О разделении переменных в уравнениях диффузионного типа

И.М.Суслов
Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН,
119334, Москва, Россия
E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Как хорошо известно, для разделения переменных в задаче на собственные значения соответствующий оператор должен представляться в виде суммы операторов, зависящих от одной переменной. Условия разделения переменных для уравнений диффузионного типа оказываются существенно более слабыми.

Для разделения переменных в задаче на собственные значения

$$\hat{L}\, P(x,y) = \lambda\, P(x,y) \tag{1}$$

оператор $\hat{L}$ должен представляться в виде суммы двух операторов $\hat{L}_x + \hat{M}_y$, зависящих только от x и y соответственно [1].

Условия для разделения переменных в уравнениях типа Фоккера–Планка оказываются более слабыми. Так для уравнения, описывающего временную эволюцию распределения вероятностей $P \equiv P(x,y)$,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{ \hat{L}_{x,y} P \right\}'_x + \left\{ \hat{M}_y P \right\}'_y \,, \tag{2}$$

достаточно того, что оператор $\hat{M}_y$ в последнем члене зависит только от y, тогда как оператор $\hat{L}_{x,y}$ остается произвольным. Действительно, подставляя $P = P(x)P(y)$ и разделив на $P(x)$, имеем

$$-\frac{\partial P(y)}{\partial t} + \left\{ \hat{M}_y P(y) \right\}'_y = $$
$$= \frac{P(y)}{P(x)} \frac{\partial P(x)}{\partial t} - \frac{1}{P(x)} \left\{ \hat{L}_{x,y} P \right\}'_x \,. \tag{3}$$

Левая часть не зависит от x и есть некоторая функция $F(y)$. Тогда

$$P(y) \frac{\partial P(x)}{\partial t} - \left\{ \hat{L}_{x,y} P \right\}'_x = F(y) P(x) \tag{4}$$

и интегрируя по x получим $F(y) \equiv 0$, т.к. левая часть обращается в нуль, а интеграл от $P(x)$ равен единице в силу нормировки. В результате правая и левая части уравнения (3) обращаются в нуль независимо друг от друга, и уравнение для $P(y)$ отщепляется

$$\frac{\partial P(y)}{\partial t} - \left\{ \hat{M}_y P(y) \right\}'_y = 0 \,. \tag{5}$$

С другой стороны, интегрируя (3) по y, получим

$$\frac{\partial P(x)}{\partial t} - \left\{ \hat{\mathcal{L}}_x P(x) \right\}'_x = 0 \,, \tag{6}$$

где

$$\hat{\mathcal{L}}_x = \int \hat{L}_{x,y} P(y) dy \,. \tag{7}$$

Приведенные соображения являются очень общими и справедливы для произвольных уравнений диффузионного типа. Существенно, что в физических приложениях такие уравнения описывают эволюцию функции распределения вероятностей, которая обладает соответствующими свойствами (положительность, убывание на бесконечности, нормируемость на единицу); поэтому их правая часть всегда является суммой полных производных, что обеспечивает сохранение вероятности [1]. В результате условия для разделения переменных всегда оказываются более слабыми, чем для уравнения (1). На наш взгляд, этот факт должен быть отмечен во всех курсах математической физики; но к сожалению, это не так [1].

Уравнение типа (2) возникает в теории одномерной локализации и описывает эволюцию совместного распределения $P(\rho, \psi)$ безразмерного ландауэровского сопротивления ρ и фазовой переменной $\psi = \theta - \varphi$, где θ и φ — фазы, входящие в трансфер-матрицу (см. уравнение (28) в работе [3] и комментарии после него). Аналогичные ситуации ожидаются при описании квази-одномерных систем в рамках обобщенной версии [4] уравнения Дорохова–Мелло–Перейра–Кумара [5, 6].

[1] Имеются в виду системы, бесконечные во всех направлениях. В случае их пространственной ограниченности нужно различать открытые и закрытые системы, что может быть сделано на совершенно абстрактном уровне (см. обсуждение в разд.4.1 работы [2]). Сохранение вероятности имеет место лишь в закрытых системах.

Список литературы

[1] В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, Москва, Наука, 1967.

[2] И. М. Суслов, ЖЭТФ **142**, 1020 (2012).

[3] I. M. Suslov, Phil. Mag. Lett., https://doi.org/10.1080/09500839.2022.2096267; arXiv: 2110.12986.

[4] И. М. Суслов, ЖЭТФ **154**, 152 (2018).

[5] О. Н. Дорохов, Письма в ЖЭТФ **36**, 259 (1982).

[6] P. A. Mello, P. Pereyra, N. Kumar, Ann. Phys. (N.Y.) **181**, 290 (1988).