

О скрытой симметрии в одномерной локализации

И.М.Суслов

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН,

119334, Москва, Россия

E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Сопротивление ρ одномерной неупорядоченной системы длины L имеет логнормальное распределение в пределе больших L . Параметры распределения меняются при изменении уровня Ферми, но не зависят от вида граничных условий. Однако, граничные условия существенно меняют распределение фаз, входящих в трансфер-матрицу, что в общем случае изменяет коэффициенты уравнения эволюции для распределения $P(\rho)$. Это кажущееся противоречие разрешается существованием скрытой симметрии, характер которой выявляется путем вывода уравнения для стационарного распределения фаз и анализа его трансформационных свойств.

1. Введение

При исследовании одномерных неупорядоченных систем удобно использование трансфер-матрицы T , которая связывает амплитуды волн слева ($Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$) и справа ($Ce^{ikx} + De^{-ikx}$) от рассеивателя,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix},$$

и при наличии инвариантности относительно обращения времени допускает параметризацию [1]:

$$T = \begin{pmatrix} 1/t & -r/t \\ -r^*/t^* & 1/t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho+1} e^{i\varphi} & \sqrt{\rho} e^{i\theta} \\ \sqrt{\rho} e^{-i\theta} & \sqrt{\rho+1} e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где t и r — амплитуды прохождения и отражения и $\rho = |r/t|^2$ — безразмерное сопротивление по Ландауэру [2]. При последовательном расположении рассеивателей их трансфер-матрицы перемножаются. Для слабого рассеивателя матрица T близка к единичной, что позволяет выводить дифференциальные уравнения эволюции для ее параметров и в частности — для ландауровского сопротивления ρ .

В приближении случайных фаз (когда распределения φ и θ считаются однородными) такое уравнение для распределения $P(\rho)$ имеет вид (где D порядка обратной длины пробега) [3]–[8]

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial L} = D \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho(1+\rho) \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \right] \quad (2)$$

и описывает эволюцию начального распределения $P_0(\rho) = \delta(\rho)$ на нулевой длине L к логнормальному распределению при больших L .

Как показано в [9], распределение фаз φ и θ существенно изменяется при введении полунепроницаемых границ, отделяющих систему от присоединенных к ней идеальных контактов; при этом возникает более общее уравнение

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial L} = D \frac{\partial}{\partial \rho} \left[-\gamma(1+2\rho)P(\rho) + \rho(1+\rho) \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \right], \quad (3)$$

которое в приближении случайных фаз сводится к (2). Последнее приближение хорошо работает в глубине разрешенной зоны для "естественных" идеальных контактов (изготовленных из того же материала, что изучаемая система, но без примесей), что обычно и предполагается в теоретических работах (см. ссылки в [10, 11, 12]); ситуация внутри запрещенной зоны рассматривается сравнительно редко [13, 14, 15] и лишь на уровне волновых функций. Для исследования эволюции $P(\rho)$ при произвольном положении уровня Ферми (включая запрещенную зону) требуется введение "чужеродных" контактов из хорошего металла, что приводит к еще более общему уравнению [16]

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial L} = D \frac{\partial}{\partial \rho} \left[-\gamma_1(1+2\rho)P(\rho) - 2\gamma_2 \sqrt{\rho(1+\rho)}P(\rho) + \rho(1+\rho) \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \right], \quad (4)$$

коэффициенты которого в пределе больших L определяются стационарным распределением фаз (см. ниже (29))¹. Уравнение (4) сводится к (3) с

¹ Для не слишком больших длин системы коэффициенты в уравнениях (3, 4) перестают быть постоянными, но изменяются в конечных пределах, что малосущественно по сравнению с сильными изменениями ρ и $P(\rho)$.

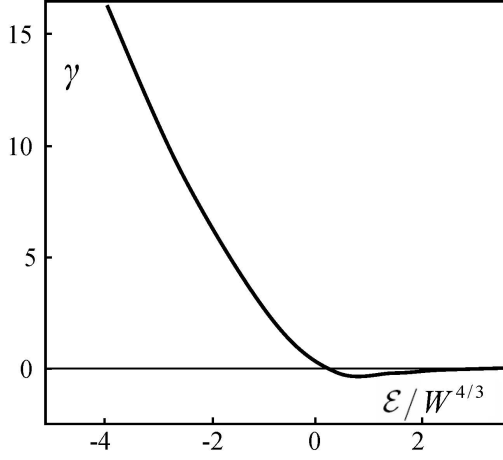


Рис. 1: Зависимость параметра γ в уравнении (3), относящегося к пределу больших L , от энергии \mathcal{E} , отсчитанной от нижнего края исходной зоны.

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ в области больших L , когда типичные значения ρ велики. При этом выясняется, что приближение случайных фаз нарушается по внутренним причинам и изменение граничных условий не является для этого необходимым. Согласно [16], предельное распределение $P(\rho)$ в области больших L

$$P(\rho) = \frac{1}{\rho\sqrt{4\pi DL}} \exp\left\{-\frac{[\ln \rho - vL]^2}{4DL}\right\}, \quad (5)$$

где $v = (2\gamma + 1)D$, определяется внутренними свойствами изучаемой системы и не зависит от граничных условий. На Рис.1 показана зависимость параметра γ от $\mathcal{E}/W^{4/3}$, где \mathcal{E} — энергия Ферми, отсчитанная от нижнего края зоны, и W — амплитуда случайного потенциала (все энергии измеряются в единицах интеграла перекрытия для одномерной модели Андерсона, см. ниже (9)). Нетрудно видеть, что параметр γ формально всегда отличен от нуля, но принимает малые значения в глубине разрешенной зоны в соответствии с приближением случайных фаз.

Таким образом, в работах [9, 16] высказаны два утверждения, которые выглядят трудно совместимыми. С одной стороны, изменение граничных условий существенно влияет на распределение фаз, которое в общем случае меняет параметры уравнений эволюции (2–4) и даже их структуру. С другой стороны, эти изменения не влияют на форму предельного распределения (5) в области больших L . Справедливость этих утверждений означает, что в системе имеется скрытая

симметрия, т.е. инвариантность физических параметров относительно некоторого класса преобразований. С теоретической точки зрения, выявление скрытой симметрии представляет безусловный интерес, указывая на возможность существенных упрощений. Практически же, без выяснения характера указанной инвариантности невозможно отделить реальные физические эффекты от фиктивных. Выявление этой инвариантности оказывается очень нетривиальным и демонстрируется ниже для множества преобразований, обсуждавшихся в [16] и связанных с изменением свойств присоединенных к системе идеальных контактов.

Поясним происхождение двух упомянутых утверждений. При изменении граничных условий трансфер-матрица T преобразуется в $\tilde{T} = T_l T T_r$, где T_l и T_r — краевые матрицы, связывающие амплитуды волн слева и справа от границы раздела. Таким образом, изменение граничных условий приводит к линейному преобразованию элементов трансфер-матрицы. Линейное преобразование не меняет показателей экспоненциального роста для вторых и четвертых моментов, которые находятся по известной матрице T и определяются внутренними свойствами системы. Знание этих двух показателей позволяет установить "коэффициент диффузии" D и "скорость дрейфа" v в предельном распределении (5), которые таким образом не зависят от граничных условий [16]; в частности, таким образом, получено поведение параметра γ (Рис.1).²

Влияние граничных условий на распределение фаз легко продемонстрировать путем введения точечных рассеивателей на границах системы, когда

$$\tilde{T} = T_l T T_r, \quad T_l = T_r = \begin{pmatrix} 1 - i\chi & -i\chi \\ i\chi & 1 + i\chi \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Принимая для \tilde{T} параметризацию (1), получим в главном приближении при больших χ

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\rho} e^{i\varphi} &= -\chi^2 T', & \sqrt{\rho} e^{i\theta} &= -\chi^2 T', \\ \sqrt{\rho} e^{-i\theta} &= \chi^2 T', & \sqrt{1+\rho} e^{-i\varphi} &= \chi^2 T', \end{aligned} \quad (7)$$

где $T' = T_{11} - T_{12} + T_{21} - T_{22}$ и T_{ij} — элементы матрицы T . При больших χ имеем $\rho \sim \chi^4$, так что $1 + \rho \approx \rho$ и

$$\varphi = \pm\pi/2, \quad \theta = \pm\pi/2 \quad \text{при} \quad \chi \rightarrow \infty. \quad (8)$$

²При этом вопрос о распределении фаз полностью обходится. Разумеется, те же результаты можно получить, решая уравнение (31) и вычисляя средние в (29).

Таким образом, при больших χ фазы φ и θ локализуются вблизи значений $\pm\pi/2$, независимо от их распределения в исходной системе.

Изменение матрицы T с длиной системы L определяется соотношением $T_{L+\Delta L} = T_L T_{\Delta L}$, где матрица $T_{\Delta L}$ близка к единичной, что позволяет выводить дифференциальные уравнения эволюции. При переходе к другим граничным условиям аналогичное соотношение $\tilde{T}_{L+\Delta L} = \tilde{T}_L T'_{\Delta L}$ справедливо для матрицы $\tilde{T}_L = T_l T_L T_r$, где матрица $T'_{\Delta L} = T_r^{-1} T_{\Delta L} T_r$ по-прежнему близка к единичной. Переход от $T_{\Delta L}$ к $T'_{\Delta L}$ изменяет форму уравнений эволюции, определяемую параметрами α , Δ , ϵ^2 (см. разд.3), а переход от T_L к \tilde{T}_L меняет стационарное распределение фаз, определяющее коэффициенты в уравнении (4) для $P(\rho)$. Эти два фактора должны компенсировать друг друга, чтобы предельное распределение $P(\rho)$ оставалось инвариантным. Однако, выявление такой инвариантности в общем виде в настоящее время выглядит проблематичным, и ниже мы ограничимся случаем, когда изменение граничных условий связано с отличием фермиевского импульса k в идеальных контактах от фермиевского импульса \bar{k} в изучаемой системе [16].

2. Исходные соотношения

Как ясно из опыта работы [16], анализ удобно проводить для энергий внутри запрещенной зоны идеального кристалла, а описание разрешенной зоны получать как аналитическое продолжение. Для определенности рассматриваем одномерную модель модель Андерсона

$$\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} + V_n \Psi_n = E \Psi_n \quad (9)$$

вблизи края зоны, где она соответствует дискретизации обычного уравнения Шредингера.

Описание рассеивателя внутри запрещенной зоны осуществляется с помощью псевдо-трансфер-матрицы t , связывающей решения слева ($Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$) и справа ($Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$) от рассеивателя. Матрица $t^{(n)}$ для последовательности рассеивателей с амплитудами $V_0, V_1, V_2, \dots, V_n$, находящихся в точках $0, L_1, L_1+L_2, \dots, L_1+L_2+\dots+L_n$, имеет вид

$$t^{(n)} = t_{\epsilon_0} t_{\delta_1} t_{\epsilon_1} t_{\delta_2} t_{\epsilon_2} \dots t_{\delta_n} t_{\epsilon_n}, \quad (10)$$

где

$$t_{\epsilon_n} = \begin{pmatrix} 1 + \bar{\epsilon}_n & \bar{\epsilon}_n \\ -\bar{\epsilon}_n & 1 - \bar{\epsilon}_n \end{pmatrix}, \quad \bar{\epsilon}_n = \frac{V_n}{2\kappa a_0}, \quad (11)$$

$$t_{\delta_n} = \begin{pmatrix} e^{-\delta_n} & 0 \\ 0 & e^{\delta_n} \end{pmatrix}, \quad \delta_n = \kappa L_n$$

и a_0 — межатомное расстояние. Переход к истинной трансфер-матрице $T^{(n)} = T_l t^{(n)} T_r$ осуществляется с помощью краевых матриц

$$T_l = \begin{pmatrix} l & l^* \\ l^* & l \end{pmatrix}, \quad T_r = \begin{pmatrix} r & r^* \\ r^* & r \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$l = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\kappa}{ik} \right), \quad r = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ik}{\kappa} \right),$$

описывающих присоединение к системе идеальных контактов из хорошего металла с фермиевским импульсом k (причем границы раздела считаются резкими). Вводя между каждым двумя множителями в (10) произведение $T_r T_l = 1$, имеем

$$T^{(n)} = T_{\epsilon_0} T_{\delta_1} T_{\epsilon_1} T_{\delta_2} T_{\epsilon_2} \dots T_{\delta_n} T_{\epsilon_n}, \quad (13)$$

где

$$T_{\epsilon_n} = T_l t_{\epsilon_n} T_r, \quad T_{\delta_n} = T_l t_{\delta_n} T_r. \quad (14)$$

В модели Андерсона рассеиватели находятся на каждом узле решетки, поэтому все δ_n одинаковы, $\delta_n = \kappa a_0$. Подставляя (12), имеем

$$T_{\epsilon_n} = \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon_n & -i\epsilon_n \\ i\epsilon_n & 1 + i\epsilon_n \end{pmatrix}, \quad \epsilon_n = \bar{\epsilon}_n \frac{\kappa}{k} = \frac{V_n}{2\kappa a_0}, \quad (15)$$

$$T_{\delta} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\Delta^2} e^{i\alpha} & i\Delta \\ -i\Delta & \sqrt{1+\Delta^2} e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где введены параметры

$$\alpha = -\frac{1}{2} \left(\frac{k}{\kappa} - \frac{\kappa}{k} \right) \delta = \frac{\kappa^2 - k^2}{2k} a_0, \quad (17)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\kappa} + \frac{\kappa}{k} \right) \delta = \frac{\kappa^2 + k^2}{2k} a_0,$$

которые являются регулярными функциями энергии $\mathcal{E} = -\kappa^2$ и аналитически продолжаются в разрешенную зону, когда $\kappa = ik$ и \bar{k} — фермиевский импульс в изучаемой системе. В дальнейшем считаем, как обычно, что все V_n статистически независимы, $\langle V_n \rangle = 0$, $\langle V_n^2 \rangle = W^2$, а в уравнения эволюции будет входить величина

$$\epsilon^2 = \langle \epsilon_n^2 \rangle = \frac{W^2}{4k^2 a_0^2}, \quad (18)$$

не зависящая от κ и тривиально продолжаемая в разрешенную зону.

3. Уравнения эволюции

Воспользуемся рекуррентным соотношением

$$T^{(n+1)} = T^{(n)} T_\delta T_\epsilon, \quad (19)$$

принимая для $T^{(n)}$ параметризацию (1) и обозначая параметры матрицы $T^{(n+1)}$ как $\tilde{\rho}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\theta}$; тогда

$$\sqrt{1+\tilde{\rho}} e^{i\tilde{\varphi}} = \sqrt{1+\rho} e^{i\varphi} (\mathcal{A} - i\epsilon\mathcal{C}) + \sqrt{\rho} e^{i\theta} (\mathcal{B}^* + i\epsilon\mathcal{C}^*), \quad (20)$$

$$\sqrt{\tilde{\rho}} e^{i\tilde{\theta}} = \sqrt{1+\rho} e^{i\varphi} (\mathcal{B} - i\epsilon\mathcal{C}) + \sqrt{\rho} e^{i\theta} (\mathcal{A}^* + i\epsilon\mathcal{C}^*),$$

где $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$. В дальнейшем рассматриваем предел

$$\delta \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \delta/\epsilon^2 = const \quad (21)$$

и сохраняем члены первого порядка по δ и второго по ϵ . Возводя по модулю в квадрат одно из уравнений, получим

$$\tilde{\rho} = \rho + D\sqrt{\rho(1+\rho)} + \epsilon^2(1+2\rho), \quad (22)$$

где

$$D = 2(\Delta - \epsilon) \sin \psi - 2\epsilon^2 \cos \psi \quad (23)$$

и введено обозначение

$$\psi = \theta - \varphi. \quad (24)$$

Теперь возьмем произведение второго уравнения (20) с комплексно сопряженным первым

$$\sqrt{\tilde{\rho}(1+\tilde{\rho})} e^{i\tilde{\psi}} = \sqrt{\rho(1+\rho)} [(1-2i\alpha+2i\epsilon-\epsilon^2) e^{i\psi} - \epsilon^2 e^{-i\psi}] + (1+2\rho) (i\Delta - i\epsilon + \epsilon^2). \quad (25)$$

Исключая $\tilde{\rho}$ с помощью уравнения (22), получим связь $\tilde{\psi}$ и ψ

$$\tilde{\psi} = \psi + 2(\epsilon - \alpha) + R(\Delta - \epsilon) \cos \psi + R\epsilon^2 \sin \psi + (1 - R^2/2) \epsilon^2 \sin 2\psi, \quad (26)$$

где

$$R = \frac{1+2\rho}{\sqrt{\rho(1+\rho)}}. \quad (27)$$

Используя (22), (26) и следуя схеме работ [9, 16], получим уравнение эволюции для $P(\rho, \psi)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial L} = & \left\{ -2\Delta \sin \psi \sqrt{\rho(1+\rho)} P + 2\epsilon^2 \sin^2 \psi \rho(1+\rho) P'_\rho + \right. \\ & + \epsilon^2 \left[(1-2\sin^2 \psi)(1+2\rho) - 2\cos \psi \sqrt{\rho(1+\rho)} \right] P + \\ & + 2\epsilon^2 \sin \psi \left[\cos \psi (1+2\rho) - 2\sqrt{\rho(1+\rho)} \right] P'_\psi \Big\}'_\rho + \\ & + \left\{ (2\alpha - R\Delta \cos \psi) P + \epsilon^2 \sin \psi (R - 2\cos \psi) P + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{1}{2} \epsilon^2 (2 - R \cos \psi)^2 P'_\psi \right\}'_\psi. \quad (28)$$

Правая часть является суммой полных производных, что обеспечивает сохранение вероятности. Усреднение по ψ приводит к уравнению (4) с параметрами [16]

$$\begin{aligned} D &= 2\epsilon^2 \langle \sin^2 \psi \rangle, \quad \gamma_1 D = \epsilon^2 \langle 1 - 2\sin^2 \psi \rangle, \\ \gamma_2 D &= \Delta \langle \sin \psi \rangle - \epsilon^2 \langle \cos \psi \rangle, \end{aligned} \quad (29)$$

откуда для "скорости дрейфа" в (5) получим

$$v = 2\Delta \langle \sin \psi \rangle + 2\epsilon^2 \langle 1 - \cos \psi \rangle - 2\epsilon^2 \langle \sin^2 \psi \rangle. \quad (30)$$

При больших L типичные значения ρ велики, так что можно положить $R = 2$, после чего решение уравнения (28) факторизуется, $P(\rho, \psi) = P(\rho)P(\psi)$; при этом уравнение для $P(\psi)$ отщепляется и дает условие для стационарного распределения фазы ψ

$$\begin{aligned} \epsilon^2 (1 - \cos \psi)^2 P'_\psi + \epsilon^2 \sin \psi (1 - \cos \psi) P + \\ + (\alpha - \Delta \cos \psi) P = C_0, \end{aligned} \quad (31)$$

где константа C_0 определяется из нормировки.³

4. Трансформационные свойства

Замена переменных в уравнении (31)

$$u = \text{tg } \psi/2 \quad (32)$$

с учетом перенормировки вероятности $P \rightarrow P(1+u^2)/2$, следующей из $P(\psi)d\psi = P(u)du$, приводит его к простой форме

$$u^4 P'_u + P(2u^3 + a + bu^2) = C_0, \quad (33)$$

где

$$a = \frac{\alpha - \Delta}{2\epsilon^2}, \quad b = \frac{\alpha + \Delta}{2\epsilon^2} \quad (34)$$

или

$$\alpha = \epsilon^2(b + a), \quad \Delta = \epsilon^2(b - a). \quad (35)$$

Уравнение (33) интегрируется в квадратурах, но эта квадратура практически бесполезна. Более эффективным оказывается исследование трансформационных свойств. Если $P_{a,b}(u)$ — решение уравнения (33), то справедливо соотношение

$$P_{a,b}(u) = s P_{as^3, bs}(su). \quad (36)$$

³ Уравнение (28) с $\Delta = 0$ ("естественные" идеальные контакты) аналогично уравнению (10.27) в книге [10], выведенному в рамках другого формализма, так что связь входящих в него величин с параметрами трансфер-матрицы не очевидна. То же относится к уравнениям (39, 40) в работе [17].

Оно устанавливается путем замены $u = \tilde{u}/s$ и приведения уравнения к прежнему виду путем переопределения параметров $\tilde{a} = as^3$, $\tilde{b} = bs$, так что $P_{a,b}(u)$ совпадает с $P_{\tilde{a},\tilde{b}}(\tilde{u})$ с точностью до коэффициента, который устанавливается из нормировки. Заметим, что

$$ab = \frac{\alpha^2 - \Delta^2}{4\epsilon^4} = -\frac{\delta^2}{4\epsilon^4}, \quad (37)$$

и масштабное преобразование $a \rightarrow as^3$, $b \rightarrow bs$ приводит к перенормировке $\epsilon \rightarrow \tilde{\epsilon}$, где

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon s^{-1} = \tilde{\epsilon} \frac{\kappa}{k} s^{-1}. \quad (38)$$

Подставляя (17) в (34), получим исходные значения параметров a и b

$$a = -\frac{\delta}{2\epsilon^2} \frac{k}{\kappa}, \quad b = \frac{\delta}{2\epsilon^2} \frac{\kappa}{k}, \quad (39)$$

после чего соотношения (35) позволяют установить перенормировку $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$, $\Delta \rightarrow \tilde{\Delta}$ в результате масштабного преобразования

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k} s^{-1} - \frac{k}{\kappa} s \right) \delta, \quad \tilde{\Delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k} s^{-1} + \frac{k}{\kappa} s \right) \delta. \quad (40)$$

Соотношения (38) и (40) показывают, что преобразование всех параметров α , Δ , ϵ^2 , входящих в уравнения эволюции, сводится к замене

$$\frac{k}{\kappa} \rightarrow \frac{k}{\kappa} s, \quad (41)$$

эквивалентной изменению фермиевского импульса в идеальных контактах. И наоборот, изменение свойств идеальных контактов приводит к масштабному преобразованию распределения $P(u)$. Однако, этого еще не достаточно для инвариантности параметров v и D , так как простым скейлингом обладают лишь степенные средние $\langle u^n \rangle \rightarrow s^n \langle u^n \rangle$, тогда как актуальные средние, входящие в (25, 26), не являются степенными

$$\langle \sin^2 \psi \rangle = \left\langle \frac{4u^2}{(1+u^2)^2} \right\rangle, \quad \langle 1 - \cos \psi \rangle = \left\langle \frac{2u^2}{1+u^2} \right\rangle, \\ \langle \sin \psi \rangle = \left\langle \frac{2u}{1+u^2} \right\rangle. \quad (42)$$

Между тем, инвариантность комбинации $\epsilon^2 \langle \sin^2 \psi \rangle$, определяющей параметр D , в соответствии с (38) требует именно степенного скейлинга для первой величины в (42),

$$\langle \sin^2 \psi \rangle \rightarrow s^2 \langle \sin^2 \psi \rangle. \quad (43)$$

Эта противоречивая ситуация разрешается с помощью специфических свойств уравнения (33).

5. Инвариантность параметров D и v

Дифференцируя уравнение (33), умножая на u^k и интегрируя в бесконечных пределах, получим рекуррентное соотношение

$$(k+2)I_{k+3} = bI_{k+2} + aI_k \quad (44)$$

между интегралами

$$I_k = \int u^k P(u) du. \quad (45)$$

Если в (44) подставляется четная функция $P(u)$, то возникает простое соотношение между интегралами I_{2k} , позволяющее выразить их через I_2 ,

$$bI_{2k+2} + aI_{2k} = 0 \rightarrow I_{2k+2} = (-a/b)^k I_2. \quad (46)$$

Если в (44) подставляется нечетная функция $P(u)$, то возникает простое соотношение между интегралами I_{2k+1} , позволяющее выразить их через I_1 ,

$$bI_{2k+1} + aI_{2k-1} = 0 \rightarrow I_{2k+1} = (-a/b)^k I_1. \quad (47)$$

В действительности решение уравнения (33) не имеет определенной четности и представляется в виде суммы

$$P(u) = P_{odd}(u) + P_{even}(u), \quad (48)$$

где с неизбежностью присутствуют оба слагаемых. Используя полное рекуррентное соотношение (44), имеем

$$I_4 = (-a/b)I_2 + (4/b)I_5, \\ I_6 = (-a/b)^2 I_2 - (4a/b^2)I_5 + (6/b)I_7, \quad (49)$$

и т.д., так что

$$I_{2k+2} = (-a/b)^k I_2 + \text{odd terms}, \quad (50)$$

и аналогично

$$I_{2k+1} = (-a/b)^k I_1 + \text{even terms}. \quad (51)$$

Теперь рассмотрим первое среднее в (42)

$$\langle \sin^2 \psi \rangle = \int \frac{4u^2}{(1+u^2)^2} P(u) du = \\ = \int \frac{4u^2}{(1+u^2)^2} P_{even}(u) du = \\ = \int 4u^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) u^{2k} P_{even}(u) du =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} 4(-1)^k(k+1)I_{2k+2} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 4(-1)^k(k+1)(-a/b)^k I_2 = 4I_2 \frac{b^2}{(a-b)^2}. \quad (52)
\end{aligned}$$

Поскольку усредняемая функция является четной, то в (48) можно опустить $P_{odd}(u)$ и после разложения в ряд усредняемой функции получить ряд из интегралов I_{2k} ; но при подстановке $P_{even}(u)$ в соотношение (50) последнее дает простую связь (46) между интегралами, что позволяет просуммировать ряд. Итак

$$\langle \sin^2 \psi \rangle_{a,b} = \frac{4b^2}{(a-b)^2} \int u^2 P_{a,b}(u) du. \quad (53)$$

Аналогичная процедура, выполненная после перехода к переменной u и масштабного преобразования (36) в уравнении (28), дает

$$\langle \sin^2 \psi \rangle_{a,b} = \frac{4\tilde{a}^2}{(\tilde{a}-\tilde{b})^2} s^{-2} \int u^2 P_{\tilde{a},\tilde{b}}(u) du, \quad (54)$$

где $\tilde{a} = as^3$, $\tilde{b} = bs$. Выберем s из условия $\tilde{a} = -\tilde{b}$, так что дробь обращается в единицу; при этом $s = \kappa/k$ (что ясно из (39)) и множитель s^{-2} компенсирует различие между ϵ^2 и $\tilde{\epsilon}^2$ (ср. (11) и (15)):

$$\epsilon^2 \langle \sin^2 \psi \rangle_{a,b} = \tilde{\epsilon}^2 \int u^2 P_{\tilde{a},-\tilde{a}}(u) du = \tilde{\epsilon}^2 \langle \sin^2 \psi \rangle_{nat}. \quad (55)$$

Индексом *nat* мы отмечаем "естественность" ситуации с $a = -b$; она соответствует условию $|\kappa| = k$ и согласно [16] является выделенной. В разрешенной зоне она соответствует "естественным" идеальным контактам, а в запрещенной зоне — максимальной прозрачности границы раздела. При этом в качестве ϵ^2 выступает величина $\tilde{\epsilon}^2$, определяемая внутренними свойствами системы.

Аналогичным образом для второго среднего в (42)

$$\langle 1 - \cos \psi \rangle_{a,b} = \frac{2\tilde{a}^2}{\tilde{b}(\tilde{b}-\tilde{a})^2} s^{-2} \int u^2 P_{\tilde{a},\tilde{b}}(u) du \quad (56)$$

и выбирая s из условия $\tilde{a} = -\tilde{b}$, имеем

$$\epsilon^2 \langle 1 - \cos \psi \rangle_{a,b} = \tilde{\epsilon}^2 \langle 1 - \cos \psi \rangle_{nat}. \quad (57)$$

Теперь займемся комбинацией $\Delta \langle \sin \psi \rangle$, входящей в (26). Действуя аналогично предыдущему, имеем

$$\langle \sin \psi \rangle = \int \frac{2u}{1+u^2} P(u) du = \int \frac{2u}{1+u^2} P_{odd}(u) du =$$

$$\begin{aligned}
&= \int 2u \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u^{2k} P_{odd}(u) du = \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k I_{2k+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k (-a/b)^k I_1 = 2I_1 \frac{b}{b-a}, \quad (58)
\end{aligned}$$

так что

$$\langle \sin \psi \rangle_{a,b} = \frac{2b}{b-a} \int u P_{a,b}(u) du. \quad (59)$$

Подставляя в (59) выражения (17),(39), и делая масштабное преобразование (36), получим

$$\Delta \langle \sin \psi \rangle_{a,b} = \delta \cdot \frac{\kappa}{k} s^{-1} \int u P_{\tilde{a},\tilde{b}}(u) du. \quad (60)$$

При $s = \kappa/k$ имеем $\tilde{a} = -\tilde{b}$ и множители κ/k и s^{-1} компенсируют друг друга, так что

$$\Delta \langle \sin \psi \rangle_{a,b} = \delta \cdot \langle \sin \psi \rangle_{nat} \quad (61)$$

и мы установили инвариантность всех комбинаций, входящих в выражения (25,26) для D и v .

6. Заключение

В настоящей работе мы вывели уравнение для стационарного распределения фазовой переменной ψ , определяющего параметры предельного распределения (5) для $P(\rho)$, и установили независимость этих параметров от граничных условий в результате исследования трансформационных свойств уравнения для $P(\psi)$.

В результате проведенного анализа мы приходим к очень простой картине. Фаза ψ оказывается "плохой" переменной, а "правильной" переменной является $u = \text{tg } \psi/2$. Форма распределения $P(u)$ определяется внутренними свойствами системы и меняется достаточно сильно для радикального изменения параметров распределения (5) при изменении уровня Ферми (Рис.1). Изменение свойств присоединенных к системе идеальных контактов приводит к масштабному преобразованию функции $P(u)$, которое не влияет на значения параметров v и D в силу специфических свойств уравнения (33).

На качественном уровне, изменения распределения $P(\psi)$ при масштабном преобразовании $P(u)$ являются легко предсказуемыми и иллюстрируются на Рис.2. Распределение $P(\psi)$ является однородным, если $P(u)$ имеет форму $(1/\pi)(1+u^2)^{-1}$ (Рис.2,а), которая справедлива в глубине разрешенной зоны ($\delta \gg \epsilon^2$) для "естественных" идеальных

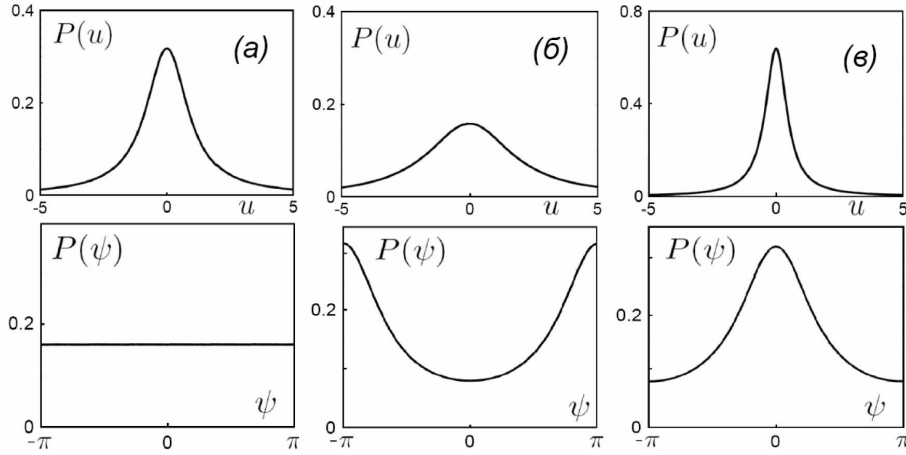


Рис. 2: Изменение распределения $P(\psi)$ при масштабном преобразовании функции $P(u)$, если форма последней соответствует приближению случайных фаз.

контактов ($k^2 = -\kappa^2$) и следует из уравнения (33) при $a = b$ в главном порядке по ϵ^2/δ . Уширение распределения $P(u)$ приводит к локализации $P(\psi)$ вблизи краев интервала $(-\pi, \pi)$ (Рис.2,б), а сужение — к локализации $P(\psi)$ в середине интервала $(-\pi, \pi)$. (Рис.2,в). Однако, грубая визуальная форма распределения $P(\psi)$ не является физически содержательной ввиду инвариантности параметров v и D относительно изменений, представленных на Рис.2.

Обсуждаемая проблематика не ограничена одномерными системами — аналогичные трудности возникают при анализе ляпуновских экспонент в рамках обобщенной версии [18] уравнения Дорохова–Мелло–Перейра–Кумара [19, 20]. Минимальная ляпуновская экспонента определяет критические свойства для перехода Андерсона (на этом основан известный численный алгоритм, см. ссылки в [18]), и аналогичная скрытая симметрия может быть существенной при исследовании последнего.

Список литературы

- [1] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).
- [2] R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957); Phil. Mag. **21**, 863 (1970).
- [3] В. И. Мельников, ФТТ **23**, 782 (1981).
- [4] A. A. Abrikosov, Sol. St. Comm. **37**, 997 (1981).
- [5] N. Kumar, Phys. Rev. B **31**, 5513 (1985).
- [6] B. Shapiro, Phys. Rev. B **34**, 4394 (1986).
- [7] P. Mello, Phys. Rev. B **35**, 1082 (1987).
- [8] B. Shapiro, Phil. Mag. **56**, 1031 (1987).
- [9] И. М. Суслов, ЖЭТФ **151**, 897 (2017).
- [10] И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, Введение в теорию неупорядоченных систем, Москва, Наука, 1982.
- [11] C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997).
- [12] X. Chang, X. Ma, M. Yezpez, A. Z. Genack, P. A. Mello, Phys. Rev. B **96**, 180203 (2017).
- [13] L. I. Deych, D. Zaslavsky, A. A. Lisyansky, Phys. Rev. Lett. **81**, 5390 (1998).
- [14] L. I. Deych, A. A. Lisyansky, B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **84**, 2678 (2000); Phys. Rev. B **64**, 224202 (2001).
- [15] L. I. Deych, M. V. Erementchouk, A. A. Lisyansky, Phys. Rev. Lett. **90**, 126601 (2001).
- [16] И. М. Суслов, ЖЭТФ **156**, 950 (2019).
- [17] В. Л. Березинский, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **77**, 2498 (1979).
- [18] И. М. Суслов, ЖЭТФ **154**, 152 (2018).
- [19] О. Н. Дорохов, Письма в ЖЭТФ **36**, 259 (1982).
- [20] P. A. Mello, P. Pereyra, N. Kumar, Ann. Phys. (N.Y.) **181**, 290 (1988).