_0$  заведомо превышает  $\sigma$ . Для высших моментов возможность получения результатов типа (23–25) выглядит практически нереальной из-за громоздкости вычислений, и можно привести лишь общие соображения. Для второго момента  $\langle \rho^2 \rangle$  естественно ожидать, что амплитуда осцилляций сравнима с  $\rho_0^2$  и существенно превышает величину  $\sigma^2$ . Поэтому изменение ширины распределения за счет систематических изменений  $P(\rho)$  существенно превышает ширину распределения в отсутствие осцилляций. Поэтому и осцилляции высших моментов также оказываются существенными.

Применимость проведенного анализа к рассматриваемой ситуации определяется тем, что для сглаживающей функции с  $\mu = 2$ ,  $\beta = 2$ , использованной в [11], эффективно задействован интервал



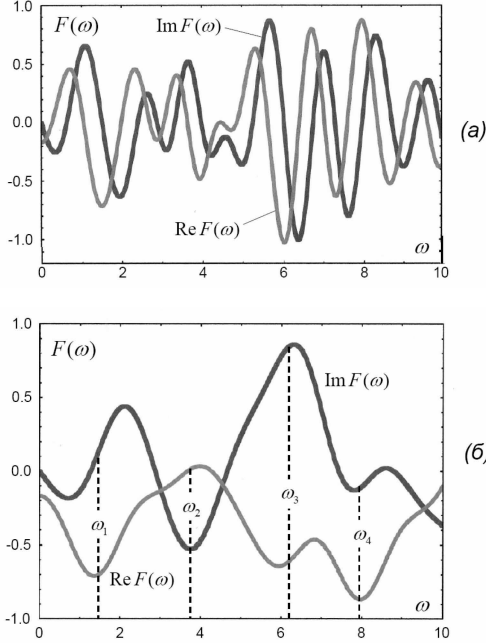


Рис. 9: (а) Поведение действительной и мнимой части  $F(\omega)$  свидетельствует о наличии сдвиговых осцилляций  $e^{i\omega a}$  с  $a = 4.3$ . (б) Поведение  $\text{Re}F(\omega)$  и  $\text{Im}F(\omega)$  после исключения сдвиговых осцилляций; пунктиром отмечены положения максимумов для  $|F(\omega)|^2$ .

$B = 2 \div 6$  Тл, соответствующий изменению поля в 3 раза. Ввиду  $L \propto B^{-1/2}$ , это соответствует изменению  $L$  в 1.7 раза<sup>6</sup>, а при выборе  $L_0$  в середине интервала отклонения от  $L_0$  оказываются на уровне 30%. Для сглаживающей функции с  $\mu = T \ln 2$ , приводящей к (11), это отклонение еще меньше. Заметим, что ситуация не изменится при увеличении экспериментального диапазона используемых полей, так как соображения по выбору сглаживающей функции остаются прежними: изменяется лишь значение  $\mu_0$  при сохранении всех пропорций на Рис.2.

## 6. Сдвиговые осцилляции

<sup>6</sup> Масштаб  $L$  оценивается как значение координаты  $x$ , при котором квадратичный потенциал  $m\omega_B^2 x^2$  [9] сравнивается с энергией Ферми  $\epsilon_F$ , так что  $L \propto B^{-1}$ . Однако, если энергия  $\epsilon_F$  сравнима с первым уровнем Ландау, то ее нужно заменить на  $\hbar\omega_B = \hbar eB/mc$ , что дает зависимость  $L \propto B^{-1/2}$ . Как ясно из разд.10, вблизи середины экспериментального интервала полей вторая оценка более адекватна.

Возвращаясь к формулам раздела 2, нетрудно заметить, что выражение (7) является более обоснованным, чем (8): если первое является точным следствием (6), то второе предполагает слабое перекрытие спектральных линий. Можно ожидать, что обработка на основе (7) с использованием представления (14) и подгонкой по отдельности действительной и мнимой части  $F(\omega)$  приведет к более плавной зависимости для  $|F(\omega)|_{res}^2$ . К сожалению, эти ожидания не подтверждаются: получаемая картина не слишком отличается от Рис.7 и не оправдывает более сложной обработки. Однако, изучение действительной и мнимой части  $F(\omega)$  выявляет много интересного, что определяет содержание этого и последующих разделов.

Зависимости  $\text{Re}F(\omega)$  и  $\text{Im}F(\omega)$  оказываются быстро осциллирующими (см. Рис.9,а). Причину осцилляций легко понять: если  $F(\omega)$  есть Фурье-образ  $f(x)$ , то сдвиг начала отсчета  $x$  приводит к соответствию

$$f(x - a) \iff e^{i\omega a} F(\omega) \quad (26)$$

и при больших  $a$  появляются быстрые осцилляции. В связи с этим возникает вопрос о "естественном" выборе начала отсчета, для которого Фурье-образ меняется медленно. По среднему периоду осцилляций на Рис.9,а можно установить, что  $a = 4.3$  и исключение множителя  $\exp(i\omega a)$  приводит к тому, что  $\text{Re}F(\omega)$  и  $\text{Im}F(\omega)$  изменяются на том же масштабе, что и  $|F(\omega)|$  (Рис.9,б). Естественное начало отсчета определяется условием  $x = B - \mu_0 = a$  и соответствует магнитному полю  $B_0 = 8.3$  Тл, лежащему за верхней границей экспериментального диапазона полей. Учитывая, что большие поля соответствуют малым размерам системы, можно предложить следующую интерпретацию.

При изучении эволюции  $P(\rho)$  по мере изменения длины  $L$  одномерной системы естественным началом отсчета является  $L = 0$ . Однако, если эволюция начинается с конечного масштаба  $L_0$ , то при больших  $L$  возникает такое же распределение, как и в случае  $L_0 = 0$ . Поэтому, изучая ситуацию при больших  $L$  и экстраполируя к начальной стадии эволюции, невозможно установить, с какого масштаба она начинается<sup>7</sup>: можно лишь утверждать, что этот масштаб мал по сравнению с рассматриваемыми. В терминах магнитного поля это означает, что эволюция начинается с неко-

<sup>7</sup> Такая экстраполяция осложняется тем, что существуют факторы, сдвигающие начало отсчета  $L$  (см. разд.5 в [8]).

торого большого поля  $B_0$ . Однако, ввиду нелинейного характера зависимости  $L \propto B^{-1/2}$  значение  $B_0$ , получаемое в результате линейной экстраполяции<sup>8</sup> оказывается не слишком большим.

Предложенная интерпретация представляется логичной и является косвенным подтверждением аналогии с одномерными системами. Формальные аргументы в отношении выбора начала отсчета представлены в Приложении 3.

### 7. Распределение фаз

После того, как установлено естественное начало отсчета аргумента  $f(x)$ , результаты для действительной и мнимой части  $F(\omega)$  могут быть использованы для дальнейшего анализа. Оценивая значения  $\text{Re}F(\omega)$  и  $\text{Im}F(\omega)$  в точках максимума  $|F(\omega)|^2$ , можно установить комплексные фазы коэффициентов  $A_s$  в (6 – 8). Их распределение иллюстрируется на Рис.10.

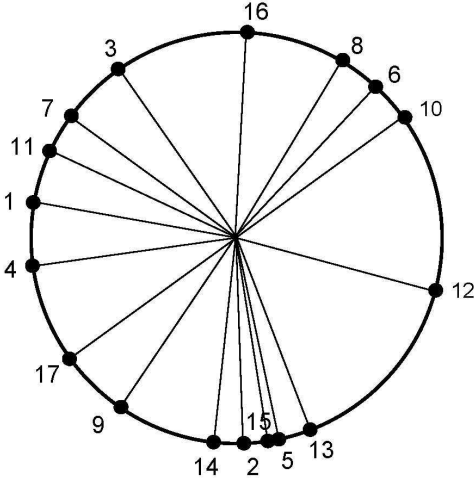


Рис. 10: Распределение фазовых множителей  $e^{i\varphi_s}$  на единичном круге; цифры у точек указывают значение  $s$ .

Как обсуждалось в разд.2, дискретный белый шум оказывает аналогичным непрерывному, если фазы  $A_s$  полностью случайны. Согласно Рис.10,

<sup>8</sup> Эффективна линейность экстраполяции связана с тем, что главный вклад в  $F(\omega)$  происходит от середины экспериментального интервала полей (см. разд.5), где связь  $L$  и  $B$  практически линейна.

их распределение достаточно равномерно и не противоречит ожидаемой стохастизации. Было бы интересно проверить, как меняется распределение фаз при переходе к другим примесным конфигурациям.

### 8. Проявления экспоненциального роста

Согласно формуле (7), вклады дискретных гармоник в  $F(\omega)$  пропорциональны  $g(\omega - \omega_s)$  и в пренебрежении их взаимодействием должны приводить к экстремумам  $\text{Re}F(\omega)$  и  $\text{Im}F(\omega)$  в точках  $\omega_s$ . Однако, Рис.9,б демонстрирует, что экстремумы  $\text{Re}F(\omega)$  и  $\text{Im}F(\omega)$  находятся в разных точках, не совпадающих с максимумами  $|F(\omega)|^2$ . Это указывает на несправедливость формулы (7) и ставит под сомнение исходное выражение (6), следствием которого она является.

Вспомним, что согласно (2) амплитуды осцилляций не являются постоянными, а подвержены экспоненциальному росту. С учетом последнего вместо (6) нужно использовать выражение

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_s [A_s e^{i\omega_s x + \alpha_s x} + A_s^* e^{-i\omega_s x + \alpha_s x}] G(x), \quad (27)$$

что вместо (7) приводит к результату

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \sum_s [A_s g(\omega + \omega_s - i\alpha_s) + A_s^* g(\omega - \omega_s - i\alpha_s)]. \quad (28)$$

Сосредоточимся на вкладе одной гармоники  $\omega_s$  и, изменяя начало отсчета  $\omega$ , положим

$$A = A' + iA'' = |A|e^{i\varphi}, \quad g(\omega - i\alpha) = g_1(\omega) + ig_2(\omega), \quad (29)$$

Если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — положения экстремумов  $\text{Re}F(\omega)$  и  $\text{Im}F(\omega)$ , то справедливы соотношения

$$\begin{aligned} A'g_1'(\omega_1) - A''g_2'(\omega_1) &= 0, \\ A'g_2'(\omega_2) + A''g_1'(\omega_2) &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

и фаза  $\varphi$  коэффициента  $A$  определяется условием

$$\text{tg } \varphi = \frac{g_1'(\omega_1)}{g_2'(\omega_1)} = -\frac{g_2'(\omega_2)}{g_1'(\omega_2)}. \quad (31)$$

Если экспериментальные значения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  известны, то алгоритм определения  $\varphi$  и  $\alpha$  состоит в следующем. Согласно (29),  $g_1(\omega)$  и  $g_2(\omega)$  зависят от  $\alpha$ , причем  $g_2(\omega) \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ; поэтому при малых  $\alpha$  первая дробь в (31) велика, а вторая мала

по абсолютной величине. Увеличивая  $\alpha$ , можно добиться равенства (31), что определяет значения  $\text{tg } \varphi$  и  $\alpha$ . Поскольку по известной величине тангенса можно определить  $\varphi$  с точностью до аддитивных вкладов, кратных  $\pi$ , то выбор правильного квадранта для  $\varphi$  осуществляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} A'g_1(\omega_1) - A''g_2(\omega_1) &= F_1, \\ A'g_2(\omega_2) + A''g_1(\omega_2) &= F_2, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — значения  $\text{Re}F(\omega)$  и  $\text{Im}F(\omega)$  в точках экстремума.

Если функция  $g(\omega)$  в (11) нормирована на единицу при  $\omega = 0$ , то полага

$$z = \pi T\omega, \quad \gamma = \pi T\alpha, \quad (33)$$

имеем

$$\begin{aligned} g_1(\omega) &= \frac{\cos\gamma z \text{sh}z + \gamma \sin\gamma \text{ch}z}{\text{sh}^2z + \sin^2\gamma}, \\ g_2(\omega) &= \frac{\sin\gamma z \text{ch}z - \gamma \cos\gamma \text{sh}z}{\text{sh}^2z + \sin^2\gamma}, \\ |g(\omega + i\alpha)|^2 &= \frac{z^2 + \gamma^2}{\text{sh}^2z + \sin^2\gamma}. \end{aligned} \quad (34)$$

Нетрудно видеть, что экстремумы  $g_1(\omega)$  и  $|g(\omega + i\alpha)|$  имеют место при  $\omega = 0$ , т.е. конечность  $\alpha$  не влияет на их положение; соответственно частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  естественно отсчитывать от нуля. Функция  $g_2(\omega)$  является нечетной и ее мала добавка к  $g_1(\omega)$  сдвигает экстремум в ту или другую сторону, в зависимости от знака добавки. Для функций  $\text{Re}F(\omega)$  и  $\text{Im}F(\omega)$  добавки к  $g_1(\omega)$ , пропорциональные  $g_2(\omega)$ , имеют противоположные знаки, что обеспечивает разные знаки для  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . При малых  $\alpha$  можно ограничиться в (34) первым порядком по  $\gamma$  и с учетом малости  $\omega_1$  и  $\omega_2$  получить

$$\text{tg}\varphi = -\frac{\omega_1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\omega_2}, \quad \alpha^2 = -\omega_1\omega_2. \quad (35)$$

При этом из (32) следует  $A' \approx F_1$ ,  $A'' \approx F_2$ , что позволяет установить знак  $\alpha$  и выбрать правильный квадрант для фазы  $\varphi$ , считая, что она находится в интервале  $(-\pi, \pi)$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{-\omega_1\omega_2} \text{sign}(\omega_2 F_1 F_2), \\ \varphi &= -\arctg(\omega_1/\alpha) + \pi \text{sign}F_2 (1 - \text{sign}F_1)/2. \end{aligned} \quad (36)$$

Заметим, что  $|\text{tg}\varphi|$  определяется лишь значениями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а  $F_1$  и  $F_2$  требуются лишь для выбора

правильного квадранта. Эта оценка  $\varphi$  принципиально отличается от использованной в предыдущем разделе и совпадает с ней лишь в случае, если сдвиги экстремумов  $\text{Re}F(\omega)$  и  $\text{Im}F(\omega)$  действительно являются проявлениями экспоненциального роста.

Сравнение двух оценок  $\varphi$  (см. Таблицу) показывает их приближенное совпадение для всех гармоник и подтверждает правильность выявления механизма сдвига экстремумов. Небольшие различия могут быть связаны как с приближенностью оценки по формуле (36), так и с наличием осложняющих факторов: взаимного влияния гармоник, наличия непрерывного спектра, экспериментальных погрешностей и пр.

Таблица. Оценки фаз, полученные согласно разд.7 ( $\varphi_s$ ) и по формуле (36) ( $\tilde{\varphi}_s$ ).

$s$	$\varphi_s$	$\tilde{\varphi}_s$	$s$	$\varphi_s$	$\tilde{\varphi}_s$
1	170°	161°	10	37°	37°
2	-88°	-84°	11	155°	145°
3	125°	120°	12	-15°	-20°
4	-172°	-162°	13	111°	121°
5	-78°	-67°	14	-96°	-106°
6	47°	40°	15	-81°	-72°
7	144°	153°	16	87°	84°
8	59°	49°	17	-144°	-140°
9	-124°	-153°			

## 9. Распределение показателей и разностей частот

Приведем сводку теоретических результатов для эволюции моментов. Принимая для  $\langle \rho^n \rangle$  экспоненциальную зависимость от  $L$ , получим для показателя экспоненциального роста  $x$  алгебраическое уравнение  $(2n+1)$ -го порядка. Для  $n=1$  и  $n=2$  такие уравнения выписываются в явном виде [8]

$$\begin{aligned} x(x^2 + 4\mathcal{E}) &= 2W^2, \\ x(x^2 + 4\mathcal{E})(x^2 + 16\mathcal{E}) &= 42W^2x^2 + 96W^2\mathcal{E}, \end{aligned} \quad (37)$$

где  $\mathcal{E}$  — энергия, отсчитанная от нижнего края зоны,  $W$  — амплитуда случайного потенциала.

Структура уравнений для произвольного  $n$ -го

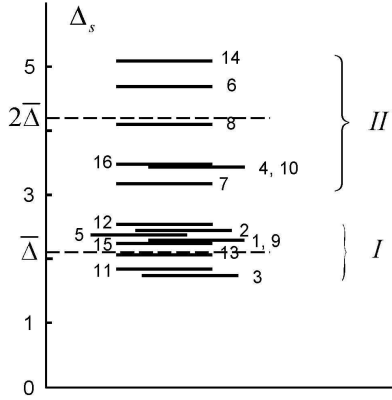


Рис. 11: Распределение разностей соседних частот  $\Delta_s = \omega_{s+1} - \omega_s$ ; значение  $s$  указано у соответствующих линий. Разности  $\Delta_s$  разбиваются на две группы  $I$  и  $II$ , локализованные вблизи  $\bar{\Delta}$  и  $2\bar{\Delta}$ .

момента может быть установлена на основе аргументации раздела 4 работы [8]. В глубине разрешенной и запрещенной зон можно ограничиться диагональными элементами в матрицах (42), (47)

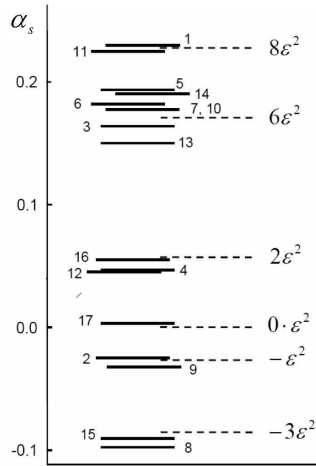


Рис. 12: Распределение показателей экспоненциального роста  $\alpha_s$  и их сопоставление с последовательностью (41) при надлежащем выборе  $\epsilon^2$ . Значение  $s$  указано у соответствующих линий.

это приводит к уравнению

$$\prod_{k=0}^{2n} [x - 2(n-k)\delta - B_n^k \epsilon^2] = O(\epsilon^4 \delta^{2n-1}), \quad (38)$$

где  $\epsilon^2 = W^2/4\mathcal{E}$ ,  $\delta^2 = -\mathcal{E}$ ,  $B_n^k = n(2n-1) + 3k(k-$

$2n)$ . Аналогичное уравнение вблизи края зоны

$$x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{k_{max}} C_k W^{2k} x^{2n+1-3k}, \quad k_{max} = \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor \quad (39)$$

следует из того, что при  $x \sim \delta \sim \epsilon^2$  все члены уравнения имеют один порядок величины, и допустимы лишь комбинации  $\delta^{2n} \epsilon^{2m}$  с  $n \geq m$ , из которых конечными при  $\delta \rightarrow 0$  остаются лишь  $\delta^{2n} \epsilon^{2n} \sim W^{2n}$ . Нетривиальные корни уравнения (39) имеют порядок  $W^{2/3}$  и приводят к несоизмеримым частотам в осцилляциях (2).

В глубине разрешенной зоны параметры  $\delta$  и  $\epsilon$  комплексны и для перехода к действительным величинам нужно сделать замену  $\delta \rightarrow i\delta$ ,  $\epsilon \rightarrow -i\epsilon$ . Тогда уравнение (38) дает полный набор показателей для предельно металлического режима ( $\epsilon^2 \ll \delta$ )

$$x_n^k = 2i(n-k)\delta - B_n^k \epsilon^2 + O(\epsilon^4/\delta), \quad k = 0, 1, \dots, 2n. \quad (40)$$

Нетрудно видеть, что все частоты осцилляций в (2) являются целыми кратными величины  $\bar{\Delta} = 2\delta$ , т.е. их несоизмеримость исчезает. В идеальном случае все разности соседних частот  $\Delta_s = \omega_{s+1} - \omega_s$  должны быть равными  $\bar{\Delta}$ ; однако, практически некоторые гармоники не проявляются из-за слабой интенсивности, так что разности  $\Delta_s$  "квантуются" т.е. могут быть равными  $\bar{\Delta}$ ,  $2\bar{\Delta}$ ,  $3\bar{\Delta}$  и т.д.

Распределение разностей  $\Delta_s$  для 17 гармоник, очевидных из Рис.3, представлено на Рис.11. Нетрудно видеть, что они распадаются на две группы  $I$  и  $II$ , локализованные вблизи значений  $\bar{\Delta}$  и  $2\bar{\Delta}$ , где  $\bar{\Delta}$  выбрано из лучшего согласия. Отсутствие точного квантования не должно вызывать беспокойства, т.к. последнее реализуется лишь в предельно металлическом режиме. В реальности металлический режим не является экстремальным, и к нему возникают поправки, указанные в (40).

Показатели экспоненциального роста  $\alpha_s$  определяются действительной частью выражения (40) и являются целыми кратными величины  $\epsilon^2$ . Перебирая всевозможные значения  $n$  и  $k$ , получим бесконечную последовательность показателей, отрезок которой вблизи начала координат имеет вид

$$\dots, -3\epsilon^2, -\epsilon^2, 0, 2\epsilon^2, 3\epsilon^2, 6\epsilon^2, 8\epsilon^2, \dots \quad (41)$$

Показатели, полученные в результате обработки экспериментальных данных по формуле (36), представлены на Рис.12 с противоположным знаком<sup>9</sup>

<sup>9</sup> Показатели  $\alpha_s$  меняют знак при переходе от магнит-

и хорошо воспроизводят эту последовательность при подходящем выборе  $\epsilon^2$ . Единственным исключением является отсутствие значения  $3\epsilon^2$ , что по видимому связано с низкой интенсивностью соответствующих линий. Тот факт, что проявляются только показатели в окрестности начала координат, естественно объясняется тем, что гармоники с большими (по модулю) показателями локализируются вблизи краев рабочего интервала магнитных полей и не видны в его середине.

Заметим, что максимальный показатель для момента  $\langle \rho^n \rangle$  в запрещенной зоне реализуется при  $k = 2n$ ,

$$x_n^{max} = 2n\delta + n(2n - 1)\epsilon^2, \quad (42)$$

а в разрешенной зоне — при  $k = n$ ,

$$x_n^{max} = n(n + 1)\epsilon^2. \quad (43)$$

Эти результаты согласуются с функциональной формой для логнормального режима

$$x_n^{max} = an + bn^2/2 \quad (44)$$

с параметрами  $a$  и  $b$ , полученными в [8]:  $a = 2\delta - \epsilon^2$ ,  $b = 4\epsilon^2$  в запрещенной зоне и  $a = \epsilon^2$ ,  $b = 2\epsilon^2$  в разрешенной зоне.

## 10. Микроскопическая картина

Нетрудно видеть, что для показателей роста  $\alpha_s$  (Рис.12) квантование оказывается более четким, чем для разностей частот  $\Delta_s$  (Рис.11). Этот факт имеет простое объяснение.

Тонкая проволочка является квазиодномерной системой, в которой поперечное движение заковано, что приводит к возникновению  $N_0$  дискретных уровней  $\epsilon_s^0$ ; с учетом продольного движения вдоль оси  $x$  они превращаются в одномерные подзоны со спектрами

$$\epsilon_s(k_x) = \epsilon_s^0 + k_x^2/2m, \quad (45)$$

состояния которых заполнены ниже уровня Ферми  $E_F$  (Рис.13). Магнитное поле  $B$  наиболее сильно влияет на верхнюю заполненную подзону с минимальной энергией Ферми  $\epsilon_F$ , ограничивая движение в ней на длине  $L$ , определяемой условием

$$m\omega_B^2 L^2 \sim \epsilon_F \sim E_0/N_0, \quad (46)$$

ного поля  $B$  к эффективной длине системы  $L$  (меняются местами правое и левое направление). При переходе от контактанса к сопротивлению изменения знаков  $\alpha_s$  не происходит, так как малые флуктуации двух величин пропорциональны друг другу.

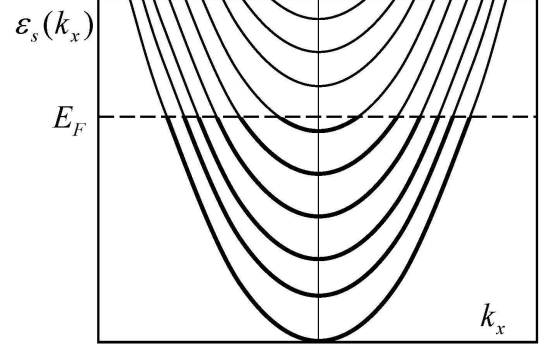


Рис. 13: Для тонкой проволочки поперечное движение заковано, что приводит к возникновению  $N_0$  дискретных уровней, которые при учете продольного движения превращаются в одномерные подзоны. Главный вклад в осцилляции контактанса дает верхняя заполненная подзона.

так что

$$L \sim a \frac{B_0}{B\sqrt{N_0}}, \quad (47)$$

где  $E_0 = \hbar^2/ma^2$  и  $B_0 = \phi_0/a^2$  — атомные единицы энергии и магнитного поля ( $\phi_0 = \pi\hbar c/e$  — квант потока). Кондактанс системы определяется суммой кондактансов одномерных подзон, осцилляции которых экспоненциально затухают при увеличении  $L$  (см. ниже). Поэтому главный вклад в осцилляции дает верхняя подзона, для которой длина  $L$  минимальна; однако, и соседние подзоны оказывают некоторое влияние. Для разностей частот  $\Delta_s$  это влияние существенно уширяет распределение (Рис.11), так как частота осцилляций определяется фермиевским импульсом  $k_F$ , значение которого различно в разных подзонах. Для показателей роста  $\alpha_s$  (Рис.12) ситуация совершенно другая. Фермиевские импульсы для верхних подзон малы, и для рассеяния на примесях справедливо приближение медленных частиц<sup>10</sup>, так что амплитуда рассеяния не зави-

<sup>10</sup> Здесь существенно отличие реальной системы от модели Андерсона, рассматриваемой в [8]. В модели Андерсона металлический режим соответствует большой концентрации слабых примесей, которые можно рассматривать по теории возмущений. В реальной системе слабый беспорядок создается малой концентрацией сильных примесей, для которых справедливо приближение медленных частиц. Это различие не влияет на результаты для показателей, так как на масштабе длины волны конфигурацию случайного потенциала можно изменять в широких пределах, не влияя на крупномасштабные свойства волновых функций.

сит от импульса. Показатели роста прямо связаны с амплитудой рассеяния и не зависят от фермиевских импульсов одномерных подзон. Поэтому влияние соседних подзон не нарушает точного квантования, и фактически Рис.12 соответствует строго одномерной системе. Отклонения от точного квантования связаны лишь с неэкстремальностью металлического режима и экспериментальными погрешностями.

Минимальная дискретная гармоника на Рис.3 соответствует приблизительно 4 периодам осцилляций в интервале полей  $1 \div 10$  Тл. Ее частота определяется дебройлевской длиной волны  $\lambda \sim a\sqrt{N_0}$  в верхней подзоне, и число осцилляций при изменении поля от  $B_{min}$  до  $10B_{min}$  в силу (47) дается оценкой

$$N_{osc} \sim B_0/N_0B_{min}, \quad (48)$$

что для  $B_0 \sim 10^4$  Тл,  $B_{min} = 1$  Тл,  $N_{osc} = 4$  дает

$$N_0 \sim 2.5 \cdot 10^3. \quad (49)$$

Это примерно в 2 раза меньше, чем число атомов в поперечном сечении проволоочки диаметром 25 нм [5] и соответствует наполовину заполненной трехмерной зоне. При этом  $\lambda \sim 50a$  и актуальный диапазон длин

$$L = 20 \div 200a \quad (50)$$

оказывается в пределах длины проволоочки 310 нм [5].

Выше мы предполагали условие  $\hbar\omega_B \ll \epsilon_F$ , которое фактически нарушается в середине экспериментального интервала полей. При больших полях более адекватна оценка  $L \sim a(B_0/B)^{1/2}$ , следующая из (46) в результате замены  $\epsilon_F$  на  $\hbar\omega_B$ . В результате нижн граница в (50) сдвигается с  $20a$  до  $30a$ , что несущественно для приведенных оценок.

Как ясно из (23,25), выражение для  $\langle \rho \rangle$  содержит растущую экспоненту  $e^{2\epsilon^2 t}$  и осциллирующие члены, убывающие как  $e^{-\epsilon^2 t}$ . Аналогичная картина справедлива для высших моментов: максимальный показатель (43) в металлическом режиме является действительным и не приводит к осцилляциям, тогда как осциллирующие члены растут более медленно и относительно малы даже при положительных  $\alpha_s$ . Поэтому для типичного значения  $\rho$  ситуация такая же, как для моментов, и при переходе к безразмерному кондактансу

$g = 1/\rho$  осцилляции оказываются затухающими. При типичных значениях  $\Delta_1 \sim \Delta_2 \sim 1$  дл чужеродных контактов осцилляции  $g$  в области  $\epsilon^2 t \lesssim 1$  оказываются порядка единицы, что дает флуктуации порядка  $e^2/h$  для размерного кондактанса (Рис.1). Согласно этой картине, универсальным является лишь порядок величины флуктуаций, тогда как на их амплитуду можно существенно влиять, изменяя уровень Ферми или свойства идеальных контактов.

## 11. Заключение

В работе представлен аккуратный Фурье-анализ аперриодических осцилляций кондактанса (Рис.1), обнаруженных в классических экспериментах Вебба и Вашбурна [5]. Полученные результаты фактически примиряют два альтернативных сценария, указанные в начале работы. С одной стороны Фурье-спектр практически дискретный, подтверждая концепцию работы [8], согласно которой аперриодические осцилляции кондактанса определяются суперпозицией несоизмеримых гармоник. С другой стороны, форма спектра напоминает дискретный белый шум, свойства которого близки к непрерывному. Более подробный анализ обнаруживает наличие непрерывной компоненты, малость которой объясняется в разд.5.

В работе обнаружено множество качественных моментов, подтверждающих правильность представленной интерпретации. Частоты дискретных линий слабо зависят от способа обработки, что доказывает их объективное происхождение. "Естественное" начало отсчета  $f(x)$ , обнаруженное при исключении сдвиговых осцилляций подтверждает правильность аналогии с одномерными системами. О том же свидетельствуют проявления экспоненциального роста амплитуды гармоник. Распределение фаз коэффициентов  $A_s$  согласуется с их предполагаемой случайностью. Распределение показателей роста и разностей частот согласуются с теоретическими результатами дл металлического режима. Микроскопические оценки подтверждают представленную картину.

Универсальные флуктуации кондактанса обсуждаются во многих работах (см. напр. [20]–[40] и ссылки там), и было бы интересно обработать результаты других экспериментов в духе настоящей работы.

Автор признателен В.В.Бражкину, по инициативе которого выполнена работа [11].

**Приложение 1. Решение уравнения (19)**

Ограничимся анализом металлической области, когда типичные значения  $\rho$  малы. Рассматривая задачу на собственные значения для оператора в правой части уравнения (19) и ограничиваясь низшим порядком по  $\rho$ , имеем уравнение

$$-\lambda P = P'_\rho + \rho P''_{\rho\rho}. \quad (A.1)$$

Считая, что  $\rho$  меняется в интервале от нуля до  $R$ , наложим условие конечности при  $\rho = 0$  и нулевое граничное условие при  $\rho = R$ . Тогда собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\lambda_s = \mu_s^2/4R, \quad e_s(\rho) = J_0(\mu_s \sqrt{\rho/R}), \quad (A.2)$$

где  $\mu_s$  — корни функции Бесселя  $J_0(x)$ . Решая уравнение (19) с начальным условием (22) путем разложения  $P(\rho)$  по собственным функциям (A.2), имеем

$$P(\rho, t) = \int_0^\infty 2\mu d\mu e^{-\mu^2 t} J_0(2\mu\sqrt{\rho_0}) J_0(2\mu\sqrt{\rho}), \quad (A.3)$$

где  $t = \alpha(L - L_0)$  и учтено, что при больших  $R$  спектр собственных значений  $\mu_s$  становится квазинепрерывным и суммирование по  $s$  можно заменить интегрированием по  $\mu$ , используя асимптотику  $\mu_s = \pi s + const$  при больших  $s$ . Вычисляя интеграл в (A.3), получим

$$P(\rho, t) = \frac{1}{t} \exp\left\{-\frac{\rho + \rho_0}{t}\right\} I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho\rho_0}}{t}\right), \quad (A.4)$$

где  $I_0(x) = J_0(ix)$ . При  $\rho \lesssim t$  и  $t \gg \rho_0$  распределение (A.4) переходит в (21), а при  $\rho \approx \rho_0$  и  $t \ll \rho_0$  становится гауссовским

$$P(\rho, t) = \left(\frac{1}{4\pi\rho_0 t}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{4\rho_0 t}\right\}. \quad (A.5)$$

Ввиду близости распределения (A.4) к гауссовскому оно адекватно характеризуется двумя первыми моментами. Умножая (19) на  $\rho^n$  и интегрируя по  $\rho$ , получим уравнения эволюции моментов распределения  $P(\rho)$ ; их решение для начального условия (22) имеет вид

$$\langle \rho \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{1 + 2\rho_0}{2} e^{2t}, \quad (A.6)$$

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{1}{3} - \frac{1 + 2\rho_0}{2} e^{2t} + \left[\rho_0^2 + \frac{1 + 2\rho_0}{2} - \frac{1}{3}\right] e^{6t}.$$

При малых  $\rho$  выражения упрощаются,

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \rho_0 + t, \\ \langle \rho^2 \rangle &= \rho_0^2 + 4\rho_0 t + 2t^2, \\ \sigma^2 &= 2\rho_0 t + t^2, \end{aligned} \quad (A.7)$$

и соответствуют распределению (A.4). Эти результаты справедливы при  $L > L_0$ . Описание эволюции в интервале  $0 < L < L_0$  затрудняется необходимостью удовлетворить двум условиям (20) и (22), что возможно лишь при наложении ограничений на реализацию случайного потенциала. Эти ограничения накладываются на интервал  $(0, L_0)$  в целом и не существенны при малых  $L$  и  $L$ , близких к  $L_0$ . В первом случае имеем  $\langle \rho \rangle = \sigma$  в соответствии с распределением (21). Во втором случае ситуация определяется тем, что уширение распределения происходит симметрично<sup>11</sup> при отклонении  $L$  вправо или влево от  $L_0$ . Для величины  $\langle \rho \rangle$  условия (20) и (22) выполняются автоматически, если  $\rho_0$  выбрано равным среднему значению для распределения (21) при  $L = L_0$ . В результате сказанного приходим к картине, представленной на Рис.8.

**Приложение 2. Эволюция  $\langle \rho \rangle$  для начального условия (22)**

Вычисление  $\langle \rho \rangle$  технически сводится к исследованию эволюции вторых моментов для трансфер-матрицы с комплексными элементами  $T_{ij}$  [8]

$$\begin{aligned} z_1^{(l)} &= \left\langle |T_{11}^{(l)}|^2 \right\rangle, \quad z_2^{(l)} = \left\langle T_{11}^{(l)} T_{12}^{(l)*} \right\rangle, \\ z_3^{(l)} &= \left\langle T_{11}^{(l)*} T_{12}^{(l)} \right\rangle, \quad z_4^{(l)} = \left\langle |T_{12}^{(l)}|^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (A.8)$$

Они удовлетворяют системе разностных уравнений, общее решение которой имеет вид [8]

$$\begin{pmatrix} z_1^{(l)} \\ z_2^{(l)} \\ z_3^{(l)} \\ z_4^{(l)} \end{pmatrix} = C_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^3 C_i \begin{pmatrix} 1 \\ e_2(x_i) \\ e_3(x_i) \\ 1 \end{pmatrix} e^{x_i l}, \quad (A.9)$$

<sup>11</sup> Уравнение (19) имеет одинаковый вид, если положить  $L = L_0 + l$  или  $L = L_0 - l$  и рассматривать эволюцию по  $l$ . Это ясно из схемы вывода подобных уравнений (см. Приложение А в [41]).

где  $x_1, x_2, x_3$  — корни первого уравнения (37) и

$$e_2(x) = \frac{\mathcal{A}x + \mathcal{B}}{p(x)}, \quad e_3(x) = \frac{\mathcal{A}^*x + \mathcal{B}^*}{p(x)},$$

$$\mathcal{A} = 2\epsilon^2 - 2i\Delta, \quad \mathcal{B} = 4\alpha\Delta + 4i\epsilon^2(\alpha - \Delta),$$

$$p(x) = x^2 + 2\epsilon^2x + 4\alpha^2. \quad (A.10)$$

Здесь  $\alpha = -\Delta_2\delta$ ,  $\Delta = \Delta_1\delta$ ,  $\delta$  и  $\epsilon^2$  определены после (23),

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{\bar{k}} - \frac{\bar{k}}{k} \right), \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{\bar{k}} + \frac{\bar{k}}{k} \right). \quad (A.11)$$

где  $\bar{k}$  и  $k$  — фармиевские импульсы в изучаемой системе и присоединенных к ней идеальных контактах. В отличие от [8], в качестве начального условия принимается не единичная матрица, а трансфер-матрица общего вида

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho+1} e^{i\varphi} & \sqrt{\rho} e^{i\theta} \\ \sqrt{\rho} e^{-i\theta} & \sqrt{\rho+1} e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (A.12)$$

с  $\rho = \rho_0$  и  $\psi = \theta - \varphi$ . Величина  $z_4^{(n)}$  непосредственно определяет  $\langle \rho \rangle$ , что дает общее выражение для последней

$$\langle \rho \rangle = C_0 + C_1 e^{x_1 l} + C_2 e^{x_2 l} + C_3 e^{x_3 l}, \quad (A.13)$$

где

$$C_0 = -\frac{1}{2}, \quad C_i = (-1)^{i+1} \left[ (1+2\rho_0) \frac{Q_i}{2Q} + K_1 \frac{R_i}{Q} + K_2 \frac{S_i}{Q} \right], \quad i = 1, 2, 3 \quad (A.14)$$

и

$$Q_1 = (x_2 - x_3) p(x_1), \quad Q_2 = (x_1 - x_3) p(x_2),$$

$$Q_3 = (x_1 - x_2) p(x_3),$$

$$Q = Q_1 - Q_2 + Q_3 = x_1^2 (x_2 - x_3) - x_2^2 (x_1 - x_3) + x_3^2 (x_1 - x_2).$$

$$R_1 = [x_2 p(x_3) - x_3 p(x_2)] p(x_1),$$

$$R_2 = [x_1 p(x_3) - x_3 p(x_1)] p(x_2),$$

$$R_3 = [x_1 p(x_2) - x_2 p(x_1)] p(x_3),$$

$$S_1 = [p(x_3) - p(x_2)] p(x_1),$$

$$S_2 = [p(x_3) - p(x_1)] p(x_2),$$

$$S_3 = [p(x_2) - p(x_1)] p(x_3),$$

$$K_1 = \frac{\epsilon^2 \sin \psi - \Delta \cos \psi}{4[\alpha\Delta^2 + \epsilon^4(\alpha - \Delta)]} \sqrt{\rho_0(1 + \rho_0)}, \quad (A.15)$$

$$K_2 = \frac{\epsilon^2(\alpha - \Delta) \cos \psi + \alpha\Delta \sin \psi}{2[\alpha\Delta^2 + \epsilon^4(\alpha - \Delta)]} \sqrt{\rho_0(1 + \rho_0)}.$$

Используя асимптотики для корней  $x_1, x_2, x_3$  в металлической режиме [8], приходим к результатам (23) и (25). Первый из них справедлив для "естественных" идеальных контактов<sup>12</sup>, которые отличаются от изучаемой системы лишь отсутствием в них случайного потенциала; при этом  $k = \bar{k}$ ,  $\Delta_1 = 0$  и осцилляции возникают в первом порядке по малому параметру  $\epsilon^2/\delta$ . Результат (25) справедлив для чужеродных контактов, когда  $\Delta_1 \neq 0$  и осцилляции имеют место уже в нулевом порядке по  $\epsilon^2/\delta$ . Использование асимптотики  $x_1, x_2, x_3$  в "критической" области [8] приводит к результату (24), справедливому вблизи края исходной зоны; он приведен для "естественных" контактов, так как ситуация для чужеродных контактов в достаточной мере характеризуется формулами работы [8].

### Приложение 3. О выборе естественного начала отсчета

Согласно соотношениям Онсагера, контактанс является четной функцией магнитного поля  $B$  и при выборе  $x = B$  функция  $f(x)$  в (3) является четной. Выберем сглаживающую функцию в виде  $G(x - a) + G(x + a)$  с четной  $G(x)$ , т.е. в симметризованной по  $x$  форме. Тогда Фурье-образ является действительным и с точностью до знака совпадает со своим модулем, а потому не содержит сдвиговых осцилляций. Теперь устраним функцию  $G(x + a)$ . Возникающий Фурье-образ  $F(\omega)$  функции  $f(x)G(x - a)$  будет комплексным; его действительная часть уменьшается в 2 раза по сравнению с предыдущим<sup>13</sup> и не содержит сдвиговых осцилляций. Последние отсутствуют и в  $\text{Im } F(\omega)$ , так как они в равной мере влияют на действительную и мнимую часть. После сдвига  $x \rightarrow x + a$  Фурье-образ принимает вид

$$F(\omega) = e^{i\omega a} \int f(x + a) G(x) e^{i\omega x} dx$$

и возникающий интеграл при  $a = \mu_0$  соответствует тому, который рассматривался в разд.2, тогда как множитель  $e^{i\omega a}$  отвечает за сдвиговые осцилляции. Однако получаемый при этом знак  $a$  не соответствует найденному эмпирически.

<sup>12</sup> В этом случае для  $x_1, x_2, x_3$  требуются разложения по  $\epsilon^2/\delta$  более высокого порядка, чем приведены в [8].

<sup>13</sup> Легко проверить, что Фурье образы функций  $f(x)G(x + a)$  и  $f(x)G(x - a)$  имеют одинаковые действительные и противоположные мнимые части.



Причина противоречия состоит в том, что симметрия Онсагера выделяет не только значение  $B = 0$ , но и  $B = \infty$ ; именно последнее соответствует эмпирической ситуации. При выборе  $x = 1/B$  можно повторить все предыдущие рассуждения; однако, приращения  $B$  и  $x$  имеют противоположные знаки и для качественного соответствия с разд.2 нужно изменить знак  $\omega$ . Это и приведет к появлению множителя  $e^{i\omega a}$  с правильным знаком  $a$ .

## Список литературы

- [1] Б. Л. Альтшулер, Письма в ЖЭТФ **41**, 530 (1985).
- [2] Б. Л. Альтшулер, Д. Е. Хмельницкий, Письма в ЖЭТФ **42**, 291 (1985).
- [3] P. A. Lee, A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985).
- [4] P. A. Lee, A. D. Stone, Y. Fukuyama, Phys. Rev. B **35**, 1039 (1987).
- [5] S. Washburn, R. A. Webb, Adv. Phys. **35**, 375 (1986).
- [6] B. L. Altshuler, P. A. Lee, R. A. Webb (Eds), Mesoscopic Phenomena in Solids, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [7] C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997).
- [8] И. М. Суслов, ЖЭТФ **156**, 950 (2019).
- [9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Москва, Наука, 1974.
- [10] D. Mailly, M. Sanquer, J. Phys. (France) I **2**, 357 (1992).
- [11] V. V. Brazhkin, I. M. Suslov, J. Phys.: Condensed Matter (in print); arXiv: 1911.10441.
- [12] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Wetterling, Numerical Recipes in Fortran, Cambridge University Press, 1992.
- [13] А. Б. Мигдал, Качественные методы в квантовой теории, Москва, Наука, 1975.
- [14] В. И. Мельников, ФТТ **23**, 782 (1981).
- [15] A. A. Abrikosov, Sol. St. Comm. **37**, 997 (1981).
- [16] N. Kumar, Phys. Rev. B **31**, 5513 (1985).
- [17] B. Shapiro, Phys. Rev. B **34**, 4394 (1986).
- [18] P. Mello, Phys. Rev. B **35**, 1082 (1987).
- [19] B. Shapiro, Phil. Mag. **56**, 1031 (1987).
- [20] K. M. D. Hals, A. K. Nguyen, X. Waintal, A. Brataas, Phys. Rev. Lett. **105**, 207204 (2010).
- [21] A. S. Lien, L. Y. Wang, C. S. Chu, J. J. Lin, Phys. Rev. B **84**, 155432 (2011).
- [22] J. G. G. S. Ramos, D. Bazeia, M. S. Hussein, C. H. Lewenkopf, Phys. Rev. Lett. **107**, 176807 (2011).
- [23] Z. Li, T. Chen, H. Pan, et al, Sci. Rep. **2**, 595 (2012).
- [24] E. Rossi, J. H. Bardarson, M. S. Fuhrer, S. D. Sarma, Phys. Rev. Lett. **109**, 096801 (2012).
- [25] P. Y. Yang, L. Y. Wang, Y. W. Hsu, J. J. Lin, Phys. Rev. B **85**, 085423 (2012).
- [26] S. Minke, J. Bundesmann, D. Weiss, J. Eroms, Phys. Rev. B **86**, 155403 (2012).
- [27] S. Gustavsson, J. Bylander, W. D. Oliver, Phys. Rev. Lett. **110**, 016603 (2013).
- [28] A. L. R. Barbosa, M. S. Hussein, J. G. G. S. Ramos, Phys. Rev. E **88**, 010901(R) (2013).
- [29] Ph. Jacquod and I. Adagideli, Phys. Rev. B **88**, 041305(R) (2013).
- [30] J. Bundesmann, M. H. Liu, I. Adagideli, K. Richter, Phys. Rev. B **88**, 195406 (2013).
- [31] C. L. Richardson, S. D. Edkins, G. R. Berdiyurov, et al, Phys. Rev. B **91**, 245418 (2015).
- [32] T. C. Vasconcelos, J. G. G. S. Ramos, A. L. R. Barbosa, Phys. Rev. B **93**, 115120 (2016).
- [33] C. C. Kalmbach, F. J. Ahlers, J. Schurr, et al, Phys. Rev. B **94**, 205430 (2016).
- [34] J. G. G. S. Ramos, A. L. R. Barbosa, B. V. Carlson, et al, Phys. Rev. E **93**, 012210 (2016).
- [35] Y. Hu, H. Liu, H. Jiang, X. C. Xie, Phys. Rev. B **96**, 134201 (2017).

- [36] H. C. Hsu, I. Kleftogiannis, G. Y. Guo, V. A. Gopar, *J. Phys. Soc. Jpn* **87**, 034701 (2018).
- [37] M. A. Aamir, P. Karnatak, A. Jayaraman, et al, *Phys. Rev. Lett.* **121(13)**, 136806 (2018).
- [38] S. Islam, S. Bhattacharyya, H. Nhalil, et al, *Phys. Rev. B* **97**, 241412R (2018).
- [39] T. Vercosa, Y. J. Doh, J. G. G. S. Ramos, A. L. R. Barbosa, *Phys. Rev. B* **98**, 155407 (2018).
- [40] F. Hajiloo, F. Hassler, J. Splettstoesser, *Phys. Rev. B* **99**, 235422 (2019).
- [41] И. М. Сусллов, *ЖЭТФ* **151**, 897 (2017).